Bollettino dei Docenti di Matematica 40 (2000), 69-91

Puntini...
Considerazioni ed esperienze sul rigore formale nel passaggio tra la Scuola Secondaria e l'Università

GIORGIO T. BAGNI (*) - PAOLO NEGRINI (**)

NUCLEO DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA, BOLOGNA

> «Supponiamo che uno scriva una fila di numeri: 1, 4, 9, 16 e domandi di che successione si tratta (...) Supponiamo che uno dica: «Si sa per intuizione che cosa bisogna fare arrivati a 100». Allora si avrà anche un'intuizione per sapere come continuare la serie 2, 2, 2, 2 in modo da essere sicuri che non la si continui così: 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, ... Occorre avere un'intuizione ad ogni passo».
>
> Ludwig Wittgenstein (1982, 26, 30)

1. INTRODUZIONE

Un esercizio assai diffuso nella pratica didattica è basato sulla considerazione di una successione assegnata mediante alcuni termini (in generale iniziali) e proseguita con i fatidici... *puntini*. Ad esempio, in non pochi libri di testo attualmente in uso nelle scuole secondarie troviamo esercizi come il seguente:

Scrivere il termine generale della successione: 5; 9; 13; 17; 21; ...

per il quale viene proposto, spesso senza ulteriori avvertenze o spiegazioni, il risultato $a_n = 4n+5$ (essendo n un naturale; ma anche quest'ultimo dettaglio è spesso omesso; per quanto riguarda l'omissione dell'indicazione del dominio di una funzione: Bacciotti & Beccari, 1988; Bagni, 1997; per l'uso della lingua naturale ricordiamo: Maier, 1989; sulle convenzioni: Villani, 1986).

Tale impostazione è errata e può essere fuorviante, se non spiegata agli allievi: una successione, anche ammesso che sia sempre basata su di una *legge* (esistono anche successioni casuali...), un volta assegnati i suoi primi n termini, può *proseguire* in infiniti modi; i cinque termini sopra citati possono appartenere alla progressione aritmetica intuitivamente indicata da:

(*) Professore a contratto, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna.
(**) Professore associato, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna.

$$5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ 25;\ 29;\ 33;\ 37;\ 41;\ 45;\ 49;\ 53;\ 57;\ 61;\ 65;\ 69;\ 71;\ \ldots$$

ma anche alle successioni (intuitivamente) indicate da:

$$5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ 5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ 5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ 5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ \ldots$$

$$5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ -25;\ -29;\ -33;\ -37;\ -41;\ 45;\ 49;\ 53;\ 57;\ 61;\ -65;\ \ldots$$

$$5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ \ldots$$

ed anche alla successione (che dal sesto termine in poi appare casuale):

$$5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ -589;\ 11\pi;\ 0{,}48;\ -1{,}2504;\ -i;\ 0;\ 5\sqrt{3};\ 2-7e;\ \frac{37}{41};\ \ldots$$

Sorge quindi un dubbio: come gli insegnanti e gli allievi interpretano esercizi come quello sopra ricordato? Più precisamente: quale convenzione implicita si sovrappone al significato espresso dal testo (peraltro ambiguo ed incompleto) di tale esercizio?

In effetti, potrebbe sembrare che l'esercizio in questione sia frequentemente interpretato nel senso della determinazione della legge *più semplice* (o dovremmo dire *più semplicemente esprimibile in forma analitica*?) tra quelle che possono fornire gli elementi indicati come termini iniziali di una successione numerica. Certamente, tuttavia, anche una tale convenzione implicita sarebbe ben poco chiara (che cosa significherebbe, infatti, *più semplice*? Potrebbe trattarsi di una caratteristica collegata alla concretezza, alla diretta accessibilità; sulla didattica dell'astrazione si veda ad esempio: Barth, 1990) e, potendo portare a pesanti incoerenze, non è dunque accettabile in un moderno contesto didattico (sulle incoerenze indichiamo ad esempio: Tall, 1990; Tirosh, 1990).

