Bollettino dei Docenti di Matematica, 33 (1996), 43-52

GEOMETRIA E TEORIA DEI NUMERI NELL'OPERA DI GEORG PICK: UN'ESPERIENZA DIDATTICA

GIORGIO T. BAGNI
NUCLEO DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA, BOLOGNA

Summary. In this paper the original article (Prag, 1899) by Georg Pick about some problems in reticular geometry is presented and summarised. Moreover the didactical importance of this subject in the High School (referred to 4th class of Italian *Liceo scientifico*, pupils aged 17 years) is studied by a test and some interviews.

INTRODUZIONE

Negli ultimi decenni abbiamo potuto riscontrare un crescente interesse per le questioni di geometria reticolare, anche dal punto di vista didattico [Stocco, 1986] [Gambarelli, 1989] [Bagni, 1990]. Anche la ricerca in didattica della matematica ha considerato con interesse questioni collegate alla geometria reticolare [Kaldrimidou, 1995]. Tale particolare sensibilità suggerisce l'opportunità di una rivisitazione storica dei modelli collegati al piano di Pick (il piano euclideo associato a tutte le rette che, riferite ad un sistema cartesiano, abbiano equazione $x = m$, $y = n$, con $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$).

Nel presente lavoro abbiamo dunque incluso un'analisi dettagliata dell'articolo originale di Georg Pick dal quale emerge con chiarezza ed efficacia didattica l'impostazione ora menzionata di geometria reticolare; ad esso abbiamo fatto seguire una nostra indagine sulla presentazione del principale risultato di Pick nella scuola secondaria superiore.

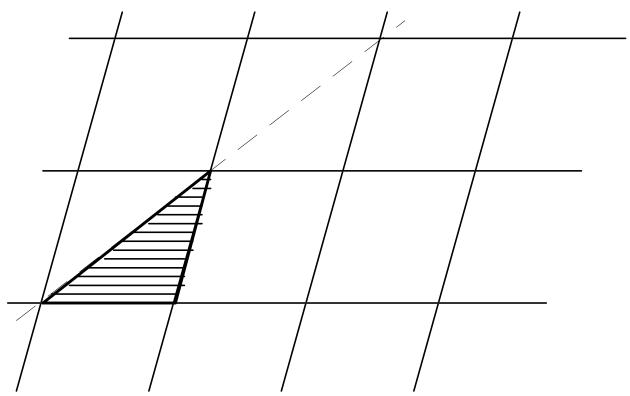
1. L'ARTICOLO ORIGINALE DI GEORG PICK (1899)

1.1. I RETICOLI E I POLIGONI RETICOLARI

L'articolo di Pick in cui sono esposte le considerazioni fondamentali di geometria reticolare si intitola *Geometriches zur Zahlenlehre* (*La geometria per la teoria dei numeri*); è il resoconto di una conferenza tenuta dall'Autore presso la Società Matematica Tedesca di Praga e venne pubblicato a Praga nel 1899 [Pick, 1899]. Così esordisce Pick in tale articolo:

"A partire da Gauss, i reticoli a forma di parallelogramma nel piano... sono stati più volte utilizzati... come metodo euristico nella teoria dei numeri. A confronto di tutte queste applicazioni, le prossime righe perseguono uno scopo molto più modesto: sarà fatto il tentativo di porre le basi della teoria dei numeri in modo nuovo e, fin dal principio, su basi geometriche. Per questo scopo è necessaria una formula per calcolare l'area dei poligoni tracciati in un reticolo rimasta fino ad oggi inosservata a dispetto, come si potrà vedere, della sua semplicità" [Pick, 1899, p. 311].

Pick introduce il *reticolo* come "due sistemi di rette parallele equidistanti nel piano", dette *rette reticolari principali*; le intersezioni di tali rette sono denominate *punti reticolari* [Pick, 1899, p. 311]; tutte le rette passanti per più di un punto reticolare sono dette *rette* reticolari. Egli suggerisce inoltre di utilizzare come unità di misura di superficie "la metà di ogni singola maglia-parallelogramma del reticolo" [Pick, 1899, p. 312].



