

“Ma un passaggio non è il risultato...”
I numeri immaginari nella pratica didattica

Giorgio T. Bagni

Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Bologna

Summary. In this paper the idea of imaginary numbers in the learning of mathematics in classroom practice is investigated, referred to Italian High School (*Liceo scientifico*, pupils aged 16-18 years). After an historical preface, the status of this concept is studied by a test. We conclude that several pupils accept the presence of imaginary numbers when they appear in the resolution of an equation, but they refuse them if they are the final result of an equation.

UNA PAGINA DI ROBERT MUSIL (1906)

«Ehi, tu l'hai capita bene poco fa?»

«Che cosa?»

«La storia dei numeri immaginari.»

«Sì. Non è poi così difficile. Bisogna solo ricordare che l'unità di calcolo è data dalla radice quadrata di meno uno.»

«Ma è proprio questo il punto. Quella radice non esiste. Qualsiasi numero, che sia negativo o positivo, elevato al quadrato dà un valore positivo. Per cui non può esserci un numero reale che sia la radice quadrata di qualcosa di negativo.»

«Giustissimo; ma perché non si dovrebbe tentare ugualmente di applicare l'operazione dell'estrazione della radice quadrata anche a un numero negativo? Naturalmente questo non potrà dare alcun valore reale, e infatti anche per questo il risultato è detto immaginario. È come se si dicesse: qui di solito si siede sempre un tale, perciò mettiamoci anche oggi una seggiola; e se anche fosse morto nel frattempo, facciamo come se venisse.»

«Ma come si può se si sa con certezza, con matematica certezza, che è impossibile?»

«Appunto, si fa come se fosse possibile. Un qualche risultato ne uscirà. In fondo, con i numeri irrazionali non è la stessa cosa? Una divisione che non finisce mai, una frazione il cui valore non risulterà mai e poi mai per quanto tu continui a calcolare. E che mi dici, poi, del fatto che due parallele si devono

incontrare all'infinito? Io credo che a essere troppo scrupolosi la matematica finirebbe per non esistere più».

«Questo è vero. Se uno se l'immagina così, è davvero bizzarra. Ma la cosa singolare è proprio che ciononostante con quei valori immaginari o comunque impossibili si possono fare calcoli perfettamente reali e raggiungere alla fine un risultato concreto!»

«Beh, per arrivare a questo i fattori immaginari devono elidersi a vicenda durante il calcolo».

«Sì, sì, tutto quello che dici lo so anch'io. Ma pure non resta un che di curioso in tutta la faccenda? Come posso spiegarmi? Prova a pensarla così: in un calcolo del genere, tu all'inizio hai dei numeri solidissimi, in grado di quantificare metri, pesi o qualsiasi altro oggetto concreto, comunque numeri reali. Alla fine del calcolo, lo stesso. Ma l'inizio e la fine sono tenuti insieme da qualcosa che non c'è. Non è un po' come un ponte che consti soltanto dei piloni iniziali e finali, e sul quale tuttavia si cammina sicuri come se fosse intero? Un calcolo del genere mi dà il capogiro; come se un pezzo del cammino andasse Dio sa dove. Ma la cosa davvero inquietante per me è la forza insita in questi calcoli, una forza capace di sorreggerti fino a farti arrivare felicemente dall'altra parte» (da *Il giovane Törless*, Musil, 1995, pp. 96-97) ⁽¹⁾.

L'INTRODUZIONE DEI NUMERI IMMAGINARI

Come rivela il dialogo tra i due protagonisti dell'opera di Musil, l'introduzione dei numeri immaginari, nella scuola secondaria, è un momento importante e delicato del curriculum. All'allievo, lungamente bersagliato da regole fisse che impediscono di estrarre la radice quadrata di un numero negativo, viene improvvisamente chiesto di accettare la presenza, nel proprio mondo matematico, di un oggetto nuovo, il preoccupante simbolo " $\sqrt{-1}$ ", al quale viene assegnata la denominazione *i*.

Questa fase può essere fonte di incoerenze nel pensiero degli studenti. La consapevolezza della situazione è necessaria per evitare il formarsi di misconcezioni; notano P. Tsamir e D. Tirosh (che citano Piaget, 1980):

“L'idea che la consapevolezza abbia un ruolo cruciale nello sviluppo cognitivo non è assolutamente nuova: il modello di equilibrio di Piaget per la crescita cognitiva, ad esempio, sottolinea l'importanza della consapevolezza” (Tsamir e Tirosh, 1997).