Nel presente lavoro abbiamo voluto analizzare con l'aiuto di alcuni test le concezioni degli studenti a proposito della situazione ora descritta. In particolare, ci siamo chiesti:

Questione 1. La presenza dei *puntini* nella traccia di un esercizio viene accettata e viene interpretata senza incertezze dagli allievi della scuola secondaria superiore?

Questione 2. Quali altri modi di indicare una successione sono considerati chiari e corretti dagli allievi della scuola secondaria superiore?

Questione 3. Quale influenza ha sulla situazione così esaminata il passaggio dalla scuola secondaria superiore all'università?

Ci siamo occupati di allievi del quarto anno della scuola secondaria superiore (che non avevano, dunque, ancora appreso gli elementi dell'analisi matematica) e di alcuni studenti universitari del primo anno del corso di laurea in Chimica e Tecnologie Farmaceutiche (che avevano dunque frequentato interamente un corso di scuola secondaria superiore).

2. GLI ALLIEVI DELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE

2.1. METODOLOGIA DELLA RICERCA

L'analisi del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando 49 allievi di due classi di quarta *Liceo scientifico*. Al momento della ricerca, agli allievi non era ancora stata proposta una trattazione organica ed approfondita delle successioni e dei loro limiti (né degli algoritmi infiniti in generale): essi conoscevano soltanto la definizione di successione numerica.

A tutti gli allievi è stato proposto il seguente test:

1. Considera l'espressione: $a = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}}$

Considera quindi la successione $\{a_n\}$ di numeri reali, con $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{6} \\ a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \end{cases}$$

Quali delle seguenti affermazioni ritieni corrette?

(1.A) a è un numero reale al quale si avvicina la successione $\{a_n\}$.
(1.B) L'espressione assunta a definizione di a è priva di senso.
(1.C) L'espressione assunta a definizione di a è un altro modo per definire la successione $\{a_n\}$.

2. Considera l'espressione: $b = \left(\left(\left(\left(\left(2^2+2\right)^2+2\right)^2+2\right)^2+2\right)^2+\ldots\right)^2$

Considera quindi la successione $\{b_n\}$ di numeri reali, con $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{cases} b_0 = 2^2 \\ b_{n+1} = (b_n+2)^2 \end{cases}$$

Quali delle seguenti affermazioni ritieni corrette?

(2.A) b è un numero reale al quale si avvicina la successione $\{b_n\}$.
(2.B) L'espressione assunta a definizione di b è priva di senso.
(2.C) L'espressione assunta a definizione di b è un altro modo per definire la successione $\{b_n\}$.

3. Quali delle seguenti scritture definiscono univocamente una successione? Ovvero, per quali delle seguenti scritture saresti in grado di scrivere, al posto dei puntini, una ed una sola fila di termini della successione?

(3.A) 1; 3; 5; 7; ... ...
(3.B) 1; 3; 15; 105; ... ...
(3.C) 4; 3; 5; 2; 6; 1; 7; ... ...

4. Le seguenti scritture indicano lo stesso sottoinsieme dell'insieme **N** dei numeri naturali. Indica quella che tra esse ti sembra la più corretta e quella che tra esse ti sembra la più chiara.

(4.A) $\{1; 3; 9; 27; ...\}$
(4.B) $\{1; 3; 9; 27; ...; 3^n; ...\}$
(4.C) $\{n: n \in \mathbf{N} \wedge \exists k \in \mathbf{N}, n = 3^k\}$

Nel caso in cui la scelta della formula *più chiara* non coincida con quella della *più corretta*, spiega brevemente le ragioni delle tue scelte.

Il tempo accordato per la risoluzione della prova è stato di 30 minuti.
Non è stato consentito agli allievi l'uso della calcolatrice scientifica.

2.2. RISULTATI DEL TEST

Punto 1	(1.A)	39	(80%)
	(1.B)	1	(2%)
	(1.C)	5	(10%)
	nessuna risposta	6	(12%)

Due allievi ritengono corrette sia la (1.A) che la (1.C).

Punto 2	(2.A)	36	(74%)
	(2.B)	3	(6%)
	(2.C)	6	(12%)
	nessuna risposta	6	(12%)

Due allievi ritengono corrette sia la (2.A) che la (2.C).

Punto 3 Dicono che si può individuare univoc. una successione:

	(3.A)	47	(96%)
	(3.B)	35	(71%)
	(3.C)	29	(59%)

Punto 4	la più chiara:	(4.A)	26	(53%)
		(4.B)	12	(25%)

	(4.C)	5	(10%)
	nessuna risposta	6	(12%)
la più corretta:	(4.A)	1	(2%)
	(4.B)	3	(6%)
	(4.C)	34	(70%)
	nessuna risposta	11	(22%)

(Le percentuali dei risultati sono state arrotondate all'unità).

2.3. PRIME CONSIDERAZIONI SUI RISULTATI

I risultati del test, descritti nel paragrafo precedente, suggeriscono le seguenti considerazioni.

- La presenza dei *puntini* in un'espressione è, mediamente, accettata dagli allievi. Infatti, per quanto riguarda l'interpretazione di una successione convergente espressa ricorsivamente oppure mediante un termine generale contenente i *puntini* (punto 1), moltissimi allievi (l'80% del totale) considerano senz'altro l'espressione $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}}$ come il limite a cui tende la successione data da $\begin{cases} a_0 = \sqrt{6} \\ a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \end{cases}$. Solo un allievo sembra chiedersi se l'espressione $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}}$ rappresenta effettivamente un numero.

- Gli allievi non sembrano distinguere le successioni divergenti (punto 2) da quelle convergenti: la nettissima maggioranza (74%) identifica nella $b = \left(\left(\left(\left((2^2+2)^2+2\right)^2+2\right)^2+2\right)^2+\ldots\right)^2$ il limite della successione (divergente!) data da $\begin{cases} b_0 = 2^2 \\ b_{n+1} = (b_n+2)^2 \end{cases}$ e non esita a riferirsi ad essa come ad un numero reale.

- Gli allievi non mostrano imbarazzo di fronte ad esercizi come quelli proposti al punto 3; l'espressione di una successione con l'impiego dei *puntini* non insospettisce particolarmente gli allievi.

- Tra le varie espressioni di un insieme di numeri in progressione geometrica, proposte al punto 4, gli allievi (53%) ritengono che la forma più chiara sia: {1; 3; 9; 27; ...}, che contiene i *puntini* e non contiene il termine generale 3^k. Soltanto un allievo (2%) ritiene però che tale forma sia anche la più corretta.

- La forma più corretta è ritenuta: $\{n: n \in \mathbf{N} \wedge \exists k \in \mathbf{N},\ n = 3^k\}$ (70%). Soltanto il 10% degli allievi ritiene però che tale forma sia la più chiara.

Prima di passare ad un'analisi più completa ed organica dei risultati del test, ci è sembrato indispensabile prestare attenzione alle giustificazioni fornite da alcuni allievi nel test, che saranno riportate nel paragrafo seguente.

2.4. GIUSTIFICAZIONI FORNITE DAGLI ALLIEVI

Alcuni allievi hanno giustificato, per iscritto, una o più risposte fornite nel test; in particolare, riteniamo interessante riportare alcune osservazioni emerse riguardanti i punti 3 e 4 della prova.

Giustificazioni riguardanti il punto 3

Molti allievi (20, 41% del totale) non hanno affermato che la soluzione è unica per il terzo esercizio del punto 3. Riportiamo alcune giustificazioni:

«Credo che ci possano essere varie soluzioni perché in tali successioni si possono vedere altre tecniche di risoluzione, soprattutto nell'ultimo caso» (Daniele).

«Ogni esercizio ha almeno una soluzione, ma non penso che sia l'unica possibile anche perché noi non possiamo sapere il criterio utilizzato dagli autori dell'esercizio. Nell'ultimo esercizio, ad esempio, sarei stata più sicura della soluzione se la successione data fosse stata più lunga, in modo da confermare il mio risultato. In teoria il risultato dovrebbe essere unico, perché il criterio di una determinata successione è unico, ma bisogna sempre vedere quanti numeri ci vengono presentati» (Nicoletta).