Un poligono avente tutti i vertici coincidenti con punti reticolari si dice *poligono reticolare*. Per quanto sopra definito, tutti i lati di un poligono reticolare appartengono a rette reticolari [Pick, 1899, p. 312].

Pick suggerisce di scomporre un poligono reticolare in due poligoni mediante una retta reticolare passante per due punti reticolari appartenenti al perimetro. Si indichi con i il numero dei punti reticolari all'interno del poligono inizialmente considerato, con u il numero dei punti reticolari appartenenti al suo perimetro, e con i_1, u_1, i_2, u_2 i numeri dei punti reticolari corrispondenti dei due nuovi poligoni ottenuti; si indichi inoltre con δ il numero dei punti reticolari appartenenti al segmento di retta reticolare che divide il poligono originale nelle due parti.

Risulta allora:

$$i = i_1+i_2+\delta \qquad\qquad u = u_1+u_2-2\delta-2$$

Da ciò segue:

$$2i+u-2 = (2i_1+u_1-2) + (2i_2+u_2-2)$$

Pick indica l'espressione $(2i+u-2)$ come *numero di punti* del poligono considerato [Pick, 1899, pp. 312-313].

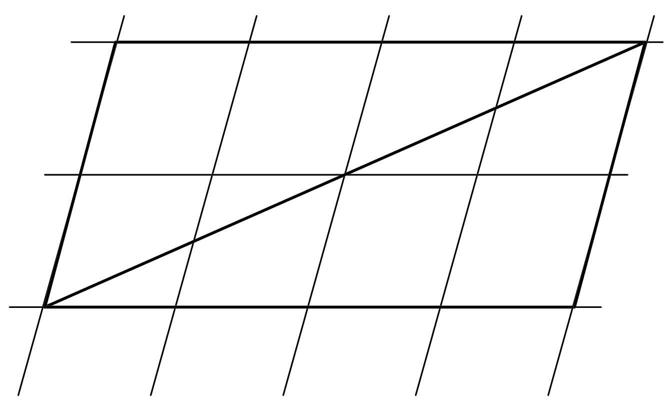
Da quanto sopra esposto, emerge che "il numero di punti di un poligono costituito da due parti è uguale alla somma dei numeri di punti delle singole parti. Una ripetuta applicazione di questo risultato mostra che esso è accettabile anche per un numero qualsivoglia di parti" [Pick, 1899, p. 313].

Il numero di punti di un poligono reticolare ha un'importante interpretazione geometrica: Pick afferma che "per ogni poligono reticolare l'area è uguale al suo numero di punti" [Pick, 1899, p. 314] (essendo l'area calcolata rispetto all'unità di misura di superficie precedentemente scelta, ovvero alla metà di ogni singola maglia del reticolo).

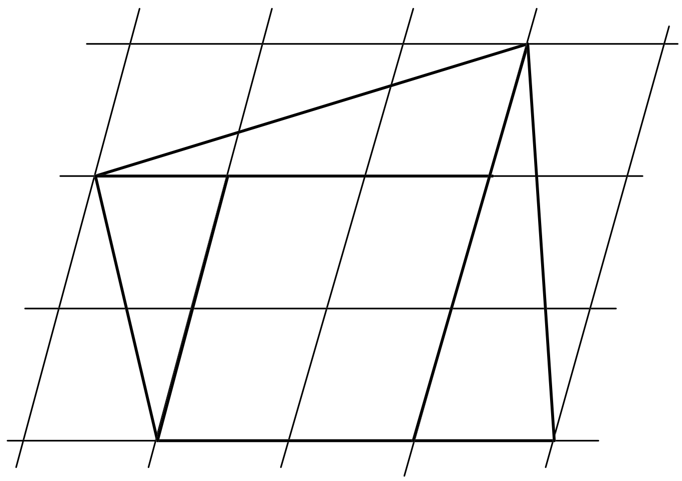
Per dimostrare ciò, Pick nota innanzitutto che il risultato in esame vale nel caso di un poligono costituito da una sola maglia:

$$i = 0 \ \wedge \ u = 4 \qquad \text{da cui il numero di punti:} \qquad 2i+u-2 = 2$$

Anche per un poligono limitato esclusivamente da segmenti appartenenti a rette reticolari principali il risultato precedente vale "in base alla citata proprietà di composizione" [Pick, 1899, p. 313].



Inoltre, se suddividiamo un parallelogramma avente il perimetro interamente appartenente a rette reticolari principali in due triangoli congruenti aventi in comune una diagonale (e la congruenza di tali triangoli implica anche la congruenza dei rispettivi insiemi di punti reticolari ad essi appartenenti), il numero di punti di ciascuno di essi viene ad essere la metà di quello del parallelogramma; dunque, anche in questo caso il numero di punti ha il valore dell'area.



Osserva infine Pick che un qualsiasi poligono reticolare può essere scomposto in parallelogrammi con il perimetro interamente appartenente a rette reticolari principali ed in triangoli ottenuti dimezzando un parallelogramma di questo genere mediante una diagonale. Da ciò segue che per ogni poligono reticolare l'area risulta uguale al numero di punti [Pick, 1899, p. 314].

1.2. RETICOLI E TEORIA DEI NUMERI

Nel secondo paragrafo del citato articolo di Georg Pick è ricordata una clasica proposizione della teoria dei numeri:

"Al vertice della teoria dei numeri interi vi è la proporzione secondo la quale due numeri [interi] a, b possiedono sempre una parte comune m che è rappresentabile nella forma $m = a\beta - b\alpha$, dove anche α e β sono numeri interi" [Pick, 1899, p. 314].

La dimostrazione del risultato ricordato dà occasione a Pick di introdurre un sistema di coordinate parallele nel piano tale che i punti con coordinate intere siano i punti reticolari del reticolo fissato nel piano stesso e le rette reticolari siano parallele agli assi (osserva Pick in nota: 'È tuttavia del tutto superfluo misurare entrambi gli assi con la stessa unità di misura" [Pick, 1899, p. 314]).

Si consideri il segmento avente per estremi l'origine ed il punto (a; b): se ad esso appartengono (m–1) punti reticolari, essendo m un intero positivo, allora tale segmento risulta diviso in m parti congruenti da tali punti.

L'intero m è divisore sia di a che di b: per provare ciò è sufficiente condurre dagli (m–1) punti reticolari e dal punto (a; b) le rette parallele agli assi, che incontrano gli assi stessi in punti reticolari.

Pick suggerisce ora di considerare un punto reticolare (α_0; β_0) "in modo qualsiasi, ma per evitare ambiguità tale che il triangolo (0; 0), (a; b), (α_0; β_0) abbia senso di rotazione positivo" [Pick, 1899, p. 314]. Applicando la formula precedentemente dimostrata, possiamo affermare che tale triangolo ha area:

$$a\beta_0 - b\alpha_0$$

Al perimetro di tale triangolo appartengono almeno (m+2) punti reticolari: il vertice (α_0; β_0) e (m+1) punti reticolari appartenenti al segmento di estremi (0; 0) e (a; b).

La costruzione del triangolo può essere ripetuta scegliendo come vertice esterno al segmento di estremi (0; 0) e (a; b) un punto reticolare (α_1; β_1) che si trovi "sul suo bordo o all'interno [del triangolo inizialmente considerato]" [Pick, 1899, p. 315]. Così facendo, si ottiene un triangolo "più piccolo del precedente, e può chiaramente essere rimpicciolito ancora, finché in esso non siano contenuti più degli (m+2) punti reticolari necessari" [Pick, 1899, p. 315].

Essendo finito il numero dei punti reticolari appartenenti ad una parte limitata di piano, dopo un numero finito di passi si giunge "ad un triangolo con il vertice (α; β), che ora possiede sul suo bordo solo [quegli] (m+2) punti reticolari necessari e nessuno di essi al suo interno, la cui area è uguale a m" [Pick, 1899, p. 315]. Ricordando ancora l'espressione dell'area, risulta dunque:

$$a\beta - b\alpha = m$$

L'articolo di Georg Pick riporta anche alcune considerazioni su problemi di approssimazione [Pick, 1899, pp. 315-317]; segnala infine che la formula per il calcolo dell'area di un poligono convesso può essere estesa alla considerazione di parti di piano non connesse [Pick, 1899, pp. 318-319].

2. IL PIANO DI PICK: UN'ESPERIENZA DIDATTICA

2.1. L'AREA DI UN POLIGONO RETICOLARE

Riteniamo che il più semplice risultato di geometria reticolare, per quanto riguarda l'applicabilità alla didattica della scuola secondaria superiore, sia la formula che consente di calcolare l'area di un poligono reticolare (ovvero avente tutti i vertici coincidenti con punti reticolari) non intrecciato e non degenere (ovvero tale da non ridursi ad un segmento), rispetto all'area di una maglia del reticolo. In generale si considera il reticolo costituito da due sistemi di rette parallele equidistanti e mutuamente perpendicolari. Tale formula è:

Area di un poligono reticolare non intrecciato e non degenere (calcolata rispetto all'area di una maglia del reticolo) =

$$= \frac{1}{2}\cdot(2i+u-2) = i+\frac{u}{2}-1$$

Abbiamo proposto ad alcuni allievi della scuola secondaria superiore di ricavare tale formula. Le caratteristiche ed i risultati della nostra ricerca sono riportati nei paragrafi seguenti.

2.2. METODOLOGIA DELLA RICERCA

L'analisi del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando una classe di IV liceo scientifico, a Treviso, per un totale di 24 allievi. Essi sono stati innanzitutto invitati a ricavare la formula precedentemente menzionata; successivamente gli allievi sono stati intervistati sulle soluzioni proposte.

Al momento del test erano stati introdotti i termini: *reticolo*; *maglia*; *punto reticolare*; *poligono reticolare*; *poligono non intrecciato*; *poligono non degenere* (le maglie sono considerate quadrate). A ciascun allievo è stato sottoposto il seguente test, senza alcuna indicazione sui procedimenti risolutivi da impiegare:

Determinare una formula per calcolare l'area di un poligono reticolare non intrecciato non degenere (calcolata rispetto all'area di una maglia del reticolo) sulla base della valutazione del numero i dei punti reticolari all'interno del poligono e del numero u dei punti reticolari appartenenti al suo perimetro.

Il tempo accordato per la risoluzione è stato di 30 minuti.

2.3. RISULTATI DEL TEST E PRIME CONSIDERAZIONI

Solo 4 allievi su 24 (Andrea, Guido, Martino e Nicoletta) hanno ricavato la formula corretta per determinare l'area di un poligono reticolare non intrecciato e non degenere. Gli altri hanno consegnato il foglio con alcuni tentativi, ovvero con la rappresentazione di casi particolari.

Come vedremo esaminando le interviste, gli allievi che hanno indicato la formula corretta non hanno proposto di essa una dimostrazione "classica", completa; in particolare, l'approccio al problema è stato quasi sempre basato sull'esame di singoli casi, dai quali, mediante osservazioni e supposizioni, è stata ricavata la formula.