⁽¹⁾ L'autore ringrazia Laura Giovannoni (Mantova) per questa segnalazione.

Il problema della corretta e consapevole gestione dell'incoerenza è però delicato e profondo: è sufficiente il semplice accostamento di due affermazioni contrastanti per sviluppare nell'allievo la consapevolezza di una situazione incoerente e dunque la necessità di un radicale ripensamento per risolvere tale incoerenza? Certamente no. Così proseguono gli Autori citati:

“La presentazione di elementi incompatibili non verrebbe automaticamente percepita come incoerente dal discente... Molti ricercatori hanno rilevato che la percezione di elementi reciprocamente in conflitto non sempre comporta la percezione della situazione come problematica (Schoenfeld, 1985; Tirosh, 1990). Dal punto di vista degli studenti, le incoerenze presenti in un sistema possono essere lecite” (Tsamir e Tirosh, 1997).

Questa osservazione è importante: talvolta gli allievi non percepiscono come contraddittorie (dunque problematiche) situazioni in contrasto tra di loro; più precisamente, essi possono, in particolari casi, valutare lecite alcune posizioni in precedenza considerate inaccettabili ⁽²⁾. Nel presente lavoro desideriamo sottolineare come la presentazione degli stessi enti matematici in contesti diversi, con differenti funzioni, possa essere diversamente valutata dagli allievi. In particolare, vedremo che la considerazione di numeri immaginari può essere diversamente affrontata e valutata dagli allievi ai quali non sia stata fornita una completa introduzione del corpo complesso (analogamente a quanto succede a Törless ed a Beiner, i protagonisti del brano sopra riportato).

La presentazione storica dei primi approcci alle quantità immaginarie, inoltre, renderà possibile un paragone tra l'atteggiamento di alcuni allievi e quello dei matematici che hanno realizzato i primi procedimenti nei quali i complessi hanno avuto un ruolo chiave nella risoluzione delle equazioni.

⁽²⁾ Citiamo ancora P. Tsamir e D. Tirosh: “Molti studi rivelano che spesso gli allievi hanno idee mutuamente incoerenti, occasionalmente come risultato delle loro intuizioni primarie (Fischbein, 1987; Kahnemann, Slovic and Tversky, 1982). Spesso gli studenti ritengono ciascuna di tali incompatibili idee sicura ed autoevidente. In molti di questi casi è plausibile che solo uno specifico intervento didattico risolverà le incoerenze (Fischbein, Nello and Marino, 1991)... Negli ultimi dieci anni sono stati proposti molti approcci didattici per la risoluzione dell'incoerenza, tra i quali l'insegnamento per conflitto” (ad esempio Swan, 1983), l'insegnamento per analogia” (ad esempio Strauss and Bichler, 1988) e l'approccio all'ambiente generico” (ad esempio Tall, 1990). È stato mostrato che il metodo dell'insegnamento per conflitto, che è basato sull'elevamento della consapevolezza degli studenti delle contraddizioni nelle loro opinioni e della non legittimità di ciò in matematica, può essere efficace per rimuovere e per correggere molte misconcezioni (Tirosh and Graeber, 1990). Tuttavia, non è stata dedicata sufficiente attenzione alle reazioni degli studenti quando essi vengono messi di fronte alle negazioni delle proprie affermazioni” (Tsamir e Tirosh, 1997).

UNO SGUARDO ALLA STORIA DELL'ALGEBRA

‘Dal Ferro, e dopo di lui Tartaglia e Cardano, si spinsero oltre i confini stabiliti dagli Antichi con l’ardire dei grandi navigatori loro contemporanei che oltrepassarono le colonne d’Ercole alla ricerca di nuove terre... È dunque con l’ars magna, la grande arte dell’algebra del Cinquecento, che si può far datare la nascita della matematica moderna? Certo, Tartaglia, Cardano e il suo brillante allievo Ferrari si erano avventurati in territori sconosciuti e forse più lontano ancora si era spinto il *cittadino bolognese* Rafael Bombelli, trovando le regole per operare con quelle quantità *silvestri*, i numeri immaginari, che facevano la loro comparsa nel *caso irriducibile*’.

Umberto Bottazzini (1990)

Il Cinquecento e la risoluzione delle equazioni di grado superiore al secondo

La risoluzione delle equazioni di terzo e di quarto grado è fatta risalire a due studiosi italiani del Rinascimento: Gerolamo Cardano, che scrisse *Ars Magna* (1545) e Nicolò Fontana, detto Tartaglia (1500-1557), autore di *Quesiti et invenzioni diverse* (1546) (Franci e Toti Rigatelli, 1979).

La contesa tra Cardano e Tartaglia per la priorità della scoperta del procedimento risolutivo per le equazioni di terzo grado è rimasta celebre; osserviamo però che il primo a trovare una tecnica risolutiva per tali equazioni fu (nel 1515) il bolognese Scipione del Ferro (1465-1526), il quale morì senza rendere pubblica la propria scoperta (Maracchia, 1979, p. 18) (Bottazzini, 1990, p. 3) ⁽³⁾.

⁽³⁾ Ricordiamo che la ricerca matematica del tempo non considerava direttamente eventuali radici negative: ‘Partendo da una mentalità geometrica... sarà estremamente difficile accettare le soluzioni negative che ancora Bombelli, che pure aveva creato un’aritmetica dei numeri complessi per superare il famoso *caso irriducibile*, chiamerà *false* o *finte*. Questa limitazione non sarà un piccolo ostacolo posto sulla strada dell’indipendenza dell’algebra; ma quando anche questo sarà superato, potremo dire di aver completato lo sviluppo storico dell’algebra e di aver assistito alla sua completa emancipazione. A questo proposito facciamo osservare che già Cardano accetta in un certo senso questi numeri *ficti* (falsi), tanto che in un esempio si serve di essi per giungere ai risultati *veri* di una equazione di terzo grado. Bombelli poi dirà esplicitamente che, pur ottenendosi valori negativi, non per questo la regola risolutiva sarà meno buona: *Et ove dico cavasi il tale dal tale, et che sia maggiore quello che si ha da cavare: però non resta, che la regola non sia buona: perché [per il fatto che] quello che resterà sarà meno*’ (Maracchia, 1979).

In effetti Cardano, del Ferro e Tartaglia contribuirono tutti, in modi diversi ma certamente significativi, alla messa a punto del procedimento risolutivo dell'equazione di terzo grado. Storicamente interessante è la poesia in cui Tartaglia volle riassumere il proprio metodo per la risoluzione (il cenno interpretativo fornito è in notazione moderna) (Carruccio, 1971; Bagni, 1996):

‘Quando che ‘l cubo con le cose appresso	
Se agguaglia à qualche numero discreto	$x^3+px = q$
Trovan dui altri differenti in esso.	
Da poi terrai questo per consueto	$q = u-v$
Che ‘l lor prodotto sempre sia uguale	
Al terzo cubo delle cose neto,	$uv = (p/3)^3$
El residuo poi suo generale	
Delli lor lati cubi ben sottratti	
Varrà la tua cosa principale” (4).	$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

Dunque la determinazione di u e di v è sufficiente per giungere alla radice x , e ciò può essere ottenuto attraverso le tecniche (note) per la risoluzione delle equazioni di secondo grado (Bottazzini, Freguglia e Toti Rigatelli, 1992, pp. 178-179). Riportiamo un esempio di applicazione del procedimento che, come vedremo, si rivelerà assai importante per la ricerca didattica in esame.

Si voglia risolvere (in \mathbf{R}) l'equazione:

$$x^3+6x = 20$$

Si pone:

$$20 = u-v \quad \text{essendo:} \quad uv = 8$$

Risulta quindi, risolvendo il sistema:

(4) Così prosegue la poesia di Tartaglia:

‘In el secondo de codesti atti	El terzo poi de questi nostri conti
Quando che ‘l cubo restasse lui solo	Se solve col secondo se ben guardi
Tu osserverai quast’altri contratti,	Che per natura son quasi congionti.
Del numero farai due part’à volo	Questi trovai, et non con passi tardi
Che l’una in l’altra si produca schietto	Nel mille cinquecente, quatro et trenta
El terzo cubo delle cose in stolo	Con fondamenti ben saldi e gagliardi
Dalla qual poi, per commun precetto	Nella città dal mare intorno centa”.
Torrai li lati cubi insieme gionti	(Maracchia, 1979, pp. 24-25).
Et cotal somma sarà il tuo concetto.	

$$u = 6\sqrt{3} + 10$$

$$v = 6\sqrt{3} - 10$$

ed infine:

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$$

La semplificazione dei radicali doppi così ottenuti porta alla radice cercata:

$$x = 2$$

Quest'ultima semplificazione fu approfonditamente studiata da Rafael (Raffaele) Bombelli (1526-1573) (Maracchia, 1979, p. 41). Nel prossimo paragrafo descriveremo una versione dovuta a Bombelli del procedimento introdotto: tale versione sarà direttamente impiegata nella ricerca didattica.

L'Algebra di Bombelli e l'uso di numeri non reali

“Il Cinquecento italiano, saturo di coltura classica, raccoglie i frutti di una lunga maturazione delle idee, con le scoperte dei grandi algebristi appartenenti in massima parte alla scuola bolognese”.

Federigo Enriques (1938)

“Accetti dunque il Lettore con animo libero da ogni passione l'opera mia, e cerchi farsene intendente, che vedrà di quanto giovamento gli sarà, avisandolo però che se egli capace non sarà della parte minore della Aritmetica, non si ponghi a questa impresa di volere apprendere l'Algebra, perché getterebbe il tempo”.

Rafael Bombelli (1572)

Rafael Bombelli, bolognese, è uno dei grandi protagonisti della storia dell'algebra. Il titolo completo del suo capolavoro è *Algebra, divisa in tre libri, con la quale ciascuno da sé potrà venire in perfetta cognitione della teoria dell'Aritmetica*. Il trattato fu pubblicato in due edizioni (identiche: si tratta in effetti di due successive distribuzioni della stessa opera stampata) nel 1572 e nel 1579 (si veda: Bombelli, 1966). Scrive G. Loria presentando l'opera di Bombelli:

“Nelle ultime pagine del suo I libro egli fa compiere all'algebra un mirabile sbalzo in avanti, assurgendo al livello di creatore del calcolo con numeri complessi. A tale scopo egli introduce le locuzioni *più di meno* e *meno di meno*, per indicare le unità $+i$ e $-i$, che abbrevia nelle scritture *pdm* e *mdm*; in

conseguenza con la scrittura $x = \sqrt[3]{2+2i}$ egli rappresentò l'espressione che noi indichiamo con la scrittura $\sqrt[3]{2+2i}$. Per operare mediante i nuovi enti aritmetici stabilisce un certo numero di regole fondamentali, le quali non differiscono da quelle che oggi noi esprimiamo con le formole seguenti:

$$\begin{array}{ll} (\pm 1) \cdot i = \pm i & (\pm 1) \cdot (-i) = \mp i \\ (+i) \cdot (+i) = -1 & (+i) \cdot (-i) = 1 \\ (-i) \cdot (+i) = 1 & (-i) \cdot (-i) = -1 \end{array} \text{ (Loria, 1929-1933, pp. 316-317).}$$

Il ruolo di Bombelli fu decisivo nella risoluzione delle equazioni di terzo grado, in particolare per quanto concerne la semplificazione dei radicali doppi; per il nostro studio, rilevante è la presenza, nell'*Algebra*, di equazioni di terzo grado che, se risolte con il procedimento di Cardano, di del Ferro e di Tartaglia, portano a radicali con quantità non reali (D'Amore e Oliva, 1993, p. 228; si osservi che anche Cardano, "pur ricorrendo a una certa cautela verbale", aveva preso in considerazione situazioni di questo tipo: Bourbaki, 1963, p. 91); ad esempio, la risoluzione dell'equazione modernamente scritta:

$$x^3 - 15x = 4 \quad \text{ovvero:} \quad x^3 - 15x - 4 = 0$$

si conclude con la somma di radicali doppi (aventi radicando non reale):

$$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$

Si prova, sviluppando i cubi dei binomi, che è possibile scrivere $2+11i = (2+i)^3$ e $2-11i = (2-i)^3$; dunque la soluzione in \mathbf{R} dell'equazione proposta è:

$$x = (2+i) + (2-i) = 4$$

METODOLOGIA DELLA RICERCA

Il procedimento precedente non si svolge interamente nell'ambito dei numeri reali: il risultato infine ottenuto, tuttavia, è reale, come reali sono tutti i coefficienti dell'equazione assegnata. Una verifica diretta della soluzione $x = 2$ nell'equazione assegnata (che porta all'identità in \mathbf{R} : $4^3 - 15 \cdot 4 = 4$) è dunque possibile senza uscire dall'ambito dei reali (⁵).

Diversa è la situazione dell'equazione:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{ovvero:} \quad x^2 = -1 \quad \text{da cui:} \quad x = \pm i$$

⁽⁵⁾ A questo punto, il lettore è invitato a rileggere il brano di R. Musil riportato nel primo paragrafo del presente articolo.

Il ruolo dei numeri immaginari i e $-i$, in quest'ultimo caso, appare molto rilevante: il risultato stesso dell'equazione assegnata (a coefficienti reali) è non reale e la sua accettazione (ad esempio, dopo una verifica diretta) richiede esplicitamente la conoscenza dei numeri immaginari.

Quale importanza didattica è collegata a queste due diverse situazioni? L'approccio (intuitivo) degli allievi ai numeri immaginari può dipendere dal ruolo da loro assunto nei vari procedimenti?

L'analisi del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando due classi di 3^a Liceo Scientifico (allievi di 16-17 anni), per un totale di 50 allievi e due classi di 4^a Liceo scientifico (allievi di 17-18 anni) a Treviso, per un totale di 47 allievi. In totale, quindi, sono stati coinvolti 97 allievi. A tutti gli allievi è stato sottoposto un test. In tutte le classi, al momento del test, agli allievi erano state proposte le risoluzioni di equazioni di secondo grado e di equazioni trinomie riconducibili ad equazioni di secondo grado mediante opportune posizioni (del tipo $x^n = t$), ma *non* erano stati introdotti i numeri immaginari.

A ciascun allievo è stata fornita la scheda seguente:

Scheda A

In un antico libro troviamo la seguente risoluzione dell'equazione:

$$x^2 = -1$$

Pensando che il quadrato di $\sqrt{-1}$ sia -1 , le soluzioni dell'equazione sono:

$$x = \sqrt{-1} \quad \text{oppure} \quad x = -\sqrt{-1}$$

Ritieni accettabile la risoluzione precedentemente descritta?

Scrivi la tua risposta sul foglio allegato.

Agli allievi sono stati concessi 10 minuti per annotare le proprie osservazioni.

Dopo avere ritirato la scheda A, a ciascun allievo è stata fornita la scheda B:

Scheda B

In un antico libro troviamo la seguente risoluzione dell'equazione:

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

Pensiamo di scrivere una sua soluzione x nel modo seguente:

$$x = a - b \quad \text{(prima posizione)}$$

Sostituiamo questa espressione nel testo dell'equazione ed otteniamo:

$$(a-b)^3 - 15(a-b) - 4 = 0$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 15(a-b) - 4 = 0$$

$$a^3 - 3ab(a-b) - 15(a-b) - b^3 - 4 = 0$$

$$a^3 - (a-b)(3ab+15) - b^3 - 4 = 0$$

Se richiediamo che sia: $3ab+15 = 0$, ovvero se poniamo:

$$ab = -5 \quad \text{ovvero:} \quad b = -5/a \quad (\text{seconda posizione})$$

otteniamo l'equazione:

$$a^3 - (-5/a)^3 - 4 = 0$$

$$a^6 - 4a^3 + 125 = 0$$

Si tratta di un'equazione trinomia, che ponendo $a^3 = t$ può essere scritta:

$$t^2 - 4t + 125 = 0$$

Risolviendo (con la formula risolutiva delle equazioni di II grado), risulta:

$$t = 2 + \sqrt{4 - 125} = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{o} \quad t = 2 - \sqrt{4 - 125} = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Consideriamo il primo valore di t ; otteniamo per a :

$$a = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Sviluppiamo ora il cubo seguente (pensando che il quadrato di $\sqrt{-1}$ sia -1):

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 = \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Dunque per a possiamo scrivere:

$$a = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} = 2 + \sqrt{-1}$$

Ricordando la seconda posizione e razionalizzando, otteniamo:

$$\begin{aligned} b = -5/a &= -\frac{5}{2 + \sqrt{-1}} = -\frac{5(2 - \sqrt{-1})}{(2 + \sqrt{-1})(2 - \sqrt{-1})} = -\frac{5(2 - \sqrt{-1})}{2^2 - (\sqrt{-1})^2} = \\ &= -\frac{5(2 - \sqrt{-1})}{4 + 1} = -2 + \sqrt{-1} \end{aligned}$$

Ricordando la prima posizione, una soluzione dell'equazione proposta è:

$$x = a - b = (2 + \sqrt{-1}) - (-2 + \sqrt{-1}) = 4$$

Verifichiamola sostituendo direttamente nel testo; il primo membro risulta:

$$4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 0$$

ed è dunque uguale al secondo. La soluzione $x = 4$ è pertanto verificata.

Ritieni accettabile la risoluzione precedentemente descritta?

Scrivi la tua risposta sul foglio allegato.

Agli allievi sono stati concessi 20 minuti per annotare le proprie osservazioni.

RISULTATI DEL TEST

Le risposte degli allievi sono state suddivise nelle seguenti categorie:

Scheda A

Tipologia di risposte	Allievi	Percentuale
“Accettabile”	2	2 %
“Non accettabile”	89	92 %
Incerti	6	6 %

Scheda B

Tipologia di risposte	Allievi	Percentuale
“Accettabile”	52	54 %
“Non accettabile”	34	35 %
Incerti	11	11 %

PRIME CONSIDERAZIONI SUI RISULTATI

I risultati del test, descritti nel paragrafo precedente, e l'analisi dei protocolli suggeriscono le seguenti considerazioni.

- L'estrazione della radice quadrata di un numero negativo è vista come impossibile dalla quasi totalità degli studenti. La presenza di $\sqrt{-1}$ nel risultato di un'equazione non è dunque accettata.
- La presenza di $\sqrt{-1}$ nel corso del procedimento risolutivo di un'equazione, ma non nel risultato, è accettata da una parte degli allievi. Questo atteggiamento viene dunque ad essere chiaramente analogo all'accostamento che, nella storia della disciplina, i matematici hanno inizialmente avuto nei confronti dei numeri immaginari: la considerazione dell'unità immaginaria $\sqrt{-1} = i$ non era stata, in una prima fase, direttamente determinata dalla risoluzione di equazioni di secondo grado senza soluzioni in \mathbf{R} , bensì da alcune operazioni formalmente eseguite nel corso della risoluzione di equazioni di terzo grado aventi risultato reale (Bourbaki, 1963, p. 91) ⁽⁶⁾.

⁽⁶⁾ Scrive inoltre N. Bourbaki: “Durante il XVII e XVIII secolo i matematici erano a poco a poco giunti alla convinzione che i numeri immaginari, i quali consentivano la risoluzione delle equazioni di secondo grado, permettessero anche di risolvere le equazioni algebriche di grado qualunque” (Bourbaki, 1963, p. 164).

Prima di passare ad un'analisi più completa dei risultati del test, è sembrato indispensabile prestare attenzione al commento critico fornito dagli allievi: pertanto essi sono stati intervistati (singolarmente, ma alla presenza di tutti i compagni, in aula) ed hanno fornito le spiegazioni riportate nel paragrafo seguente.

INTERVISTE CON GLI ALLIEVI

Alcuni allievi sono stati invitati a giustificare quanto scritto nel test; riteniamo interessante riportare sinteticamente alcune osservazioni espresse.

Per quanto riguarda la scheda A, gli allievi che hanno ritenuto non accettabile la soluzione $x = \pm\sqrt{-1}$ per l'equazione $x^2 = -1$ hanno fatto esplicitamente riferimento all'impossibilità di estrarre la radice quadrata di un numero negativo. Con riferimento ai due allievi che hanno reputato accettabile la soluzione, si veda la giustificazione seguente:

Carlo (classe 4^a): "Se la radice quadrata di un numero dato è intesa come il numero che elevato al quadrato dà il numero dato il numero che elevato al quadrato dà -1 dovrebbe scriversi proprio $\sqrt{-1}$. Ma in effetti non sono sicuro se questo numero ci sia, in qualche nuova teoria matematica".

Per quanto riguarda la scheda B, tra quelle degli allievi che hanno ritenuto non accettabile la risoluzione dell'equazione di terzo grado ricordiamo le giustificazioni seguenti:

Enrico (classe 3^a): "La soluzione è giusta, la potevo trovare con il metodo di Ruffini. Ma così non la posso accettare. E poi lavorando con Ruffini i calcoli sono molto più corti". (Il metodo di Ruffini è stato ricordato da altri 15 allievi).

Andrea (classe 4^a): "Mi sembra che in quel procedimento succeda come quando si fanno due errori che si compensano l'uno con l'altro. Insomma, è quasi un caso che il risultato sia giusto".

Leila (classe 3^a): "La risoluzione di quel libro è sbagliata. Quando arrivo a trovare un discriminante negativo sono obbligata a fermarmi subito: tutto ciò che viene dopo discende da un errore".

Alessia (classe 4^a): "È vero che nella risoluzione $\sqrt{-1}$ si elimina, ma questo accadrebbe se $\sqrt{-1}$ fosse un numero vero e proprio. Ad esempio, 5 e -5 si eliminano. Ma come faccio a sapere se questo accade anche per una cosa che non è un numero? Insomma: $\sqrt{-1}$, ammesso di poterlo scrivere, rispetta le

stesse regole che rispettano i numeri?” (Analoghe perplessità sono state espresse da altri 4 allievi).

Per quanto riguarda gli allievi che hanno reputato accettabile la risoluzione proposta, ricordiamo le seguenti giustificazioni:

Leonardo (classe 3^a): ‘Se penso che $\sqrt{-1}$ sia una costante, e la chiamo n , il discorso sta in piedi. Io però non so che cosa sia, e sono molto dubbioso perché so che non esiste un numero che elevato al quadrato è -1 . Ma credo di poterlo pensare come una qualche costante, che non conosco e che poi, comunque, si elimina’.

Carlo (classe 4^a): ‘Penso che sia matematicamente giusto, ma in una matematica diversa dalla nostra’.

Alessandra (classe 3^a): ‘Lo so che $\sqrt{-1}$ non si può fare, e infatti avevo detto che l’equazione della scheda A era impossibile. Ma qui $\sqrt{-1}$ compare in un passaggio, e un passaggio non è il risultato. Se nel risultato $\sqrt{-1}$ non si fosse eliminata, avrei detto senz’altro che la risoluzione era sbagliata’.

Quest’ultima osservazione appare particolarmente significativa: come avremo occasione di evidenziare nel prossimo paragrafo, il fatto che non pochi allievi si sentano autorizzati ad avere a che fare con una quantità ordinariamente... proibita come $\sqrt{-1}$ in un passaggio, ma non nel risultato può essere collegata all’importanza tradizionalmente attribuita al risultato di un esercizio rispetto ai passaggi ed ai calcoli eseguiti per ottenere tale risultato.

Interessante è infine la seguente osservazione, molto franca:

Manuel (classe 4^a): ‘Ci credo perché è scritto in un libro di matematica. Però se l’avesse fatto un mio compagno, alla lavagna, probabilmente non sarei stato d’accordo’.

Il fatto che un procedimento compaia ‘in un libro di matematica’ è dunque una garanzia sufficiente: di ciò che si trova nei libri... ci si può (ci si deve) fidare comunque.

ANALISI DELLE INTERVISTE E CONCLUSIONI

Le prime considerazioni sui risultati del test, abbinata a quanto emerso dalle interviste agli allievi, riportate nel paragrafo precedente, consentono la precisazione di alcune conclusioni.

- Osserviamo innanzitutto che gli studenti sono mediamente consapevoli della non appartenenza di $\sqrt{-1}$ a \mathbf{R} ; essendo abituati a risolvere equazioni a coefficienti reali nell'ambito del ben noto insieme \mathbf{R} (ed in particolare essendo abituati a richiedere la realtà delle soluzioni trovate), essi sono portati a reputare senz'altro impossibile un'equazione il cui risultato non sia dato da un numero reale.

- La presenza di una quantità immaginaria in un passaggio della risoluzione, invece, sembra costituire per non pochi allievi una difficoltà superabile: alcuni di essi pensano infatti, in questo caso, di poter considerare $\sqrt{-1}$ alla stregua di un simbolo numerico, senza analizzarne il significato. Questi sono gli stessi allievi che, in precedenza, hanno ritenuto di non poter accettare $\sqrt{-1}$ come soluzione di un'equazione di secondo grado. Tuttavia il fatto che questo simbolo numerico non compaia nel risultato finale dell'equazione rende la sua presenza provvisoria, strumentale e dunque sostanzialmente accettabile. Questo atteggiamento appare analogo a quello di alcuni algebristi del XVI secolo, tra i quali Cardano e Bombelli, i quali ebbero "l'ardire (pur ricorrendo a una certa cautela verbale) di fare calcoli formali su espressioni contenenti radici quadrate di numeri negativi" (Bourbaki, 1963, p. 91).

- Altri studenti però non accettano la presenza dell'ignota $\sqrt{-1}$ neppure nei passaggi intermedi del procedimento risolutivo. Interessante (e per molti versi da considerare legittima) è la perplessità espressa da alcuni allievi a proposito delle eventuali regole di calcolo da impiegare operando con "oggetti" matematici non conosciuti come $\sqrt{-1}$.

Concludendo, ci sembra significativo, anche dal punto di vista quantitativo, il mutamento di atteggiamento riscontrato approssimativamente nella metà degli allievi a proposito della presenza di $\sqrt{-1}$: ciò conferma che la considerazione riservata al risultato è in effetti ben diversa dalla considerazione riservata ai passaggi intermedi del procedimento risolutivo. Infatti il *contratto didattico*, tradizionalmente, riserva notevole importanza alla determinazione dell'esatto risultato finale (7).

(7) La valutazione è spesso condotta principalmente (se non esclusivamente) sulla considerazione del risultato di un esercizio. L. Rogers scrive: "I tradizionali metodi valutativi sono concentrati sul tentativo di scoprire la conoscenza e le abilità degli allievi. Regolarmente vediamo allievi ai quali vengono assegnate prove di routine che non li motivano e non li stimolano, che hanno come unico scopo quello di *ottenere la risposta giusta*" (Rogers, 1997).

Tale importanza, dunque, sembra far sì che nella stessa espressione formale del risultato dell'esercizio (in questo caso la scrittura della soluzione dell'equazione) venga ad essere assai pesante l'influenza delle regole fissate dall'insegnante (nella situazione esaminata, la proibizione di estrarre la radice e quadrata di un numero negativo!). Nei passaggi intermedi della risoluzione, invece, l'azione di regole e di proibizioni potrebbe apparire meno coercitiva e dunque una buona parte degli allievi si sente autorizzata a considerare non illecita la presenza di espressioni numeriche insolite e "rischiose", naturalmente non senza avere controllato l'irrinunciabile correttezza del risultato finale.

Bibliografia

- Bagni, G.T. (1996), *Storia della matematica*, 2 vv., Pitagora, Bologna.
- Bombelli, R. (1966) *L'Algebra*, U. Forti-E. Bortolotti (a cura di), Feltrinelli, Milano.
- Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.
- Bottazzini, U., Freguglia, P. e Toti Rigatelli, L. (1992) *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.
- Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano.
- Carruccio, E. (1971), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.
- D'Amore, B. e Oliva, P. (1993), *Numeri*, Angeli, Milano.
- Enriques, F. (1938), *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica, Zanichelli, Bologna 1982).
- Fischbein, E. (1987), *Intuition in science and mathematics*, Reidel, Dodrecht, Holland.
- Fischbein, E., Nello, M.S. and Marino, M.S. (1991), Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.
- Franci, R. e Toti Rigatelli, L. (1979), *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Mursia, Milano.
- Kahneman, D., Slovic, P. and Tversky, A. (1982), *Judgement under uncertainty, heuristic and biases*, Cambridge University Press, New York.
- Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino. Riedizione (1950), Hoepli, Milano. Ristampa anastatica (1982), Cisalpino-Goliardica, Milano.
- Maracchia, S. (1979), *Da Cardano a Galois*, Feltrinelli, Milano.
- Musil, R. (1995), *Il giovane Törless*, Newton Compton, Roma.
- Neugebauer, O. (1974), *Le scienze esatte nell'antichità*, Feltrinelli, Milano.
- Piaget, J. (1980), *Experiments in contradictions*, Chicago, The University of Chicago Press.

- Rogers, L. (1997), Problem Solving ed "Indagini" nei corsi di matematica. Alcuni esempi dalle scuole britanniche, Sulmona (in corso di stampa).
- Schoenfeld, A. (1985), *Mathematical problem solving*, Academic Press, New York.
- Strauss, S. and Bichler, E. (1988), The development of children's concepts of arithmetic average, *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 64-80.
- Swan, M. (1983), *Teaching decimal place value. A comparative study of "conlict" and "positive only" approaches*, University of Nottingham, Shell Centre of Mathematical Education, Nottingham.
- Tall, D. (1990), Inconsistencies in the learning of calculus and analysis, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 49-64.
- Tirosh, D. (1990), Inconsistencies in students' mathematical constructs, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 111-129.
- Tirosh, D. and Graeber, A. (1990), Inconsistencies in preservice elementary teachers' beliefs about multiplication and division, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 65-74.
- Tsamir, P. e Tirosh, D. (1997), Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito, *La matematica e la sua didattica*, Bologna (in corso di stampa).