Interessante è l'affermazione «in teoria il risultato dovrebbe essere unico, perché il criterio di una determinata successione è unico»; intervistata ulteriormente sul significato di questa giustificazione, Nicoletta ha precisato:

«Intendo dire che chi ha scritto l'esercizio pensava ad un criterio. Io lo devo indovinare sulla base dei numeri che mi vengono detti».

Questa affermazione è certamente interessante: l'allieva infatti appare sicura del fatto che una successione debba essere originata da un «criterio», e questo «criterio» è quello inizialmente considerato da «chi ha scritto l'esercizio»; ma per determinarlo è necessario, nell'opinione dell'allieva, avere a disposizione un'adeguata quantità di termini.

Gli unici due allievi che non ritengono uniche le soluzioni degli esercizi proposti affermano:

«Le soluzioni non sono uniche: si possono inventare relazioni diverse o decidere di prendere numeri anche non naturali, come π. Non sono obbligato ad usare solo numeri: potrei riempire la successione con un oggetto, con la lettera *b* etc.» (Giovanni).

«Ognuno dei tre esercizi ha almeno una soluzione, come lo sono nel mio caso quelle proposte. Non sono però in grado di affermare con sicurezza che si tratti delle uniche soluzioni possibili, per un motivo che potrebbe risultare però banale: non essendo infatti riuscito, tranne che nel primo caso, ad esprimere con una formula il succedersi dei numeri, non posso escludere che esistano altre soluzioni, dipendenti da un ragionamento diverso» (Riccardo).

Anche quest'ultima osservazione appare piuttosto interessante: l'allievo pone innanzitutto l'accento sulla «formula» che sta alla base della successione considerata; egli ammette quindi che non per tutte le tre successioni proposte è stato in grado di determinare la «formula» corrispondente. Proprio questo fatto lo induce a temere che le soluzione trovate non siano uniche: dunque l'unicità della soluzione viene fatta dipendere dalla presenza di una «formula» in grado di «esprimere il succedersi dei numeri».

Lucida e corretta appare la giustificazione seguente (l'allievo aveva però affermato che la scrittura 3.A definisce univocamente una successione):

«Questo risulta dalla mia interpretazione dei primi quattro o sei numeri, un po' pochi. Nessuno garantisce che, per esempio, la serie, ad un certo punto, si ripeta o si interrompa per poi riprendere. L'unico modo sarebbe conoscere tutti i valori in successione, ma, essendo questa infinita, non ci potrà mai essere certezza assoluta» (Sandro).

Per alcuni versi analoga a questa, infine, appare la giustificazione seguente:

«Queste tre soluzioni non sono che esempi. Probabilmente ci sono altri modi di risolvere le sequenze di numeri, ma dato che è sufficiente trovare una soluzione, conviene utilizzare quelle che balzano subito all'occhio» (Carlo).

L'allievo interpreta dunque l'esercizio dato (*sostituisci alle lettere i numeri necessari*) in termini di determinare *almeno una* soluzione, ovvero *almeno* un valore per ciascuna lettera in modo da rispettare una qualche regolarità. Dunque tra le varie scelte possibili «conviene utilizzare quelle che balzano subito all'occhio».

Interviste riguardanti il punto 4

Alcune osservazioni riguardanti il punto 4 sono le seguenti:

«La terza è ottima per identificare un insieme, ma non è adatta per una successione» (Giovanna).

È interessante notare che la somiglianza della scrittura proposta con quella usualmente utilizzata per indicare l'espressione caratteristica di un insieme ha finito per insospettire l'allieva.

Riccardo conferma la posizione già precedentemente espressa:

«La prima propone solo una serie di numeri, apparentemente corretta se considerata superficialmente, ma che, con quei puntini, lascia spazio alla fantasia» (Riccardo).

«Pur trattandosi di sequenze semplici, le prime due si limitano a dare un'idea del contenuto dell'insieme. Se si deve esprimere la proprietà che lo caratterizza, è preferibile all'enumerazione l'espressione della caratteristica degli elementi, come nel punto C» (Sandro).