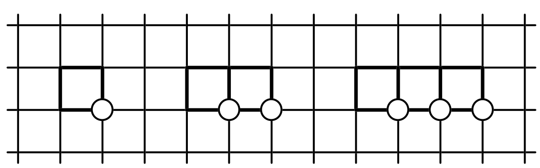
2.4. INTERVISTE CON GLI ALLIEVI

Gli allievi che hanno determinato la formula richiesta sono stati invitati a giustificare le loro affermazioni e ad indicare i procedimenti seguiti. La netta maggioranza degli altri allievi, ovvero di quelli che non hanno ottenuto la soluzione, ha ammesso di avere esaminato molti casi particolari senza tuttavia giungere ad intuire la formula generale cercata.

2.4.1. Andrea

Il colloquio con Andrea è stato certamente interessante; riteniamo opportuno riportarne ampi brani:

Andrea: "Ho pensato che la formula da trovare fosse di primo grado".
Intervistatore: "Perché proprio di primo grado?"
Andrea: "Mi è sembrato logico cominciare dal caso più semplice. E poi se associamo ad ogni punto un quadratino, ad esempio quello che si trova in alto a sinistra, si vede che più crescono i punti più cresce l'area. Naturalmente con le opportune correzioni, perché si vede subito che la formula A = u+i non va bene".

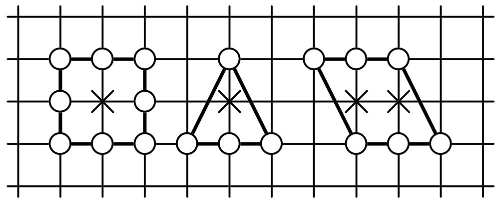


(Andrea disegna i rettangoli evidenziando le maglie ed i punti reticolari sul perimetro).

Andrea: "Quando ho capito che la formula A = u+i non era quella giusta, ho pensato di cercare una formula un po' più complicata, ma sempre di primo grado. Ho pensato ad una formula del tipo:

$$A = a\cdot u+b\cdot i+c$$

con a, b, c numeri opportuni. Ho pensato di ricavare a, b, c con un sistema. Ho preso tre figure semplici".



(Andrea disegna i rettangoli evidenziando i punti reticolari sul perimetro ed i punti reticolari interni).

Intervistatore: “Perché hai scelto proprio quelle tre figure?”
Andrea: “Ho cercato di considerare figure abbastanza semplici che abbiano però anche dei punti interni. Il quadratino [costituito da una sola maglia del reticolo] per esempio non ha punti interni e non so se vada bene. Sostituendo i numeri dei punti sul perimetro, dei punti interni e le aree nell’equazione, ho trovato:

$$\begin{cases} 8a + b + c = 4 \\ 4a + b + c = 2 \\ 6a + 2b + c = 4 \end{cases}$$

Ho risolto il sistema ed ho trovato:

$$a = \frac{1}{2}; \qquad b = 1; \qquad c = -1$$

Dunque la formula è:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}u + i - 1$$

Poi per sicurezza ho fatto delle verifiche con altri poligoni e ho visto che questa formula va bene”.
Intervistatore: “Perché hai ritenuto opportuno fare ancora delle verifiche?”
Andrea: “Per controllare. Avrei potuto sbagliare i calcoli” .
Intervistatore: “A parte i calcoli, sei sicuro del tuo procedimento?”
Andrea: “Sì. In fondo si tratta di un sistema. Lo abbiamo fatto tante volte”.
Intervistatore: “Però hai supposto che la formula fosse una relazione di primo grado in *u* ed in *i*. Di questo non potevi essere sicuro”.

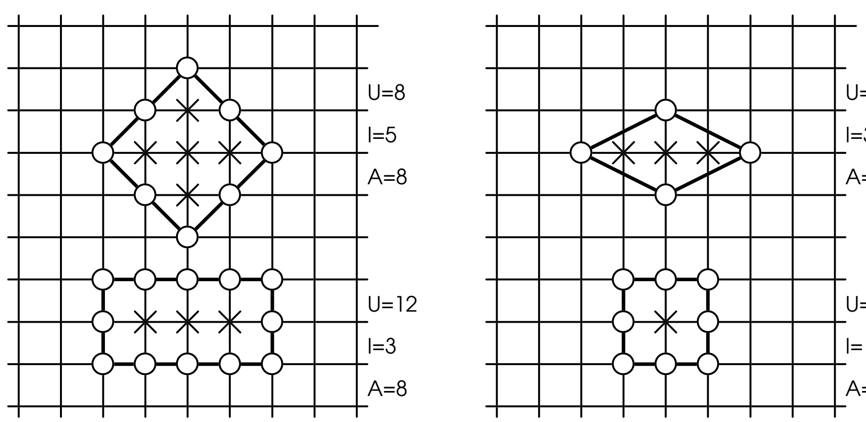
Andrea: ‘D’accordo, ma che la formula dipendesse da *u* e da *i* lo sapevo dal testo ed ho intuito che fosse di primo grado. La formula, così, funziona”.

Analizzeremo le affermazioni di Andrea nella sezione seguente; anticipiamo però che gli elementi più interessanti del procedimento descritto dall’allievo possono essere collegati al tentativo diretto di ricavare la formula richiesta, ovvero senza basarsi sulla preventiva considerazione di molti casi particolari; solo dopo avere supposto che la formula sia di primo grado (supposizione, come vedremo, assai significativa), l’allievo esamina alcuni semplici poligoni per ricavare i coefficienti della formula ipotizzata.

2.4.2. Martino

Anche il colloquio con Martino è stato interessante; riteniamo opportuno riportarne ampi brani:

Martino: ‘Ho pensato di lavorare su queste due coppie di figure, che hanno la stessa area ma diverso numero di punti sul perimetro e di punti interni”.



(Martino disegna i poligoni evidenziando i punti reticolari sul perimetro ed i punti reticolari interni. Scrive i numeri nell’ordine in cui sono sopra riportati).

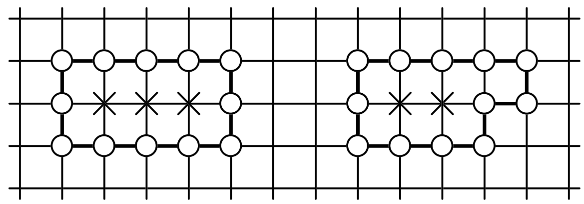
Martino: “All’inizio non sapevo bene cosa fare e sono andato un p o’ per tentativi”.

Intervistatore: ‘Perché due coppie di poligoni con la stessa area?”

Martino: ‘Ho pensato che questa scelta mi vincolasse di più, mi facesse evitare i casi particolari; insomma mi facesse trovare una formula più generale”.

Intervistatore: ‘Poi come hai ragionato?”

Martino: "Ho notato che il numero di punti reticolari sul perimetro è, in questi casi, addirittura più grande delle aree. Questo mi ha fatto venire l'idea di contarlo per metà. Inoltre ho pensato che, ad esempio nel rettangolo con una sola fila di punti interni, ad ogni punto interno corrispondono due punti sul perimetro, sopra e sotto. Mi è quindi sembrata buona l'idea di dividere per due il numero dei punti sul perimetro. Poi ho considerato un altro fatto".



(Martino disegna i rettangoli evidenziando i punti reticolari sul perimetro ed i punti reticolari interni. Non scrive alcun numero).

Martino: "Da questi disegni mi sembra che l'area dipenda direttamente dal numero dei punti interni: ho diminuito di uno i punti interni lasciando uguale il numero dei punti sul perimetro e l'area è diminuita di 1. Allora ho pensato: l'area potrebbe dipendere dai punti interni, contati tutti, e dai punti sul perimetro, contati per metà. Ho fatto le prove su tutti i poligoni, ma ottenevo sempre un valore più grande di 1. La formula giusta poteva quindi essere proprio $i+\frac{u}{2}-1$. Alla fine ho verificato questa formula con altre figure, e andava sempre bene".

Anche le affermazioni di Martino saranno esaminate nella sezione seguente; notiamo sin d'ora che esse sono basate sulla considerazione di poligoni equiestesi mediante i quali studiare le diverse combinazioni di punti reticolari interni e sul perimetro che portano ad uno stesso valore dell'area. Interessante, come vedremo, è l'esplicita preoccupazione di evitare i casi particolari.

2.4.3. Guido e Nicoletta

Gli altri due allievi che hanno individuato la formula richiesta affermano di avere intuito la formula richiesta basandosi sull'esame di un elevato numero di casi. In particolare, Guido ricorda di avere esaminato prima alcune figure (rettangoli e triangoli) prive di punti interni:

Guido: "Ho disegnato molti poligoni, e tutti possono essere divisi in triangoli ed in rettangoli. Ho pensato che era bene esaminare alcuni casi di triangoli e di rettangoli. Mi sono occupato di triangoli e di rettangoli senza punti interni ed ho visto che l'area era sempre la metà dei punti sul perimetro meno 1. Ho poi esaminato rettangoli e triangoli con qualche punto interno ed ho capito che bisognava aggiungere il numero dei punti interni".

Invece Nicoletta non opera alcuna scelta preventiva sulle figure da esaminare:

Nicoletta: "Ho provato con molti casi ed ho fatto una tabella con i numeri dei punti sul perimetro, dei punti interni e delle aree. Ho visto che la metà del primo numero più il secondo superava sempre il terzo di 1, e così ho capito qual era la formula".

2.5. ANALISI DELLE INTERVISTE E CONCLUSIONI

Dalle interviste emergono alcuni elementi interessanti, che riassumiamo:

- Andrea è l'unico che si appresta a cercare la formula senza avere preventivamente esaminato alcuni casi particolari (potremmo dire che la risoluzione di Andrea riserva poco spazio a fasi analoghe all'*incubazione* ed al *bricolage* di Glaeser [D'Amore, 1993]). Tutti gli altri allievi, anche coloro i quali non hanno ottenuto la formula cercata, iniziano la propria ricerca esaminando un numero più o meno elevato di situazioni particolari.

- La supposizione di Andrea secondo la quale la formula da trovare può essere espressa da una relazione di primo grado ci sembra rilevante. Tale supposizione, nell'opinione di Andrea (che afferma: "Mi è sembrato logico cominciare dal caso più semplice"), è inizialmente motivata da questioni di elementarità: l'allievo ritiene di iniziare la propria ricerca esaminando la possibilità più direttamente verificabile. Solo in un secondo momento egli propone una spiegazione di tale opzione basata su (intuitive) considerazioni geometriche: forse il *contratto didattico* impone ad Andrea di fornire una motivazione più "matematica" ad una scelta inizialmente ritenuta... spontanea.

- Il procedimento di Andrea, una volta effettuata l'implicita posizione riguardante il grado della formula da trovare, è piuttosto chiaro e sicuro. Si noti che l'allievo (il quale sa di dover trovare una formula dipendente dal numero u dei punti sul perimetro e dal numero i dei punti interni) sceglie di esaminare poligoni "abbastanza semplici che abbiano però anche dei punti interni", quasi a rendere più diretta la dipendenza dell'area da *entrambi* i numeri di punti (u ed i) indicati dal quesito proposto.

- Nel procedimento di Martino è evidente l'idea base di considerare poligoni equiestesi per studiare le diverse combinazioni di numeri di punti reticolari sul perimetro e di punti reticolari interni corrispondenti ad una stessa area; l'esplicita preoccupazione di "evitare i casi particolari" può forse essere ricondotta al *contratto didattico*. Interessante è l'osservazione della diversa incidenza del numero dei punti reticolari sul perimetro e del numero dei punti reticolari interni. Notiamo tuttavia che nemmeno la deduzione di Martino è sorretta da una dimostrazione "classica": si tratta di un procedimento di analisi di alcuni casi mirati, il cui raffronto consente di intuire il risultato richiesto.

- Interessante è l'affermazione di Guido, che sente la necessità di giustificare la propria scelta iniziale di occuparsi di rettangoli e di triangoli notando che per quanto riguarda i poligoni da lui stesso disegnati "tutti possono essere divisi in triangoli ed in rettangoli" (un'analoga osservazione è presente nell'articolo di Pick); in realtà questa caratteristica non verrà sfruttata dallo stesso Guido nel ricavo della formula (l'elemento centrale verrà ad essere l'esame preventivo di poligoni... senza punti interni), ma l'allievo si sente ugualmente obbligato (dal *contratto didattico*) a giustificare la propria scelta.

Possiamo concludere rilevando innanzitutto che le questioni di geometria reticolare confermano la propria importanza in ambito didattico e danno la possibilità agli allievi di confrontarsi con richieste stimolanti e, per molti, inedite.

Assai interessante è, negli allievi, l'impiego spontaneo, spesso vivace e creativo di una tecnica dimostrativa inusuale: si tratta di un metodo euristico senza dubbio lontano dai rigorosi procedimenti deduttivi, ma che non per questo può essere considerato scorretto o didatticamente di trascurabile portata. L'allievo appare indotto ad affrontare il problema proposto dopo avere sperimentato varie possibilità, e la scelta critica di tali campi di indagine preventiva, scelta fondamentale per lo stesso esito del tentativo posto in atto, è un importante atto creativo. Il procedimento impiegato da molti allievi (talora con buon successo) non è dunque basato esclusivamente su tentativi casuali, scoordinati, bensì è incentrato sull'analisi di situazioni geometriche ben determinate; pertanto tale metodo di indagine appare sorretto da considerazioni spesso chiare e consapevoli, talvolta da supposizioni non immotivate.

La visualizzazione (che viene riconosciuta elemento sempre centrale della moderna didattica [Schoenfeld, 1986] [Duval, 1993]) sembra peraltro sorreggere questo modo di operare. Il carattere visuale del problema proposto giunge implicitamente a sottolineare la possibilità di effettuare semplici tentativi mirati, immediate analisi di casi particolari da generalizzare quindi, mediante le opportune verifiche, in considerazioni di più ampia portata.

L'autore desidera ringraziare la dott. Monica Mariotti che ha fornito la traduzione italiana di [Pick, 1899].

Note bibliografiche

[Bagni, 1990] **G.T. Bagni**, *Il piano di Pick e i numeri primi*, in: "Periodico di Matematiche", serie VI, 65, n. 3, Luciani, Roma 1990.

[D'Amore, 1993] **B. D'Amore**, *Problemi*, Franco Angeli, Milano 1993.

[Duval, 1993] **R. Duval**, *Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, in: "Annales de Didactique et de Sciences Cognitives", v. 5, IREM, Strasbourg 1993.

[Gambarelli, 1989] **G. Gambarelli**, *Su alcuni risultati di G. Stocco*, in: "Periodico di matem atiche", serie VI, 65, Luciani, Roma 1989.

[Kaldrimidou, 1995] **M. Kaldrimidou**, *Lo status della visualizzazione presso gli studenti e gli insegnanti di matematica*, in: "La matematica e la sua didattica", 1995/2, pp. 181-194, Bologna 1995.

[Pick, 1899] **G. Pick**, *Geometriches zur Zahlenlehre*, Zeitschrift für Natur-Wissenschafen, hrsg. vom Naturhistorisch. Vereine "Lotos" in Prag, Prag 1899, pp. 311-319. La traduzione dei brani riportati è di Monica Mariotti.

[Schoenfeld, 1986] **A.H. Schoenfeld**, *On having and using Geometric knowledge*, in: J. Hiebert (a cura di), "Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics", pp. 225-263, Erlbaum, Hillsdale 1986.

[Stocco, 1986] **G. Stocco**, *Proposta per una Geometria Reticolare*, in: "Periodico di Matematiche", serie VI, 62, Luciani, Roma 1986.