

Per una didattica delle matematiche

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine

Sunto. Le concezioni della matematica sviluppate dai ricercatori, dagli insegnanti e dagli studenti sono oggi influenzate da un clima culturale complesso che tiene conto, ad esempio, di alcuni risultati della logica del XX secolo e di alcune recenti posizioni filosofiche. La didattica della matematica deve considerare tali aspetti: nel fare ciò, il tradizionale approccio epistemologico può essere talvolta sostituito da un approccio ermeneutico che renda possibili la considerazione e il confronto di posizioni incommensurabili.

Parole chiave. Didattica della matematica; Teoremi di Gödel; Natura interna della matematica; Epistemologia; Ermeneutica.

Abstract. Mathematicians', teachers' and students' conceptions of mathematics are nowadays influenced by a complex cultural climate, taking into account, for instance, some logical results on the 20th century and some recent philosophical positions. Mathematics education has to consider these aspects: in doing so, the traditional epistemological approach can be sometimes replaced by an hermeneutic approach that enables the consideration and the comparison of incommensurable positions.

Key words. Mathematics education; Gödel's theorems; Internal nature of mathematics; Epistemology; Hermeneutics.

1. Introduzione: una definizione per la matematica?

Che cos'è la matematica? Molti autori hanno cercato di rispondere a questa domanda, con risultati a volte brillanti, spesso vivacemente argomentati e discutibili (ovvero degni di essere discussi). Classici libri di divulgazione (ci limitiamo a ricordare Courant & Robbins, 2000) e volumi di filosofia della matematica o della scienza (Lolli, 2002) sono partiti da un simile quesito, e ogni tentativo di orientare il lettore verso una bibliografia su questo tema correrebbe rischi di imperdonabile incompletezza. Lo stesso accostamento dei termini “matematica” e “scienza” può portare a questioni controverse: la differenza tra scienziati come i fisici che procedono induttivamente e i matematici che costruiscono un sistema assiomatico-deduttivo è chiara. Marco Bramanti, dopo aver notato che «la matematica sembra [...] un'attività legata alla razionalità umana nel suo aspetto più profondo, ma non

strettamente e necessariamente orientata all'indagine sul mondo fisico e sulle sue leggi», riconosce che «la scienza moderna nasce come scienza matematizzata, [...] “parla” col linguaggio matematico e senza di esso è semplicemente muta» (Bramanti, 2003, p. 37).

Ogni tentativo di definizione della matematica, inoltre, si scontra con un problema linguistico che ai giorni nostri appare delicato: Alberto Melucci (1943–2001) osserva che «non possiamo non essere moderni, ma nello stesso tempo viviamo oggi il disagio culturale e pratico di applicare categorie superate a fenomeni che si prestano sempre meno a essere interpretati attraverso di esse»; insomma «si continua a parlare il linguaggio del passato per individuare e categorizzare qualcosa che è discontinuo rispetto al passato stesso» (Melucci, 2000, p. 19). Come vedremo, la matematica sta vivendo un periodo culturalmente complesso, ad esempio (ma non soltanto) dal punto di vista fondazionale: alcune vecchie impostazioni vengono superate e non sempre il citato «linguaggio del passato», cioè un approccio legato a forme linguistiche e concettuali tradizionali (il cui esame dettagliato esula dagli scopi del presente lavoro; spunti importanti sono in: Habermas, 1991), ci sostiene nella corretta descrizione della situazione. Secondo una celebre affermazione di Hans-Georg Gadamer (1900–2002), «l'essere che può venir compreso è linguaggio» (2000, p. 965) e se riconosciamo la centralità del linguaggio in ogni esperienza culturale umana non possiamo non prendere atto che anche parlando di matematica (da ogni punto di vista: la matematica della ricerca e delle applicazioni, ma anche la matematica dei processi di insegnamento–apprendimento) l'inadeguatezza di un quadro linguistico aggiornato ed efficiente può rivelarsi un ostacolo serio, forse insormontabile.

Nel presente lavoro evidenzieremo come all'interno della matematica si siano sviluppate, nel secolo scorso, posizioni teoriche (§ 2) che hanno contribuito a mutare la concezione stessa di questa disciplina (§ 3); quindi sottolineeremo la necessità di tener conto di tali mutamenti in ambito didattico (§ 4), proporremo un esempio legato alla storia e alla geografia della matematica (§ 5) e concluderemo con alcune indicazioni per ulteriori ricerche (§ 6).

2. L'eredità di Gödel

Non ci impegneremo in una descrizione dello status della matematica al tramonto del modernismo né nella discussione sulla nascita e sull'eventuale sviluppo di una “matematica postmoderna” (Alsina Catalá, 1986). Tuttavia alcuni elementi essenziali meritano di essere almeno brevemente considerati. Riprenderemo in particolare l'analisi che Melucci (2000) svolge con riferimento alla società mettendo in evidenza un punto importante: la dimostrata presenza, all'interno della matematica stessa, di situazioni teoricamente critiche, spesso ricondotte ai risultati di Kurt Gödel (1906–1978). La situazione può essere riassunta riportando le parole dello stesso Gödel, tratte dagli *Atti del II Convegno di epistemologia delle scienze esatte* tenutosi a Königsberg nel 1931 (traduzione in: Casari, 1973, pp. 55–57; gli scritti gödeliani del periodo 1929–1936 sono raccolti in Gödel, 1999):

Un sistema formale si dice completo se ogni proposizione esprimibile con i suoi simboli è formalmente decidibile a partire dagli assiomi, vale a dire se per ogni proposizione A di quel tipo esiste una catena deduttiva finita che si sviluppa secondo le regole del calcolo logico, la quale comincia con certi assiomi e finisce con la proposizione A o con la proposizione $\neg A$. Un sistema S si dice completo rispetto a una certa classe K di proposizioni se per lo meno tutte le proposizioni di K sono decidibili a partire dagli assiomi di S .

[...] Non esiste alcun sistema con un numero finito di assiomi che sia completo anche soltanto rispetto alle proposizioni aritmetiche (supposto che nessuna proposizione aritmetica falsa, ossia contenutisticamente refutabile, sia dimostrabile a partire dal sistema in questione); dove per “proposizioni aritmetiche” devono intendersi quelle proposizioni in cui gli unici concetti che vi figurano sono, oltre a $+$, \cdot , $=$ (addizione, moltiplicazione e identità riferite a numeri naturali), i connettivi logici del calcolo proposizionale e i simboli per il quantificatore universale e per quello esistenziale, riferiti questi, peraltro, solo a variabili che varino sopra i numeri naturali (nelle proposizioni aritmetiche, quindi, non compaiono assolutamente variabili diverse da quelle per i numeri naturali).

Persino in quei sistemi che hanno un numero infinito di assiomi esistono sempre proposizioni aritmetiche indecidibili, purché la “regola che determina gli assiomi” soddisfi a certe condizioni (molto generali). Da quanto detto risulta in particolare che tutti i sistemi formali della matematica finora conosciuti – per esempio, quello dei *Principia Mathematica* (ivi compresi gli assiomi di riducibilità, dell’infinito e di scelta), oppure quelli assiomatici per la teoria degli insiemi di Zermelo–Fraenkel e di von Neumann, o ancora i sistemi formali della scuola hilbertiana – contengono proposizioni aritmetiche indecidibili.

Per quanto concerne i risultati circa le dimostrazioni di non contraddittorietà, [...] per tutti quei sistemi formali per i quali è stata sopra affermata l’esistenza di proposizioni aritmetiche indecidibili, vale che l’affermazione della non contraddittorietà di uno di quei sistemi appartiene sempre alle proposizioni indecidibili di quel sistema.

Se considerassimo i risultati di Gödel in termini matematicamente approssimativi e senza un’adeguata riflessione filosofico–epistemologica, potremmo configurarci una sorta di debolezza insita in alcune teorie chiave della matematica. Perfino l’oggettività della matematica, quando fosse intesa come possibilità di attribuire sempre e comunque l’attributo di *vero* o di *falso* a una proposizione partendo dagli assiomi, vacillerebbe. Sarebbe però errato forzare l’interpretazione dei teoremi gödeliani: il fatto che la completezza dell’aritmetica non possa essere dimostrata ricorrendo ai soli assiomi dell’aritmetica non implica che la matematica, in generale, sia da considerare in crisi. Tuttavia sarebbe altrettanto irrealistico negare il peso di tali risultati limitativi relativamente alla concezione di una disciplina a lungo considerata in un’aura di onnipotenza, strumento invocato sin dall’antichità come una sorta di garanzia dell’oggettività e del rigore scientifico. L’idea di matematica, nel Novecento, è cambiata. Va inoltre riconosciuta l’irreversibilità di tali mutamenti: le dimostrazioni di incompletezza costituiscono un evento irrefutabile e come tale definitivo; «non è più possibile azzerare la conoscenza che sta alla base di questi eventi, a meno che si immagini una catastrofe definitiva che cancelli il sapere e le tecniche di cui disponiamo» (Melucci, 2000, p. 23).

3. La “natura interna” della matematica

Dunque i riflessi culturali del clima venutosi a creare a partire dagli anni Trenta del secolo scorso sono innegabilmente importanti: la tradizionale fiducia da sempre riposta nella matematica, come abbiamo notato, ha iniziato a essere oggetto di dibattito (dal punto di vista storico si veda: Borga & Palladino, 1997).

È significativo osservare che la discussione alla quale abbiamo fatto cenno non deriva da considerazioni esterne alla matematica, ad esempio da difficoltà o da incongruenze sul piano applicativo.¹ La matematica e la realtà restano legate inscindibilmente: secondo Luis Radford ed Heather Empey (2007, p. 250, traduzione nostra), «gli oggetti matematici sono strumenti intellettuali e cognitivi che ci permettono di riflettere e di agire sul mondo – sia al livello concreto che a uno più astratto e generale (dal conteggio concreto ai gruppi astratti commutativi, dall’esperienza dei moti alle equazioni differenziali, dai nostri dintorni fenomenologici con le idee in essi incorporate ad esempio di distanza fino agli spazi topologici etc.)». L’uomo dei nostri giorni ha ancora ben chiare in mente le parole di Galileo, il quale riconobbe che la matematica è il linguaggio nel quale è scritto l’universo (Galilei, 1980, I, pp. 631–632). E poche decine di anni fa John Von Neumann (1903–1957) ribadì che «quando una disciplina matematica si allontana dalla sua sorgente empirica [...] essa incontra pericoli molto gravi. Essa diventa sempre più estetizzante, sempre più esclusivamente *l’art pour l’art*. [...] C’è il grave pericolo che la materia si sviluppi lungo la linea di minor resistenza, che la corrente, così lontana dalla sua sorgente, si divida in una moltitudine di rami insignificanti [...] In ogni caso mi sembra che il solo rimedio sia un ritorno di ringiovanimento alla sorgente: la reiniezione di idee più o meno direttamente empiriche» (cit. in Lerda, 2007, p. 99).

Non è dunque il legame tra la matematica e la realtà ad essere in discussione. La situazione di passaggio (se non di difficoltà) in cui la matematica viene oggi a trovarsi dipende direttamente dalla “natura interna” della matematica stessa, riprendendo con tale espressione una categoria cara a Jürgen Habermas (2003, pp. 112–113). È all’interno della matematica che si sono sviluppate, ovvero sono state evidenziate, delle situazioni difficilmente descrivibili mediante le forme linguistiche e le categorie della nostra tradizione culturale. Se «il progetto moderno è quello di conquistare e sottomettere alla razionalità della tecnica tutti i territori esterni che sfuggono alla presa della società» (Melucci, 2000, p. 22), dobbiamo riconoscere che la matematica sembra svincolarsi da tutto ciò. A tale progetto viene così a mancare uno strumento fondamentale, ma non per carenze “tecniche” di adeguatezza, bensì per questioni filosofiche o fondazionali.

¹ Le quali, peraltro, non possono essere escluse. In generale, molti sono gli spunti che si traggono da Paul Feyerabend (1924–1994) che scrive: «I materiali di cui uno scienziato *realmente* dispone, le sue leggi, i suoi risultati sperimentali, le sue tecniche matematiche, i suoi pregiudizi epistemologici, il suo atteggiamento nei confronti delle conseguenze assurde delle teorie che accetta, sono però per molti aspetti indeterminati, ambigui, e *mai pienamente separati dal suo sfondo storico*» (Feyerabend, 2003, p. 55, corsivi nel testo; inoltre: Bagni, 2006).

La trasmissione del sapere matematico non può non tener conto di questi elementi di novità, riconoscibili come componenti di un'ancor più ampia evoluzione culturale. In particolare, la didattica della matematica dovrebbe essere molto attenta a tali cambiamenti. Citiamo ancora Radford ed Empey (2007, p. 250) i quali, dopo aver ribadito che «gli oggetti matematici non sono entità preesistenti, ma piuttosto oggetti concettuali generati nel corso dell'attività umana», sottolineano che «la matematica è molto più di una forma di produzione del sapere – una pratica di teorizzazione. Se è vero che le persone creano la matematica, non è meno vero che, viceversa, la matematica influenza i modi di essere, di vivere e di pensare delle persone»: dunque «la matematica crea le condizioni per il sorgere di certe forme di soggettività e di comprensione».

Queste osservazioni spostano l'interesse su di una questione di primaria importanza: il ruolo sociale della matematica, aspetto che si sviluppa a partire dai processi di insegnamento–apprendimento e coinvolge radicalmente la matematica e le sue rappresentazioni (Font, Godino & D'Amore, 2007) nonché la sua didattica. Una matematica che cambia non può riflettersi in una didattica culturalmente e operativamente bloccata su posizioni tradizionali, riferite a concezioni superate o comunque destinate a una rapida obsolescenza.

4. Didattica e matematiche

Abbiamo riconosciuto che la natura interna della matematica, quella che potremmo mettere in relazione con una sua forma di “autocomprensione”, riflette una situazione culturale che deve essere considerata significativamente in fase evolutiva (e qui si potrebbero inserire importanti considerazioni sulle radici “geografiche” della matematica; ci limitiamo a indicare D'Ambrosio, 2002). Abbiamo poi rilevato che i problemi che tale evoluzione ha comportato e comporta non possono essere inquadrati e risolti all'interno di un ristretto ambito esclusivamente teorico. Citando ancora Melucci (2000, p. 13), notiamo che «risolvere problemi significa anche crearne di nuovi e per questo dovremo rinnovare continuamente i patti che ci tengono insieme». L'ambito didattico non si sottrae a ciò.

Per affrontare dunque tali problemi in senso opportunamente ampio sarebbe necessaria, come sopra osservato, una variazione linguistica e concettuale importante, corrispondente a un vero e proprio cambiamento di paradigma (nel senso di Kuhn, 1970). Ovviamente non è facile cambiare un paradigma, né ciò può essere stimolato o determinato dall'opera di singoli agenti (insegnanti, ricercatori, pensatori). Quali indicazioni possiamo quindi considerare per gestire in termini efficaci e consapevoli un momento come quello delineato?

Non pretendiamo di fornire qui un elenco di suggerimenti che peraltro, per quanto abbiamo appena visto, risentirebbero dell'influenza di un linguaggio tutt'altro che affrancato da impostazioni e categorie inevitabilmente datate. Ci limitiamo a indicare all'attenzione del lettore qualche spunto per una riflessione.

La possibilità che segnaliamo consiste in una concezione plurale (se non pluralistica) della matematica. Se è vero, come sopra affermato, che «gli oggetti matematici sono strumenti intellettuali e cognitivi che ci permettono di riflettere e di

agire sul mondo» (riprendendo la citazione di Radford & Empey, p. 250), è anche innegabile che tali strumenti riflettono le concezioni di chi li elabora, di chi li inquadra in regole e convenzioni, di chi li usa. All'origine e al centro della matematica troviamo dunque gli esseri umani, persone concrete che sono vissute e vivono all'interno di varie società, con esigenze e tradizioni culturali anche molto diverse. Sarebbe difficile immaginare che culture di base radicalmente diverse abbiano potuto produrre, nella storia, le stesse idee matematiche e possano comportare, oggi, gli stessi percorsi per avvicinarsi a quello che in termini troppo sbrigativi indichiamo con "fare matematica". Lucia Grugnetti e Leo Rogers osservano (in Fauvel & van Maanen, 2000, p. 46, traduzione nostra):

Mostrare come il pensiero matematico si sia sviluppato nelle differenze culture, come risposta alle necessità e alle idee presenti in società diverse, non solo rende possibile una più profonda comprensione dei concetti matematici, ma incoraggia una maggiore creatività nella loro applicazione in settori diversi. Una storia che mostri la diversità, piuttosto che l'universalità, dello sviluppo matematico aggiunge una dimensione stimolante alla disciplina stessa. In particolare, rende possibile l'ingresso in classe del mondo e della sua storia, in modo da contrastare ogni ristretta visione etnocentrica.

La dimensione geografica non può essere trascurata, anche per l'influenza che, quasi simmetricamente, la matematica può esercitare sui suoi utilizzatori. È il pensiero umano che, attraverso il linguaggio (anche matematico) e in un reciproco gioco di influenze, interagisce con la realtà: dal pensiero al linguaggio ma, ricordando Vygotskij (1990), anche con il linguaggio generatore di pensiero.² Nella stessa direzione, e più particolarmente, è opportuno garantire la necessaria attenzione ai processi semiotici di formazione delle idee matematiche, ad esempio collegando l'uso dei segni, secondo la classificazione di Charles Sanders Peirce (1839–1914) icone, indici o simboli, a scelte particolari, culturalmente situate e certamente non assimilabili a un unico atteggiamento standardizzato (Peirce, 2003; in Bagni, 2007 si vedano i capitoli I e VI). Commentando la posizione peirceana, Habermas sottolinea l'influenza del linguaggio anche sulle fasi dell'esperienza non direttamente influenzate dalla simbolizzazione: «ogni base d'esperienza sulla quale poggiamo per pensare è mediata attraverso interpretazioni implicitamente inferenti. Queste inferenze per quanto rudimentali sono legate a segni simbolici. Perciò anche le *percezioni* si muovono già nella dimensione della rappresentazione mediante segni»; da ciò segue che «neppure esistono elementi ultimi della percezione che siano immediatamente certi indipendentemente dalle nostre interpretazioni» (Habermas, 1983, pp. 97–98). Dunque il linguaggio in generale assume un ruolo determinante nello stabilire le condizioni del costituirsi degli oggetti dell'esperienza, in particolare attraverso la sua funzione simbolizzante.³

² In omaggio a quello che il linguista svedese Esaias Tegner chiamava, già nel XIX secolo, *språkets makt över tanken*, "il potere del linguaggio sul pensiero" (Eco & Sebeok, 2000, p. 24).

³ Qui, come ben rilevato da Andrea Sartori (1996, p. 89), si può considerare la nota tesi di Karl Otto Apel sulla trasformazione semiotica del trascendentale kantiano (Apel, 1977).

5. Dall'epistemologia all'ermeneutica

Restano alcuni aspetti da considerare: innanzitutto ci si può chiedere se una concezione “plurale” della matematica non possa determinarne una sorta di tramonto, teorico o pratico che sia. La matematica “serve”, costituisce la base della tecnologia, componente essenziale della nostra civiltà (anche se Heidegger non esita a contrapporre il “pensiero calcolante” al “pensiero meditante”: il «tempo del pensiero [...] è un tempo diverso rispetto a quello del calcolo che oggi da tutte le parti attrae tanto il nostro pensiero. La macchina pensante, oggi, può in un secondo compiere operazioni in cui compaiono migliaia di relazioni; ed esse, nonostante la loro utilità tecnica, sono inessenziali»: Heidegger, 1982, p. 15). Non è immaginando più approcci matematici diversi che si può garantire il buon funzionamento della matematica stessa. Riteniamo però che questo sia, in fondo, un falso problema: non si afferma infatti che alla “matematica che serve” si possa sostituire una pluralità di approcci contrastanti e scoordinati. La scelta della “matematica che serve” può (probabilmente, deve) essere mantenuta.⁴

Ma c'è di più: se per molti versi è innegabile un certo tipo di matematica, nella nostra attuale società occidentale, venga posta alla base dello sviluppo tecnologico, ciò non significa che solo quella sia “la matematica che serve”. Ogni forma di matematica “serve” nella cultura in cui essa è stata sviluppata ed elaborata. È importante essere consapevoli (noi e i nostri allievi) di ciò. E del fatto che ogni eventuale preferenza accordata a una forma di matematica è una *scelta*, non l'obbligatoria contemplazione di una realtà “là fuori”, per usare la celebre espressione di Richard Rorty (1931–2007: Rorty, 2003, p. 11; Bagni, 2008). Un dialogo è sempre possibile e auspicabile: una “conversazione” sviluppata sul piano dell'ermeneutica e non dell'epistemologia tradizionale (Rorty, 2004, pp. 631–637; Melucci, 2000, pp. 81–82) può essere mantenuta anche con chi avesse fatto scelte diverse dalla nostra.⁵ Un esempio storico-geografico contribuirà a illustrare quanto affermato.

L'indiano Bhaskara (1114–1185, detto anche Bhaskara II o Bhaskara Achārya, “Bhaskara il maestro”), si occupò del valore del *kha-hara*, una frazione avente denominatore nullo. Egli scrisse in *Bijaganita* (cit. in Datta & Singh, 1935, p. 243, traduzione nostra):

Una quantità divisa per zero diventa una frazione il cui denominatore è zero [*kha-hara*]. Questa frazione viene denominata quantità infinita. In questa quantità avente zero come divisore non c'è alcuna alterazione, sebbene molti possano

⁴ Lo stesso Heidegger scrive: «possiamo invero utilizzare gli oggetti tecnici e tuttavia allo stesso tempo tenerci liberi da essi, pur nella loro normale utilizzazione, in modo da distanziarcene in ogni momento. [...] Noi ammettiamo gli oggetti tecnici nel nostro mondo di tutti i giorni e nello stesso tempo ve li teniamo fuori, cioè li lasciamo a se stessi come cose che non sono niente di assoluto, che anzi non possono fare a meno esse stesse di qualcosa di più alto. Potremmo designare con un'antica espressione questo atteggiamento contemporaneamente di sì e no riguardo al mondo tecnico come la serena, libera disposizione delle cose» (Heidegger 1959, pp. 24–25, citato in: Mazzarella, 1981, pp. 284–285).

⁵ Melucci (2000, p. 77) suggerisce di ritornare criticamente alle «radici della cultura occidentale», a quel momento della tradizione greca in cui emerse «la contrapposizione fra *mythos* e *logos*, fra il mito e la ragione o il discorso argomentativo».

essere aggiunti o tolti, così come nessun cambiamento può aver luogo nella divinità immutabile quando i mondi vengono creati o distrutti, anche se numerosi ordini di esseri vengono assorbiti o creati.

Ebbene, come possiamo oggi cercare di esprimere tali considerazioni mediante una scrittura moderna? Una prima ipotesi potrebbe essere:

$$\frac{1}{0} + 5 = \frac{1+5 \cdot 0}{0} = \frac{1+0}{0} = \frac{1}{0}$$

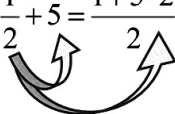
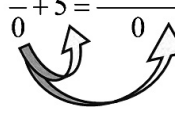
espressione che aggiungerebbe “molti” (“5”, ovviamente altri numeri possono essere considerati) a “una frazione il cui denominatore è zero [*kha-hara*]”, ma che dobbiamo classificare “matematicamente scorretta”. Essa, nonostante ciò, esprimerebbe in termini non del tutto banali, con i simboli (e i procedimenti) oggi in uso, la visione di Bhaskara. Pur senza nemmeno ipotizzare di accettare nella “nostra” matematica la scandalosa scrittura precedente, occupiamoci ancora del suo significato e cerchiamo di interpretarla: essa “estende” la procedura nota a tutti gli studenti per l’addizione di frazioni, esemplificata da

$$\frac{1}{2} + 5 = \frac{1+5 \cdot 2}{2} = \frac{1+10}{2} = \frac{11}{2}$$

alla (gravemente atipica!) situazione sopra considerata. Tale estensione non è accettabile, in quanto “1/0” non è una frazione; anzi, nella nostra moderna matematica occidentale, non è un oggetto matematico di alcun tipo. Per ottenere una scrittura corretta da presentare oggi nelle nostre aule scolastiche sarebbe opportuno ricorrere al concetto di limite e sostituire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ alla “frazione il cui denominatore è zero” (*kha-hara*):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} + 5 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

Ma tutto ciò è ben diverso da quanto sopra scritto, a parte le differenze legate alla sua correttezza: quest’ultima scrittura non fa alcun riferimento alle regole per l’addizione di frazioni. Si viene dunque a perdere quell’analogia “procedurale” che, pur essendo potenzialmente rischiosa e necessitando quindi di un controllo da parte dell’insegnante e degli studenti, può forse essere discussa anche dal punto di vista didattico:

| | |
|---|---|
| corretto | $\frac{1}{2} + 5 = \frac{1+5 \cdot 2}{2} = \frac{1+10}{2} = \frac{11}{2}$  |
| scorretto (per il “punto di partenza”) | $\frac{1}{0} + 5 = \frac{1+5 \cdot 0}{0} = \frac{1+0}{0} = \frac{1}{0}$  |

Potremmo a questo punto citare l'iconicità, nell'approccio peirceano, delle espressioni algebriche (Peirce, 2003, § 2.279) e chiederci quali possibilità e quali limiti vadano associati a un approccio iconico, ma ci allontaneremmo dalla questione in esame. Un aspetto da mettere a fuoco è invece il seguente: è lecito (e se sì, in che senso) interpretare Bhaskara modernamente, alla luce di Cauchy e Weierstrass? Il punto cruciale è che non sarebbe ovviamente possibile far riferimento agli stessi "principi generali" (Feyerabend, 2003) nell'accostare l'argomentazione di un indiano che descrive le caratteristiche del reciproco di 0 pensando all'immensità della divinità alle considerazioni di un moderno matematico occidentale che introduce il concetto di limite con la definizione "dell' ϵ - δ " o topologicamente. Idealmente, il moderno matematico occidentale comprenderebbe, con ogni probabilità, l'argomentazione dell'indiano (e forse viceversa), la considererebbe curiosa, magari divertente: tra i due personaggi, dunque, non sarebbe inibito il dialogo, quella che Rorty (2004) chiama una conversazione. Tuttavia non potrebbe essere raggiunto un accordo razionale, ovviamente a causa della rilevata mancanza di principi generali "matematici" di riferimento condivisi e, più a monte, per la plausibile mancanza di una comune concezione di "razionalità".⁶

6. Verso una conclusione...

La nostra riflessione, a parte l'esempio ora visto, si è sviluppata sul piano teorico. Sarà necessario affrontare il problema, didatticamente essenziale, di tradurre le enunciazioni di principio in scelte operative. Quale ruolo didattico attribuire ad esempi come quello sopra proposto? In che senso può o deve essere inteso un confronto dialettico tra forme diverse di matematica e di razionalità? Quali livelli scolastici possono essere interessati da un percorso del genere? Questi aspetti (e altri che possono essere affrontati con riferimento alla problematica delineata) esulano dagli scopi di questa riflessione. Ci limitiamo comunque a segnalare che già nell'ambito dei programmi tradizionali di matematica è possibile parlare di matematiche al plurale: le geometrie non euclidee possono essere sviluppate in questo senso; al di là dell'esempio poco fa schizzato, la possibilità di introdurre e di giustificare in modo vario, sulla base di diversi standard di rigore (anch'essi da inquadrare sia storicamente che geograficamente) una stessa proposizione può fornire occasione per riflessioni significative (un riferimento stimolante è: D'Amore, 2005). E altri esempi potranno essere elaborati, anche tenendo presente le molte opportunità collegabili a un approccio interculturale.

La riflessione nella matematica e sulla matematica sta radicalmente rivedendo le concezioni del passato sulla certezza, sulla precisione, sul rigore. Gian-Carlo Rota (1932–1999) ha osservato che «forse sono le nostre idee vittoriane sulla necessità della certezza di assiomatizzazione che sono ingenua e non realistiche. Forse il

⁶ Per un approfondimento sulla razionalità e sulle sue diverse "radici", fondamentale è la riflessione sviluppata in: Habermas, 2001. Più in generale, sarebbe interessante approfondire gli eventuali elementi da considerare comuni all'antico approccio indiano e a quello moderno: entrambi giungono alla considerazione di una qualche "quantità infinita", anche se attraverso processi lontanissimi, "mezzi semiotici di oggettivazione" ben diversi (Radford, 2003).

nostro compito consiste nel vivere rigorosamente con l'incertezza» (Kac, Rota & Schwarz, 1986, p. 3; trad. in Lerda, 2007, p. 98); e lo stesso Rota non esita a puntare l'indice contro l'«attuale follia per la precisione» (Kac, Rota & Schwarz, 1986, p. 264; trad. in Lerda, 2007, p. 98). Non vogliamo certo sostenere che la matematica dei nostri giorni possa pensarsi ridotta a una forma di follia. Una matematica intesa alla stregua di una “follia” ci porterebbe almeno ad affermare, con il Bardo, *Though this be madness, yet there is method in 't* (Hamlet, Atto II). Ma in un momento in cui la matematica sta profondamente riflettendo sulla propria natura interna, la sua didattica non può ostinarsi a parlare «il linguaggio del passato» (Melucci, 2000, p. 19). Sarebbe questa la vera follia.

Riferimenti bibliografici

- Alsina Catalá, C. (1986), *Matemáticas postmoderna. Arbor: Ciencia, pensamiento y cultura*. 483, 89–96.
- Apel, K.O. (1977). *Comunità e comunicazione*. Torino: Rosenberg & Sellier (*Transformation der Philosophie* Frankfurt am Main: Suhrkamp).
- Bagni, G.T. (2006). *Linguaggio, storia e didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- