Bollettino dei docenti di matematica, 43 (2001), 29-50

"Che cos'è?"
Modelli mentali evocati da espressioni algebriche: la scelta del contesto

GIORGIO T. BAGNI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA,
UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"

Summary. In this paper some models associated to the idea of straight line and of circle in the learning of mathematics are investigated, referred to Italian High School (*Liceo scientifico*, students aged 16-18 years). By some tests, we show that the influence of the didactical contract upon this matter is remarkable.

INTRODUZIONE: MODELLI E INTERPRETAZIONE

Lo studio del modello mentale (interno) che l'allievo si forma relativamente ad un concetto matematico deve avvenire indirettamente, attraverso l'analisi dei modelli esterni, delle traduzioni espresse dall'allievo stesso in un linguaggio ([1]). La conoscenza diretta del modello mentale (interno) di un concetto sarebbe importante, in quanto darebbe la possibilità di analizzare individualmente le caratteristiche dell'apprendimento del concetto; come sopra notato, però, tale modello interno non può essere *mai* comunicato (esternamente).

Alcuni risultati riportati in questo lavoro sono stati presentati nell'ambito delle *Due giornate di aggiornamento per docenti di matematica* tenute a La Perfetta, Arzo (Ticino) il 27-28 agosto 2001.

([1]) Considerando che la terminologia che impiegheremo in questo lavoro è diffusa, ma non sempre totalmente condivisa, riteniamo necessario fissare alcuni punti di riferimento (D'Amore & Frabboni, 1996). Chiameremo *immagine mentale* ciò che viene elaborato dall'allievo, anche involontariamente, a fronte di una qualsiasi sollecitazione (sia interna che proveniente dall'esterno): si tratta di un'immagine interna, pertanto non espressa, almeno inizialmente. Tutte le immagini mentali riferite ad un concetto costituiscono il *modello mentale* relativo a tale concetto (Johnson-Laird, 1988). Le concezioni così formate devono spesso essere espresse, comunicate: mediante una specifica *traduzione*, dunque, si viene a creare un modello *esterno*, esprimibile, frequentemente, in un ben determinato linguaggio. Ogni forma di comunicazione di un contenuto, di un qualsiasi messaggio matematico avviene dunque con l'impiego di modelli esterni (Shepard, 1980).

La presente ricerca è dedicata al rilevamento dei modelli esterni suscitati da alcune espressioni, il cui contesto interpretativo, come vedremo, sarà influenzato anche da alcune clausole del contratto didattico.

In effetti, però, non condurremo un'indagine sui differenti modelli esterni relativi ad un (singolo) concetto: sceglieremo un'espressione (nel nostro caso: alcune equazioni algebriche) e cercheremo di capire a quale modello essa viene associata dall'allievo, in quale contesto (per una ricerca sulla visualizzazione si veda: Kaldrimidou, 1987; D'Amore, 1993 e 1999).

In particolare, ci occuperemo delle interpretazioni che gli allievi associano ad alcune semplici espressioni, come ad esempio: "$ax+by+c = 0$". La scelta di collocare tale espressione in un contesto geometrico (evocando, ad esempio, modelli del concetto di "retta" nell'ambito della geometria analitica) oppure in un contesto prettamente algebrico (parlando cioè di "equazione di primo grado" o addirittura, impropriamente, di "polinomio") riflette un atteggiamento ben diverso, che ha motivazioni interessanti (le quali, come sopra anticipato, risulteranno legate anche al contratto didattico) e conseguenze didattiche rilevanti (ad esempio: Webb, 1979; Schoenfeld, 1986; Duval 1994).

Abbiamo esaminato le reazioni di alcuni allievi della scuola secondaria superiore e di alcuni studenti universitari:

Struttura della ricerca	
1. Scuola secondaria superiore *Test 1: l'interpretazione di formule da parte di studenti di III-IV Liceo scientifico (17-18 anni)*	**2. Università** *Test 2: l'interpretazione di formule da parte di studenti universitari del corso di laurea in matematica(22-23 anni)*
3. Conclusioni generali *La scelta del contesto ed il contratto didattico*	

1. TEST 1 (SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE)

1.1. METODOLOGIA DELLA RICERCA

L'analisi del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando due classi di III liceo scientifico (24 e 27 allievi) ed una classe di IV liceo scientifico (26 allievi), per un totale di 77 allievi (in particolare, le due classi di III sono state suddivise in quattro gruppi di 12, 12, 13, 14 allievi, che indicheremo con le lettere A, B, C, D; la classe di IV in due gruppi di 13 allievi ciascuno, che indicheremo con le lettere E, F), a Treviso.

Tutti gli allievi conoscevano gli elementi di geometria analitica relativamente alla retta ed alla circonferenza. In particolare, le equazioni della retta e della circonferenza erano state date (sia dall'insegnante, sia nel libro di testo in uso) nelle forme generali:

$$ax+by+c = 0 \qquad y = mx+q \qquad x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0$$

(La scelta delle lettere, nelle spiegazioni, era stata quella qui indicata).

Gli allievi della classe IV conoscevano i primi elementi di goniometria, ed in particolare la lettura delle funzioni goniometriche di un angolo fissato con riferimento alla "circonferenza goniometrica" (la circonferenza, nel piano cartesiano, di raggio unitario e con il centro coincidente con l'origine degli assi).

A ciascun gruppo è stato proposto un test, nel quale veniva chiesto di "interpretare", mediante una breve risposta, un'espressione matematica (o più espressioni matematiche). Le espressioni da interpretare erano le seguenti:

Test 1-A:	(classe III)		$ax+by+c = 0$
Test 1-B:	(classe III)		$hx+ty+g = 0$
Test 1-C:	(classe III)	(a)	$y = mx+q$
		(b)	$hx+ty = u$
Test 1-D:	(classe III)	(a)	$hx+ty+g = 0$
		(b)	$y = wx+d$
Test 1-E:	(classe IV)	(a)	$y = mx+q$
		(b)	$ax+by+c = 0$
		(c)	$y = mx$
		(d)	$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0$
		(e)	$x^2+y^2 = 1$
Test 1-F:	(classe IV)		$x^2+y^2+nx+sy+p = 0$

Nel caso in cui le espressioni fossero più di una (test C, D, E), erano state indicate più righe per la risposta, tante quante le espressioni da interpretare.

Gli allievi hanno svolto la prova individualmente; non è stata permessa la consultazione di libri o di appunti. Tempo concesso: due minuti (test A, B, C, D, F); tre minuti (test E). Nei paragrafi seguenti, a fianco dei risultati, abbiamo indicato con sigle il contesto da cui l'allievo ha tratto i termini della risposta:

GE	Risposta con linguaggio geometrico
AN	Risposta con linguaggio analitico
AL	Risposta con linguaggio algebrico

1.2. TEST 1-A (CLASSE III)

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

	$ax+by+c = 0$	allievi	(totale: 12 allievi)
GE	una retta	7	59%
AN	l'equazione di una retta	4	33%
AL	un'equazione di primo grado	1	8%

I risultati del test suggeriscono le seguenti considerazioni.

Innanzitutto, notiamo che tutti gli studenti hanno dato una singola risposta: la presenza della (unica) riga ha evidentemente indotto gli allievi a interpretare come coercitiva l'implicita raccomandazione di dare una sola risposta (questa osservazione può valere per tutti i sei test che costituiscono la presente ricerca).

La quasi totalità degli allievi (92%) ha interpretato l'espressione data nell'ambito della geometria analitica. Si osservi che la forma dell'equazione proposta coincide esattamente (anche per quanto riguarda le lettere impiegate) con quella indicata nel libro di testo e nella spiegazione in classe ([2]).

Gli allievi sono stati intervistati singolarmente, ma alla presenza di tutti i compagni, in aula ([3]). Coloro i quali avevano fatto riferimento alla retta hanno confermato la propria posizione; ad esempio:

«È l'equazione canonica della retta» (Marta).

«L'equazione data rappresenta una retta, e può essere scritta nella forma esplicita» (Aldo).

L'unico allievo che ha fatto riferimento al contesto algebrico ha affermato:

«Lo so che può essere una retta nel piano cartesiano, ma prima di tutto è un'equazione. Che poi sia una retta viene dopo, e non è detto che lo sia sempre» (Giulio).

Le considerazioni sui risultati del test, abbinate alle interviste agli allievi ci consentono dunque di concludere che l'interpretazione dell'equazione $ax+by+c = 0$ avviene nell'ambito della geometria analitica. Supponiamo che l'esatta coincidenza della forma di tale equazione con la forma canonica implicita dell'equazione cartesiana della retta (così come essa era stata introdotta agli allievi) possa aver contribuito ad orientare in tale modo la scelta degli studenti ([4]). Questa supposizione sarà avvalorata dai risultati dei test seguenti.

1.3. TEST 1-B (CLASSE III)

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

	$hx+ty+g = 0$	allievi	(totale: 12 allievi)
GE	una retta	5	42%
AN	l'equazione di una retta	2	17%
AL	un'equazione di primo grado	4	33%
AL	un polinomio	1	8%

([2]) Qui e nel seguito abbiamo raggruppato le risposte date dagli allievi per tipologie; le percentuali delle risposte dei test saranno sempre arrotondate all'unità.

([3]) Queste modalità hanno caratterizzato le interviste relative a tutti i test.

([4]) Bisogna ovviamente considerare anche la quotidiana consuetudine degli allievi con il piano cartesiano: lo svolgimento di problemi e di esercizi di geometria analitica è un'attività frequente ed importante per gli studenti della III classe del liceo scientifico.

I risultati sembrano confermare solo in parte le tendenze espresse nel test precedente. Infatti, se qualitativamente le preferenze degli allievi potrebbero dirsi confermate, quantitativamente appare una sensibile (sebbene non estremamente rilevante) differenza: gli studenti che fanno riferimento all'ambito della geometria analitica sono, stavolta, il 59%, e tale risultato conferma solo in parte l'adesione plebiscitaria (92%) del test precedente.

Dalle interviste traiamo alcune spiegazioni interessanti. Ad esempio:

«Potrebbe trattarsi di una retta, ma le lettere h, t, g non sono quelle che compaiono nella solita equazione della retta. Questo mi ha fatto pensare che l'equazione può non essere intesa come una retta» (Linda).

«Ho pensato che quelle strane lettere potessero voler dire che non si trattava di una retta, come viene subito in mente, ma di qualcosa si diverso. Insomma, una specie di suggerimento di chi ha preparato l'esercizio» (Antonio).

Commenteremo questa intervista nel prossimo paragrafo.

Anche altri allievi, nelle interviste, citano l'insolita scelta delle lettere. Una scelta delle lettere diversa da quella usuale ha dunque portato alcuni allievi a modificare il contesto in cui l'espressione algebrica data è stata interpretata. Tale fenomeno induce a ritenere confermata l'ipotesi precedentemente espressa, ovvero che l'esatta coincidenza dell'espressione assegnata con una delle equazioni cartesiane della retta (nella forma generale presentata sia nella spiegazione dell'insegnante, sia nel libro di testo in uso) può orientare significativamente l'interpretazione dell'equazione in questione verso l'ambito della geometria analitica.

La giustificazione di Antonio riflette la volontà dello studente di interpretare con cura la richiesta dell'insegnante, anche sulla base dei dettagli: in tale atteggiamento notiamo una notevole rilevanza comunque assegnata anche ai minimi particolari (in questo caso insignificanti: la scelta di una lettera al posto di un'altra), che può collegarsi a qualche clausola del contratto didattico.

1.4. TEST 1-C (CLASSE III)

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

	(a) $y = mx+q$	allievi	(totale: 13 allievi)
GE	una retta	9	69%
AN	l'equazione di una retta	3	23%
AL	una funzione	1	8%
	(b) $hx+ty = u$	allievi	(totale: 13 allievi)
GE	una retta	6	46%
AN	l'equazione di una retta	3	23%
AL	un'equazione di primo grado	3	23%
AL	un'equazione di secondo grado	1	8%

I risultati del test sembrano confermare quelli dei due test precedenti. L'equazione esattamente coincidente con quella usualmente impiegata per indicare una retta nel piano cartesiano (punto a) viene direttamente collegata al concetto di retta dalla quasi totalità degli allievi. Nel punto (b), il 69% fa ancora riferimento all'interpretazione cartesiana.

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:

«Non ero sicuro della mia risposta al punto (b): mi sarei aspettato l'equazione $ax+by+c = 0$; in quella del test, inoltre, la u al secondo membro diventerebbe $-u$ nel primo. Ma ho pensato che questo non ha importanza ed ho scritto che anche la seconda equazione rappresenta una retta» (Mario).

«Ho pensato che un'equazione che incomincia con "y =" è sempre una funzione, perché quando pongo una x ottengo un'unica y» (Chiara).

La risposta che fa riferimento ad un'«equazione di secondo grado» è frutto di una distrazione, subito riconosciuta dall'allievo.

Le conclusioni esposte nei paragrafi precedenti sono confermate: la forma dell'equazione influenza l'interpretazione da parte degli allievi.

Interessante è la citazione del concetto di funzione (Vinner, 1992): sembra che la verifica della caratteristica fondamentale della definizione di funzione sia considerata elemento di primaria importanza dallo studente; ciò potrebbe riflettere un'analoga importanza attribuita dall'insegnante.

1.5. TEST 1-D (CLASSE III)

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

	(a) $hx+ty+g = 0$	allievi	(totale: 14 allievi)
GE	una retta	5	36%
AN	l'equazione di una retta	7	50%
AL	un'equazione di primo grado	2	14%
	(b) $y = wx+d$	allievi	(totale: 14 allievi)
GE	una retta	5	36%
AN	l'equazione di una retta	7	50%
AL	un'equazione di primo grado	2	14%

Questo test ricalca solo in apparenza il precedente: mentre infatti nel test C le equazioni proposte erano disomogenee in quanto alla scelta delle lettere contenute (con ciò intendendo che la prima presentava una scelta usuale, la seconda insolita), nel presente test *entrambe* le equazioni sono scritte con lettere non usuali. Ciò ha forse fatto sì che l'86% degli allievi abbia individuato come spontanea l'interpretazione nell'ambito della geometria analitica.

Un'intervista sembra confermare quanto ora supposto:

«Le equazioni del test sono le equazioni della retta con le lettere cambiate. La prima è quella implicita, la seconda è quella esplicita. Ma non importa quali lettere scegliamo, dunque possiamo dire che quelle equazioni sono proprio quelle della retta» (Giovanni).

L'abbinamento di due equazioni *entrambe* scritte con lettere inusuali può rendere superabile, per alcuni, la difficoltà di interpretare le equazioni date come forme dell'equazione cartesiana della retta. Molti studenti hanno riconosciuto la struttura formale delle tradizionali equazioni della retta ed hanno dunque optato per l'interpretazione nell'ambito della geometria analitica.

1.6. TEST 1-E (CLASSE IV)

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

	(a) $y = mx+q$	allievi	(totale: 13 allievi)
GE	una retta	5	38%
AN	l'equazione di una retta	8	62%
	(b) $ax+by+c = 0$	allievi	(totale: 13 allievi)
GE	una retta	5	38%
AN	l'equazione di una retta	7	54%
AL	un'equazione di primo grado	1	8%
	(c) $y = mx$	allievi	(totale: 13 allievi)
GE	una retta (passante per l'origine)	6	46%
AN	l'equazione di una retta	6	46%
AL	una proporzionalità diretta	1	8%
	(d) $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0$	allievi	(totale: 13 allievi)
GE	una circonferenza	5	38%
AN	l'equazione di una circonferenza	6	46%
AL	un'equazione di secondo grado	1	8%
--	nessuna risposta	1	8%
	(e) $x^2+y^2 = 1$	allievi	(totale: 13 allievi)
GE	una circonferenza	3	23%
GE	un cerchio	1	8%
GE (AN)	la circonferenza goniometrica	7	54%
AN	l'equazione di una circonferenza	2	15%

Nei risultati del presente test ritroviamo alcune indicazioni emerse nei test precedenti. L'insieme di cinque equazioni formalmente identiche a quelle utilizzate per introdurre le rette e le circonferenze nel piano cartesiano non lascia dubbi alla maggior parte degli allievi su quale sia il contesto nel quale interpretare le espressioni date.

Sottolineiamo un'interessante giustificazione data, nel corso delle interviste, dall'allieva che ha interpretato l'equazione $x^2+y^2 = 1$ come un «cerchio»:

«Ho sbagliato perché ho subito pensato alla circonferenza col centro nell'origine. Mi sono immaginata il disegno di quel cerchio ed ho scritto: "cerchio". Non ho pensato che c'era solo il bordo» (Silvia).

Come sopra notato, l'interpretazione nell'ambito della geometria analitica appare decisa. La denominazione «circonferenza goniometrica» (indicata dal 54% degli allievi) è indotta dalla consuetudine degli studenti con tale oggetto matematico, di impiego assai frequente negli esercizi di goniometria.

Interessante è la posizione di Silvia, che scrive «circonferenza» con riferimento a $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0$ e «cerchio» con riferimento a $x^2+y^2 = 1$. Dalla sua giustificazione emerge che proprio l'avere mentalmente visualizzato una ben determinata figura (la circonferenza di centro l'origine e di raggio unitario) ha provocato l'adesione ad una (peraltro errata) denominazione, appunto «cerchio»; adesione che non si è invece verificata nel caso dell'equazione più generale $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0$, che non identifica una ben determinata (e dunque immaginabile) figura.

1.7. TEST 1-F (CLASSE IV)

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

	$x^2+y^2+nx+sy+p = 0$	allievi	(totale: 13 allievi)
GE	una circonferenza	4	31%
AN	l'equazione di una circonferenza	8	61%
--	nessuna risposta	1	8%

Il cambio delle lettere (dalle solite α, β, γ alle... inusuali n, s, p) non causa, nel caso ora esaminato, alcuno spostamento apprezzabile dell'interpretazione dall'ambito della geometria analitica. I risultati del presente test non sembrano quindi riflettere quelli del test B, in cui, con riferimento all'equazione della retta, una scelta delle lettere diversa da quella usuale ha portato alcuni allievi a modificare il contesto in cui l'espressione data è stata interpretata.

Riportiamo una giustificazione di un allievo:

«L'equazione data è una circonferenza nel piano cartesiano. Bisogna però controllare che il raggio sia positivo» (Marco, che intende sottolineare la positività del quadrato del raggio).

L'equazione $x^2+y^2+nx+sy+p = 0$ non può essere considerata come una "generica" equazione di secondo grado: troppe sono le sue peculiarità formali perché in essa non sia riconosciuta l'equazione di una circonferenza (Marco si limita a segnalare uno dei tradizionali "controlli" suggeriti in ambito didattico nella scuola secondaria: il quadrato del raggio non deve essere negativo...).

1.8. CONCLUSIONI (SCUOLA SECONDARI SUPERIORE)

I test sopra illustrati sono riferiti ad un campione piuttosto esiguo di studenti (e potrebbero dunque essere verificati in senso ben più generale, ovvero con riferimento a campioni di maggiore rappresentatività, rispetto ad una popolazione ben determinata); tuttavia essi esprimono alcune tendenze che ci sembrano essere abbastanza chiare.

Innanzitutto possiamo notare che, almeno nel caso degli elementi della geometria analitica, da noi esaminati, la prima interpretazione fa quasi sempre riferimento alla visualizzazione; è qui spontaneo riferirsi alla teoria dei concetti figurali di E. Fischbein, e segnatamente ricordare l'osservazione secondo la quale «l'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei contenuti concettuali su quelli figurali, non è un processo naturale» (Fischbein, 1993, p. 156). Questa «predominanza dei contenuti concettuali su quelli figurali», nella situazione da noi esaminata, sembra essere lontana: le equazioni proposte vengono ad essere utilizzate dagli allievi quasi esclusivamente in modelli esterni espressi (principalmente) in termini visuali.

Il contesto nel quale viene interpretata un'espressione matematica non viene scelto sulla base, ad esempio, della massima generalità (da questo punto di vista, ad esempio, un'equazione di primo grado in due incognite dovrebbe essere interpretata come... un'equazione di primo grado in due incognite, né più né meno: una sua interpretazione analitica, peraltro lecita, potrebbe essere considerata alla stregua di una ulteriore particolarizzazione del concetto). La generalità, al contrario, viene minimizzata: l'allievo sembra propendere per l'interpretazione più particolare ([5]), con ciò cercando, forse, di assecondare l'intenzione dell'insegnante, di sfruttare ogni suo imp licito suggerimento.

È qui che possiamo rilevare l'azione del contratto didattico: da un lato, infatti, il comportamento dell'allievo è influenzato dall'abitudine ad occuparsi di esercizi di geometria analitica nelle classi III e IV della scuola secondaria superiore; ma l'importanza attribuita (anche consapevolmente) alla scelta delle lettere impiegate nella scrittura dell'equazione può essere ricollegata al contratto didattico, e in particolare a quelle clausole che prevedono, per l'attività didattica, la "ripetizione delle modalità" (sull'azione di tali clausole indichiamo, ad esempio: D'Amore, 1993; D'Amore & Frabboni, 1996).

2. TEST 2 (UNIVERSITÀ)

2.1. METODOLOGIA DELLA RICERCA

Abbiamo ritenuto interessante esaminare il comportamento di alcuni studenti universitari mediante un test analogo al precedente (sebbene il diverso contesto scolastico abbia suggerito di impiegare un test diverso sia per il contenuto che per le modalità di effettuazione). Abbiamo esaminato 22 studenti del III-IV anno della facoltà di Scienze, corso di laurea in Matematica.

([5]) Potremmo dire che l'allievo finisce per considerare la *generalità* come *genericità*, dunque in termini negativi, da evitare.

A ciascun allievo è stato proposto un test, nel quale veniva chiesto di "interpretare", mediante una breve risposta, un'espressione matematica. Le espressioni da interpretare (assegnate una alla volta, nell'ordine indicato) erano:

Test 2-A:	$q = y$
Test 2-B:	$hy-c = k^2x$
Test 2-C:	$0 = mx$
Test 2-D:	$hx-ay = 0$
Test 2-E:	$3x^2-\alpha x+1+3y^2 = 0$
Test 2-F:	$ax+by+c = 0$
Test 2-G:	$y = mx+q$
Test 2-H:	$x^2+y^2 = 1$
Test 2-I:	$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0$

Gli allievi hanno svolto la prova individualmente; non è stata permessa la consultazione di libri o di appunti. Tempo concesso: un minuto per ciascun test.

2.2. TEST 2-A

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

	$q = y$	allievi	(totale: 22 allievi)
GE	Retta	11	50%
AN	Equazione di una retta	1	5%
AL	Equazione (identità, uguaglianza...)	10	45%

Poco più della metà degli allievi, dunque, ha optato per un'interpretazione analitica: la scrittura $q = y$ può dunque evocare una lettura nell'ambito della geometria analitica, ma i riferimenti al tradizionale linguaggio analitico non sono tali da indurre tutti gli studenti ad interpretare tale uguaglianza come l'equazione di una retta nel piano cartesiano.

Rispetto ai test proposti agli allievi della scuola secondaria superiore, nei test proposti agli studenti universitari era possibile ipotizzare una maggiore varietà di risposte, determinate dalla maggiore conoscenza di contenuti matematici degli allievi coinvolti. Abbiamo pertanto scelto di riportare, in particolare, alcune risposte relative ai diversi test proposti agli studenti universitari; iniziamo dall'interpretazione di $q = y$:

Caterina: «Un'uguaglianza tra due lettere»

Fania: «Equazione di meccanica razionale»

Franca: «Costante»

Francesca: «Identità assegnata»

Laura: «Retta, bisettrice del piano q, y»

Paolo: «Con y variabile è l'equazione di una retta»

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:

«In $q = y$ ho pensato a y come ad una funzione di x, $f(x)$, e se $f(x)$ è uguale alla costante q ho una funzione costante» (Franca).

Emerge qui con chiarezza la convenzione tacita secondo la quale la presenza della lettera y viene riferita all'immagine di una funzione di una variabile.

Diversamente orientata sembra però la giustificazione seguente:

«Ho pensato che la q poteva essere come la x» (Laura).

Laura dunque non considera vincolante la convenzione tacita secondo la quale l'asse delle ascisse, nel piano cartesiano, viene indicato dalla lettera x (sul significato di variabile si veda ad esempio: Schoenfeld & Arcavi, 1988).

2.3. TEST 2-B

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

	$hy–c = k^2x$	allievi	(totale: 22 allievi)
GE	Retta	7	32%
AN	Equazione di una retta	2	9%
AL	Equazione	8	36%
AL	II grado, equazione di II grado	2	9%
--	Potenziale elastico	1	5%
--	nessuna risposta	2	9%

Riportiamo, in particolare, alcune risposte relative a: $hy–c = k^2x$:

Caterina: «Un'equazione di I grado in due variabili x e y con c costante»

Cinzia: «Retta parallela all'asse y al variare dei valori h, y, c, k»

Claudia: «Equazione di una retta $ax+by+c = 0$»

Fania: «Potenziale elastico»

Laura: «Equazione di curva di II grado»

Lina: «Lineare in due incognite x, y e tre parametri h, c, k»

Paolo: «Equazione lineare per h, y, c, x, di II grado per k»

Dai risultati emerge che soltanto il 41% degli allievi optano per l'interpretazione analitica: gli elementi 'inusuali" sembrano indurre la maggioranza degli studenti a cercare riferimenti diversi.

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:

«Ho scritto tutte le variabili possibili per non dare per scontate x e y come variabili» (Paolo).

«Ho riscritto $hy–c = k^2x$ come $ax+by+c = 0$ perché ho riconosciuto nella forma $hy–c = k^2x$ quello che mi era stato presentato come $ax+by+c = 0$» (Claudia).

Rispetto al test precedente, è diminuita l'interpretazione in ambito analitico: essa sembra essere vincolata ad un consolidato uso di alcune lettere, come la giustificazione indica esplicitamente.

2.4. TEST 2-C

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

	$0 = mx$	allievi	(totale: 22 allievi)
GE	Retta (o asse)	8	36%
AN	Equazione di una retta	2	9%
AN	Equazione di una retta o di un piano	1	5%
AL	Equazione (uguaglianza)	6	27%
AL	Indeterminata	1	5%
AL	Risposte collegate alla legge di annullamento del prodotto	4	18%

Riportiamo, in particolare, alcune risposte relative a: $0 = mx$:

Benedetta: «L'asse y»

Caterina: «Un'uguaglianza con risultato $x = 0$»

Federica: «Dominio d'integrità»

Franca: «Retta $x = 0$ (se $m \neq 0$)»

Greta: «È come l'asse $x = 0$ degli assi coordinati»

Laura: «O $x = 0$ oppure $m = 0$»

Pino: «Equazione di I grado in x, non ammette soluzione se non quella nulla»

Simona: «Equazione di I grado che può rappresentare un piano o una retta a seconda della dimensione dello spazio considerato»

La percentuale degli allievi che indica un'interpretazione analitica è analoga a quella riscontrata nel test precedente: anche in questo caso i riferimenti alla tradizionale scrittura dell'equazione della retta non sono evidenti.

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:

«Ho scritto "dominio di integrità" perché era la prima cosa che mi è venuta in mente: il test richiedeva di scrivere la prima impressione» (Federica).

Interessante è la presenza di alcune risposte collegate alla legge di annullamento del prodotto (in un dominio d'integrità): sembra che gli studi di algebra degli allievi universitari suggeriscano interpretazioni inusuali rispetto alle comuni risposte degli studenti della scuola secondaria superiore.

Interessanti sono alcune giustificazioni collegate all'interpretazione analitica:

«Ho scritto "l'asse y" perché quando incontro $x = 0$ sono abituata a dire "l'asse y" e non "l'equazione dell'asse y"» (Benedetta).

«Ho scritto "è come l'asse $x = 0$" perché ho pensato a m come ad una costante, che dunque si può togliere» (Greta).

2.5. TEST 2-D

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

	$hx–ay = 0$	allievi	(totale: 22 allievi)
GE	Retta	9	41%
AN	Equazione di una retta	3	13%
AL	Equazione	6	27%
--	nessuna risposta	4	18%

Riportiamo, in particolare, alcune risposte relative a: $hx–ay = 0$:

Benedetta: «Retta passante per l'origine»

Claudia: «Retta per l'origine»

Elena: «Un'equazione in x e y di I grado»

Franca: «Retta passante per l'origine»

Greta: «Equazione lineare cioè di I grado in x e y»

Paolo: «Equazione retta sul piano x, y»

L'interpretazione in ambito analitico è, nel complesso, maggioritaria, sebbene non sia radicalmente diversa da quella dei test precedenti. Ci sembra indicativa la presenza di alcune risposte che specificano che la retta rappresentata "passa per l'origine": gli allievi sembrano dare importanza a questa caratteristica, evocata dall'assenza del termine noto nell'equazione proposta.

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:

«Ho specificato "sul piano x, y" perché ho interpretato sùbito l'equazione in due dimensioni e non ho ritenuto di estenderla a più dimensioni» (Paolo).

«Ho specificato x e y per non essere fraintesa; in effetti pensavo che sotto ci fosse un qualche tranello e allora ho pensato di specificare tutto» (Elena).

Dalla risposta di Elena emerge un interessante riferimento al "contratto sperimentale": l'allieva dichiara di avere sospettato che nel test potesse essere presente un "qualche tranello" e ciò l'ha indotta a specificare esplicitamente alcune condizioni.

2.6. TEST 2-E

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

	$3x^2-\alpha x+1+3y^2 = 0$	allievi	(totale: 22 allievi)
GE	Circonferenza	4	18%
GE	Conica, ellisse	3	26%
GE	Parabola	1	5%
AN	Equazione di una circonferenza	2	9%
AN	Equazione di una curva	1	5%
AL	Equazione (polinomio di II grado...)	7	32%
--	nessuna risposta	1	5%

Riportiamo, in particolare, alcune risposte relative a: $3x^2-\alpha x+1+3y^2 = 0$:

Angelo: «Ellisse (circonferenza)»

Caterina: «Un'equazione di II grado nelle variabili x e y non omogenea»

Elena: «Un polinomio in due variabili (x e y) di II grado»

Mariella: «II grado due incognite»

Paolo: «Equazione di II grado per x, y con α coefficiente di x»

Simona: «Equazione di una curva»

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:

«Ho scritto "ellisse (circonferenza)" perché sono abituato a studiare i determinanti e dunque ho visto che si trattava di una conica ellittica. Solo alla fine mi sono reso conto che era una circonferenza» (Angelo).

Le risposte sono molto diversificate: gli allievi non riconoscono le caratteristiche tipiche dell'equazione di una circonferenza e danno interpretazioni in ambiti diversi (sebbene la maggioranza opti comunque per l'ambito analitico). Dalla giustificazione riportata emerge la considerazione di un'equazione di secondo grado attraverso uno studio standard, mediante il calcolo degli invarianti.

2.7. TEST 2-F

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

	$ax+by+c = 0$	allievi	(totale: 22 allievi)
GE	Retta	7	32%

AN	Equazione di una retta	8	36%
AN	Equazione di una retta o di un piano	1	5%
AL	Equazione	6	27%

Riportiamo, in particolare, alcune risposte relative a: $ax+by+c = 0$:

Angelo: «Equazione di I grado non omogenea (retta)»

Carlo: «Equazione canonica di una retta nel piano Oxy»

Caterina: «Equazione generale per definire un'espressione di I grado in due variabili»

Cinzia: «Retta che non passa per l'origine»

Cristiana: «Retta non passante per l'origine»

Federica: «Prototipo di equazione lineare»

Lina: «Equazione generica di una retta (quella sulla quale lavoro a scuola)»

Simona: «Equazione di una retta o di un piano»

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:

«Metto sempre la parola "equazione" perché non vedo subito il grafico, ma inizialmente ho solo l'equazione» (Caterina).

«Ho sottolineato che si tratta di una "equazione" perché ho ricordato che l'equazione canonica della retta mi era stata data alle scuole superiori proprio in questa forma» (Federica).

L'interpretazione in ambito analitico (scelta, nel complesso, dal 73% degli allievi) è favorita dall'uso della forma canonica: in effetti l'equazione data è l'equazione "canonica" della retta (nella cosiddetta forma implicita). La presenza della lettera c induce ad affermare che la retta è "non passante per l'origine" (c'è dunque la tacita assunzione: $c \neq 0$).

2.8. TEST 2-G

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

	$y = mx+q$	allievi	(totale: 22 allievi)
GE	Retta	8	36%
AN	Equazione di una retta	12	54%
(AN)	Equazione della meccanica o retta	1	5%
AL	Divisione x con resto q	1	5%

Riportiamo, in particolare, alcune risposte relative a: $y = mx+q$:

Caterina: «Equazione di una retta non passante per l'origine»

Cristiana: «Equazione della meccanica o retta»

Greta: «Equazione tipo di equazione lineare (in forma esplicita) cioè retta»

Laura: «Divisione x con resto q»

Paolo: «Equazione retta con x variabile libera, y vincolata, m coefficiente angolare»

Simona: «Equazione in forma esplicita di una retta in $\mathbf{R}^2$»

Il 90% degli allievi opta per l'interpretazione analitica: sembra che la familiare formula $y = mx+q$ non lasci molto spazio ad interpretazioni diverse.

Notiamo che, come già rilevato per il test 2-F, la presenza della lettera q induce ad affermare che la retta è "non passante per l'origine" (dalla risposta di Caterina traspare dunque la tacita assunzione: $q \neq 0$). Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:

«Ho interpretato la scrittura $y = mx+q$ come l'indicazione di una divisione perché mi sembrava strano che tutte le espressioni del test proposto siano da considerare come delle rette!» (Laura).

Potrebbe qui essere evidenziata l'azione di qualche clausola del "contratto sperimentale": sembra che l'allieva consideri molto improbabile che diversi esercizi abbiano la stessa risposta.

2.9. TEST 2-H

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

	$x^2+y^2 = 1$	allievi	(totale: 22 allievi)
GE	Circonferenza	16	72%
GE	Ellisse	1	5%
AN	Equazione di una circonferenza	5	23%

Riportiamo, in particolare, alcune risposte relative a: $x^2+y^2 = 1$:

Cinzia: «Circonferenza di raggio unitario e centro nell'origine»

Greta: «Circonferenza goniometrica unitaria»

Mariella: «Circonferenza su di un piano»

Simona: «Equazione di una circonferenza con centro nell'origine in $\mathbf{R}^2$»

Tutti gli allievi danno interpretazioni in ambito analitico.

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:

«Ho specificato "nel piano" perché se avessi considerato un'altra variabile non avrei più potuto limitarmi a considerare solo il piano» (Mariella).

Osserviamo che, nonostante gli allievi abbiano frequentato corsi di geometria in cui essi hanno potuto studiare la geometria in n dimensioni (con $n>2$), le interpretazioni spaziali sono piuttosto rare: quasi sempre l'interpretazione geome trica è data in ambito bidimensionale.

Interessante è inoltre il riferimento alla goniometria: la circonferenza di equazione $x^2+y^2 = 1$ è frequentemente impiegata in esercizi di goniometria (soprattutto nella scuola secondaria superiore) e gli allievi sono dunque portati a dare di essa un'interpretazione in tal senso.

2.10. TEST 2-I

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

	$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0$	allievi	(totale: 22 allievi)
GE	Circonferenza	9	41%
GE	Conica, curva di II grado, ellisse	3	13%
GE	Parabola	1	5%
GE	Paraboloide	1	5%
AN	Equazione di una circonferenza	3	13%
AN	Equazione di una conica	1	5%
AN	Equazione del fascio di circonferenze	1	5%
AL	Equazione	2	9%
--	nessuna risposta	1	5%

Riportiamo, in particolare, alcune risposte relative a: $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0$:

Benedetta: «Equazione generale di una circonferenza»

Carlo: «Curva di II grado»

Federica: «Probabile circonferenza»

Franca: «Equazione di una circonferenza passante per l'origine »

Greta: «Circonferenza generica C $\left(-\frac{\alpha}{2};-\frac{\beta}{2}\right)$, $r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma}$ »

Anche in questo caso l'interpretazione nell'ambito della geometria analitica è scelta dalla quasi totalità degli allievi.

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:

«Ho scritto "probabile circonferenza" perché mi sembrava di ricordare che ci fossero delle condizioni da verificare sui coefficienti della $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0$ per poter parlare di una circonferenza» (Federica).

«Ho indicato tutte le formule in quanto ho studiato la circonferenza mi sono state date le formule per il centro e per il raggio» (Greta).

I riferimenti alla geometria analitica studiata alla scuola secondaria superiore, come nel caso del precedente test 2-H, sono abbastanza numerosi (sebbene non manchino alcune interpretazioni diverse, non sempre esatte): all'equazione $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0$, vista come "equazione generale di una circonferenza" sono talvolta associate le condizioni affinché essa rappresenti effettivamente una circonferenza a punti reali e le formule per ricavarne il centro ed il raggio.

2.11. CONCLUSIONI

A parte l'analisi quantitativa, che in una ricerca come questa (in cui i campioni considerati non sono individuati sulla base di specifici criteri) assume importanza a nostro avviso secondaria, qualitativamente notiamo che alcune tendenze rilevate nello studio del comportamento degli allievi della scuola secondaria sembrano essere confermate anche in ambito universitario. Ad esempio, la sola presenza di lettere "usuali" (delle stesse lettere tradizionalmente impiegate nelle spiegazioni e nei manuali scolastici) nella scrittura da interpretare induce molti studenti a scegliere un ambito, ad optare per un modello.

Inoltre, come osservato nel caso dei test forniti a studenti della scuola secondaria, il contesto nel quale viene interpretata un'espressione matematica non viene scelto sulla base della massima generalità: l'interpretazione in ambito analitico viene spesso privilegiata, sulla base della frequenza con la quale tale interpretazione è stata suggerita nel corso degli studi recenti (e meno recenti).

Da un lato, dunque, concordiamo con L. Bazzini, che ricordando gli studi di A. Sfard e L. Linchevski (1991, 1992) scrive:

«Spesso gli studenti concepiscono un'espressione algebrica (per esempio un'equazione o una disequazione) come una mera successione di simboli privi di ogni semantica e per le quali le trasformazioni formali usate per arrivare alla soluzione sono l'unica fonte di significato» (Bazzini, 1995, p. 44).

Quanto rilevato, però, fa pensare ad un'ulteriore lettura della situazione: non pochi studenti sembrano cercare il significato stesso di un'espressione algebrica in ambiti nei quali tale espressione sia impiegata usualmente, con interpretazioni chiare e codificate e con regole pratiche ben definite ([6]).

([6]) Con ciò non intendiamo affermare che la presentazione di oggetti matematici debba essere forzatamente del tutto astratta, svincolata dalla realtà; concordiamo con C. Dapueto, il quale scrive: «Un insegnamento che proponga definizioni, dimostrazioni, tecniche senza respiro culturale ha anche effetti negativi sulle cosiddette capacità *metacognitive* dell'alunno: adeguandosi a conoscenze ed a schemi di comportamento che non comprende e che non trova motivati, egli non sviluppa... le capacità di dirigere e di esprimere il proprio pensiero, e non solo in ambito matematico» (Dapueto, 1992, p. 31; si veda inoltre: Bruno Longo, 1992).

CONCLUSIONI GENERALI

Il confronto tra i risultati relativi alla scuola secondaria superiore ed all'università è soltanto indicativo. Infatti i campioni di allievi (i quali sono peraltro poco numerosi ed inoltre, non essendo stati individuati mediante specifici criteri di campionamento, non possono essere considerati significativi di una particolare popolazione) non sono collegati tra di loro; si tenga poi presente che i test proposti, come precedentemente sottolineato, sono lievemente differenti sia per il contenuto che per le modalità di effettuazione.

Il passaggio tra la scuola secondaria e l'università è una fase molto delicata dal punto di vista della formazione dell'allievo (per un esame degli studi sull'insegnamento e sull'apprendimento dell'algebra nella scuola secondaria superiore si veda: Furinghetti, 1995). Dal punto di vista dell'interpretazione del linguaggio algebrico, ad esempio, F. Arzarello, L. Bazzini e G. Chiappini osservano:

> «Sembra che una delle cause principali di difficoltà riscontrate anche all'inizio dell'università stia proprio nell'incapacità di dar senso ai simboli algebrici come simboli di un linguaggio che non sia pura sintassi» (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1994, p. 22; gli Autori si riferiscono a: Burton, 1988).

Possiamo comunque osservare che gli studi matematici specifici affrontati dalla III-IV classe della scuola secondaria superiore al III-IV anno universitario della facoltà di Scienze, corso di laurea in matematica, **non** sembrano variare significativamente il comportamento degli studenti: molti allievi collegano le espressioni alle esperienze scolastiche e scelgono il contesto interpretativo (e, dunque, si formano il modello di alcuni importanti oggetti matematici) sulla base di esse, senza palesare un controllo consapevole dettato dalla maggiore competenza, rispetto agli allievi più giovani.

La questione della scelta del contesto e dell'uso dei diversi registri rappresentativi resta centrale: le possibilità didattiche collegate ad un corretto controllo dei registri rappresentativi sono molte (citiamo, tra i molti Autori: Paivio, 1986; Duval, 1993 e 1994; e non soltanto, ad esempio, per quanto riguarda la importante possibilità di raggiungere risultati apprezzabili con i "principianti deboli", come segnalato in: Vergnaud, Cortes & Favre -Ortigue, 1997). Una gestione attenta dell'impiego dei diversi registri rappresentativi può risultare di grande rilevanza in generale, in molti settori della didattica della matematica (sul ruolo della definizione segnaliamo, ad esempio: D'Amore, 1986; Neubrand, 1990; Bagni & D'Amore, 1992).

Viceversa, una considerazione soltanto approssimativa dei problemi qui ricordati può portare al manifestarsi di non trascurabili difficoltà (ad esempio, per quanto riguarda la comprensione degli enunciati si veda: Duval, 1997) che potranno essere esaminate in ulteriori ricerche.

L'Autore desidera ringraziare il Prof. Bruno D'Amore dell'Università di Bologna per i preziosi suggerimenti.

Bibliografia

Arzarello, F.; Bazzini, L. & Chiappini, G. (1994), *L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*, Progetto strategico del CNR: Tecnologie e innovazioni didattiche, Quaderno n. 6.

Bagni, G.T. & D'Amore, B. (1992), Le classificazioni dei quadrilateri: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 15, 785-814.

Bazzini, L. (1995), Equazioni e disequazioni: riflessioni sul concetto di equivalenza: Bazzini, L. (ed.), *La didattica dell'Algebra nella scuola secondaria superiore*, Atti del V Convegno Internuclei per la scuola secondaria superiore, Pavia, 16-18 marzo 1995, 44-53.

Bruno Longo A.P. (1992), Dimostrare: ostacoli e valenze educative: Furinghetti, F. (ed.), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del secondo Internucleo della Scuola secondaria superiore, Progetto strategico del CNR: Tecnologie e innovazioni didattiche, Quaderno n. 13, 1-17.

Burton, M.B. (1988), A linguistic basis for students' difficulties with Algebra: *For the learning of mathematics*, 8.

D'Amore, B. (1986), Il ruolo della definizione nella didattica della matematica: *Insegnare*, 6, 9-13.

D'Amore, B. (1993), *Problemi*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. (1999), *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, Bologna.

Dapueto, C. (1992), La problematica del definire e del dimostrare nella costruzione di un progetto per l'insegnamento della matematica: Furinghetti, F. (ed.), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del secondo Internucleo della Scuola secondaria superiore, Progetto strategico del CNR: Tecnologie e innovazioni didattiche, Quaderno n. 13, 19-51.

Duval, R. (1993), Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.

Duval, R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique: *Repres IREM*, 17, ottobre.

Duval, R. (1997), La compréhension des énoncés de problème de mathématisation: de la lecture à la résolution: D'Amore, B. & Gagatsis, A. (eds.), *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, 25-46, Thessaloniki.

Fischbein, E. (1993), The theory of figural concepts: *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.

Furinghetti, F. (1995), Una lettura della letteratura su insegnamento/apprendimento dell'Algebra a livello di scuola secondaria superiore: Bazzini, L. (ed.), *La didattica dell'Algebra nella scuola secondaria superiore*, Atti del V Convegno Internuclei per la scuola secondaria superiore, Pavia, 16-18 marzo 1995, 110-123.

Johnson-Laird, P.N. (1988), *Modelli mentali*, Il Mulino, Bologna (edizione originale: 1983).

Kaldrimidou, M. (1987), *Images mentales et représentations en mathématiques chez les mathématiciens et les étudiants en mathématiques*, Thèse 3^{me} cycle, Université Paris 7, Paris.

Neubrand, M. (1990), L'apprendere e il riflettere: perché e come associarli nella didattica della matematica: *La matematica e la sua didattica*, IV, 2, 5-16.

Paivio, A. (1986), *Mental representation: a dual coding approach*, Clarendon Press, Oxford.

Schoenfeld, A.H. (1986), On having and using geometric knowledge: Hiebert, J. (ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*, 225-263, Erlbaum, Hillsdale.

Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1988), On the meaning of variable: *Mathematics teacher*, 81, 420-427.

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin: *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1, 1-36.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1992), Equations and inequalities. Processes without objects?: *Proceedings of PME XVI*, Durham, 3, 136.

Shepard, R.N. (1980), *Internal representations: studies in perception imagery and cognition*, Bradford, Montgomery.

Vergnaud, G.; Cortes, A. & Favre-Ortigue, P. (1997), Introduzione dell'algebra ai principianti "deboli". Problemi epistemologici e didattici: *La matematica e la sua didattica*, 3, 253-271.

Vinner, S. (1992), Function concept as prototype for problems in mathematics: Harel, G. & Dubinsky, E. (eds.), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, 195-213.

Webb, N. (1979), Content and context variables in problem task: Goldin, G.A. & McClintock, C.E. (eds.), *Task variables in mathematical problem solving*, Eric, Columbus, Ohio.