L'allievo dunque ribadisce la necessità di individuare immediatamente «l'espressione della caratteristica degli elementi».

È a questo punto interessante analizzare brevemente il significato attribuito dagli allievi all'espressione *più corretta*. In particolare, abbiamo inteso verificare se la *correttezza* e la *chiarezza* di un'espressione siano in qualche modo correlate (positivamente oppure anche negativamente, ad esempio mediante posizioni che in qualche modo rendano antitetici tali concetti: un'espressione chiara non è mai pienamente corretta e viceversa...). In effetti, abbiamo riscontrato che soltanto 5 allievi (10% del totale) hanno indicato una stessa espressione simultaneamente come la più corretta e la più chiara (tre di essi hanno indicato l'espressione C).

2.5. ANALISI DELLE GIUSTIFICAZIONI DEGLI ALLIEVI E CONCLUSIONI

Le considerazioni sui risultati del test, abbinate a quanto emerso dalle giustificazioni degli allievi, consentono la precisazione delle conclusioni seguenti, che forniscono alcune risposte alle domande indicate al termine del paragrafo 1 (limitatamente agli allievi della scuola secondaria superiore).

- La presenza dei *puntini* in un'espressione è generalmente accettata dagli allievi (ed è spesso addirittura preferita, per la sua chiarezza, ad espressioni certamente riconosciute più corrette, ben più rigorose, ma meno intuitive, come l'assegnazione ricorsiva); essi peraltro non sembrano porsi il problema della convergenza o della divergenza delle successioni di volta in volta considerate: il termine *infinito* viene spesso considerato alla stregua... di un numerale (per un approfondimento sulla didattica dell'infinito: D'Amore, 1996 e 1997).

- La maggior parte degli allievi non rileva sostanziali difficoltà o ambiguità nell'interpretazione di una successione assegnata soltanto mediante alcuni termini iniziali seguiti dai *puntini*. Gli allievi sembrano accettare la presenza di una *convenzione tacita ma non banale* (plausibilmente accettata o addirittura suggerita dagli insegnanti, un *accordo sociale*) secondo la quale i *puntini* richiedono una opportuna traduzione, un completamento in modo da rispettare una preesistente regolarità.

- Non pochi allievi dunque ritengono di doversi impegnare nella ricerca di un criterio sul quale basare la successione in esame, ovvero di una «formula» che possa formalizzare tale criterio. Appare qui un atteggiamento piuttosto frequente negli allievi, chiaramente collegato con alcune clausole del contratto didattico (si veda: Brousseau, 1986): ricordiamo che B. D'Amore e P. Sandri hanno chiamato «e.g.f.» (*esigenza della giustificazione formale*) una clausola del contratto didattico simile a quella qui evidenziata (la cui presenza è riscontrabile già a partire dalle scuole elementari; sembra che tale clausola diventi sempre più vincolante con il passare degli anni, al crescere del livello scolastico di appartenenza: D'Amore & Sandri, 1998).

3. GLI STUDENTI UNIVERSITARI

3.1. METODOLOGIA DELLA RICERCA

L'analisi del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando 100 studenti del corso di Matematica del primo anno del corso di laurea in Chimica e Tecnologia Farmaceutiche della Facoltà di Farmacia dell'Università di Bologna. Al momento della ricerca, agli studenti non era ancora stata proposta una trattazione organica ed approfondita delle successioni (né degli algoritmi infiniti in generale): erano stati svolti soltanto alcuni cenni di logica, qualche richiamo sulla teoria elementare degli insiemi, sulle relazioni, sui numeri reali, razionali, interi, naturali (e quindi il principio di induzione, significativo per l'oggetto del nostro studio) ([1]).

A tutti gli studenti è stato fornito un test uguale a quello proposto agli allievi della scuola secondaria superiore. Il tempo accordato per la risoluzione della prova è stato di 30 minuti (come nel caso della scuola secondaria superiore).

([1]) Abbiamo ritenuto che quello fosse il momento più indicato per questo tipo di test: le prime lezioni riguardanti temi molto generali, avrebbero dovuto rendere più "omogeneo" il campione. La provenienza degli studenti è varia, e non è controllabile il tipo di preparazione che ciascuno studente ha avuto prima di intraprendere l'università; sottoporre il test alla prima lezione avrebbe avuto la controindicazione di sapere ben poco sulla formazione precedente dei partecipanti. Un eccessivo ritardo nella somministrazione del test avrebbe condizionato troppo le risposte.

Non è stato consentito agli studenti l'uso della calcolatrice scientifica.

3.2. RISULTATI DEL TEST

Punto 1	(1.A)		15	(15%)
	(1.B)		22	(22%)
	(1.C)		68	(68%)
	nessuna risposta		0	(0%)

Cinque studenti ritengono corrette sia la (1.A) che la (1.C).

Punto 2	(2.A)		18	(18%)
	(2.B)		11	(11%)
	(2.C)		72	(72%)
	nessuna risposta		2	(2%)

Tre studenti ritengono corrette sia la (1.A) che la (1.C).

Punto 3 Dicono che si può individuare univoc. una successione:

	(3.A)		95	(95%)
	(3.B)		52	(52%)
	(3.C)		52	(52%)

Punto 4	la più chiara:	(4.A)	42	(42%)
		(4.B)	29	(29%)
		(4.C)	24	(24%)
		nessuna risposta	5	(5%)
	la più corretta:	(4.A)	5	(5%)
		(4.B)	9	(9%)
		(4.C)	78	(78%)
		nessuna risposta	8	(8%)

3.3. PRIME CONSIDERAZIONI SUI RISULTATI

I risultati del test, descritti nel paragrafo precedente, suggeriscono le seguenti considerazioni.

- Le risposte ai punti 1 e 2 appaiono diverse rispetto a quelle date dagli allievi della scuola secondaria superiore: molti studenti universitari infatti pongono l'accento sulla possibilità di *definire* la successione anche mediante un'espressione contenente i *puntini* (e considerano corrette le affermazioni 1-C e 2-C), mentre molti allievi liceali avevano optato per l'*avvicinamento* della successione in esame ad un numero reale (ed avevano dunque considerato corrette le affermazioni 1-A e 2-A). Tuttavia la presenza dei *puntini* in un'espressione sembra essere sostanzialmente accettata anche dagli studenti universitari, sebbene sia nettamente diminuita la percentuale di studenti (ora del 18%; era addirittura del 74% nel caso degli allievi della scuola secondaria superiore) che considera un numero reale come limite di una successione divergente (punto 2.A).

- Le risposte ai rimanenti punti 3, 4, 5 sono quantitativamente analoghe alle risposte degli allievi della scuola secondaria superiore.

3.4. GIUSTIFICAZIONI FORNITE DAGLI STUDENTI

Alcuni studenti hanno giustificato, per iscritto, una o più risposte fornite nel test; in particolare, riteniamo interessante riportare alcune osservazioni emerse riguardanti i punti 3 e 4 della prova.

Giustificazioni riguardanti il punto 3

Riportiamo alcune giustificazioni di studenti che non ritengono che la scrittura (3.B) possa esprimere una successione:

«La B non può essere ritenuta univocamente una successione perché non è possibile trovare un legame tra i valori riportati» (Anna).

«Non vedo la relazione tra un numero e l'altro» (Francesco).

«Per il punto B non c'è una logica» (Carlo; analoghe motivazioni vengono espresse da altri sette studenti).

Dunque la nozione di successione, analogamente a quanto visto per gli allievi della scuola secondaria superiore, viene ancora associata alla possibilità di comprendere la legge in base alla quale vengono fissati i termini.

Interessante è anche la seguente (errata) considerazione, dalla quale traspare con buona evidenza una misconcezione sulle successioni:

«In una successione ogni numero deve essere maggiore del numero precedente» (Roberto).

La seguente (errata) giustificazione deriva infine da… un po' di confusione tra il dominio ed il codominio:

«Se si prosegue si arriva ai negativi ed una successione deve essere definita nell'insieme dei numeri naturali» (Massimiliano).

Interviste riguardanti il punto 4

Alcune osservazioni riguardanti il punto 4 sono le seguenti:

«La prima è la forma più chiara perché si capisce immediatamente la successione, mentre la più corretta è l'ultima perché generalizza la successione a tutti i numeri naturali» (Stefania).

«È questione di abitudine» (Valentina).

«La più chiara riporta i numeri, la più corretta è in termini letterali» (Tullio).

Quest'ultima annotazione ci sembra significativa per quanto riguarda la concezione della matematica presso alcuni studenti (anche con riferimento ad alcune clausole del contratto didattico: è spontaneo pensare ancora all'*esigenza della giustificazione formale*).

3.5. ANALISI DELLE GIUSTIFICAZIONI DEGLI STUDENTI E CONCLUSIONI GENERALI

La posizione degli studenti universitari rappresenta, sotto alcuni punti di vista, un'evoluzione rispetto a quella degli allievi della scuola secondaria: ad esempio, sono sensibilmente diminuiti gli studenti che considerano un numero reale come limite di una successione divergente, errore frequente nelle risposte degli allievi liceali.

Tuttavia le concezioni che emergono dalle risposte al test e dalle giustificazioni degli studenti universitari non delineano un quadro radicalmente diverso rispetto a quello relativo agli allievi della scuola secondaria superiore: la presenza dei *puntini* in un'espressione viene accettata dagli studenti e molti di essi non palesano sostanziali difficoltà nell'interpretazione di una successione assegnata utilizzando i *puntini*. Anche per gli studenti universitari, dunque, potremmo parlare di una *convenzione tacita ma non banale* secondo la quale i *puntini* richiedono il completamento dell'espressione considerata con il rispetto di una preesistente regolarità: una convenzione plausibilmente determinata dalla passata esperienza scolastica e particolarmente resistente, in quanto risulta presente ed attiva anche dopo il passaggio dalla scuola secondaria all'università (gran parte degli studenti universitari hanno frequentato un corso di introduzione all'analisi matematica nell'ultimo anno della scuola secondaria superiore).

Analogamente a quanto visto per i liceali, gli studenti dunque ricercano il criterio sul quale basare una successione assegnata mediante i *puntini*, ovvero la «formula» che formalizza tale criterio: questa ricerca sembra essere indispensabile per comprendere appieno la successione assegnata mediante i *puntini*.

Concludiamo sottolineando innanzitutto che il valore della ricerca presentata (ed in particolare dei dati numerici ricavati) deve essere considerato in ambito qualitativo: l'affermazione di una valenza quantitativa richiederebbe l'esame di un ben più vasto campione e l'uso di criteri di campionamento.

Riteniamo poi opportuno precisare alcune conclusioni di carattere generale: il test proposto non deve essere interpretato come un tentativo, più o meno malizioso, di mettere alla prova gli studenti e di porli davanti all'imbarazzante scelta tra scritture intuitive, ma poco rigorose, ed altre più formali, ma indubbiamente più pesanti. Gli insegnanti stessi, in realtà, ogni giorno usano, in molte occasioni, formule nelle quali compaiono i *puntini*, piuttosto che le rigorose ma ingombranti espressioni ricorsive; né possiamo dimenticare che tali scritture intuitive si trovano abbondantemente anche in testi ed in libri autorevoli.

La nostra posizione potrebbe dunque essere così riassunta: non vogliamo certamente fare del rigore formale il primo ed unico scopo dell'insegnamento della matematica. Ma è necessario acquisire pienamente un buon livello di rigore per poi permettersi, qualche volta, di ignorarlo: avendo quindi ben presente che quando si scrive una formula più intuitiva che formalmente rigorosa sarebbe comunque possibile sostituirla con un'espressione pienamente soddisfacente anche dal punto di vista formale. In sostanza, non si tratta di mettere al bando alcune scritture forse non del tutto corrette, come quelle contenenti i *puntini*; ma piuttosto va sradicata la convinzione che quelle scritture risultano convenienti, che *vanno bene così perché solo così si capiscono*, mentre altre espressioni contenenti sommatorie o definizioni ricorsive sono solo… astrazioni inutili le quali finiscono per complicare inutilmente le cose semplici.

Da un lato, quindi, il tentativo di portare i propri allievi ad impiegare un linguaggio matematico rigoroso è una lodevole intenzione, è un obiettivo importante per ogni insegnante. Tuttavia l'insegnante deve essere consapevole delle reali difficoltà che l'uso di questo linguaggio comporta per l'allievo, difficoltà che si sovrappongono, spesso pesantemente, a quelle che la risoluzione di un problema già comporta (D'Amore & Plazzi, 1990)(2).

Ma d'altro canto è indispensabile che l'uso di un linguaggio non del tutto rigoroso sia sempre attentamente controllato, per evitare che difficoltà di interpretazione, convenzioni implicite non sempre corrette e coerenti creino agli allievi difficoltà pesanti, misconcezioni ed ostacoli talvolta difficilmente superabili.

(2) Non dovremmo inoltre dimenticare che anche la storia della matematica ha visto una continua evoluzione del concetto di rigore formale. Nota a tale proposito U. Bottazzini: «Il rigore in matematica è anch'esso un concetto 'storico' e dunque in divenire (...) Appellarsi all'esigenza del rigore nello spiegare lo sviluppo della matematica sembra in realtà un discorso circolare: di fatto, alla formulazione di nuovi *standard* di rigore si perviene quando i vecchi criteri non permettono una risposta adeguata alle domande che vengono dalla pratica matematica» (Bottazzini, 1981, p. 13).

Riferimenti bibliografici

Bagni, G.T. (1997), Dominio di una funzione, numeri reali e numeri complessi, *La matematica e la sua didattica*, 3, 306-319.

Bacciotti, A. & Beccari, G. (1988), Problemi didattici nel corsi universitari: l'introduzione del concetto di funzione, *Archimede*, 40, 41-49.

Barth, B.-M. (1990), *L'apprendimento dell'astrazione*, La Scuola, Brescia (prima edizione: Paris, 1987).

Brousseau, G. (1986), Fondaments et méthods de la didactique des mathématiques: *Recherches en didactique del mathématiques*, 7, 2, 33-115.

Bottazzini, U. (1981), *Il calcolo sublime*, Boringhieri, Torino.

Brousseau, G. (1986), Fondaments et méthods de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique del mathématiques*, 7, 2.

D' Amore, B. & Plazzi, P. (1990), Intuizione e rigore nella pratica e nei fondamenti della matematica, *La matematica e la sua didattica*, IV, 3, 18-24.

D'Amore, B. (1996), *L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi*, Opening Relation to Topic Group XIV, 8th ICME, Sevilla, 14-21 July 1996 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 322-335).

D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. (1997), Bibliografia in progress sul tema: «l'infinito in didattica della matematica», *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-305.

D'Amore, B. & Sandri, P. (1998), Les réponses des élèves aux problèmes de type scolaire standard à une donnée manquante, *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXV, 55-94.

Maier, H. (1989), Conflit entre langue mathématique et langue quotidienne pour les élèves, *Cahiers de didacqique des mathématique*, 3 (ristampato in: *La matematica e la sua didattica*, 3, luglio 1995, 298-305).

Tall, D. (1990), Inconsistencies in the learning of calculus and analysis, *Focus on Learning Problems in Mahematics*, 12, 49-64.

Tirosh, D. (1990), Inconsistencies in students' mathematical constructs, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 111-129.

Villani, V. (1986), Notazioni e convenzioni in matematica, *Archimede*, 38, 67-70.

Vinner, S. (1992), Function concept as prototype for problems in mathematics, Harel, G. and Dubinsky E. (eds.), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, pp. 195-213, 1992.

Wittgenstein, L. (1982), *Lezioni sui fondamenti della matematica. Cambridge 1939*, Boringhieri, Torino.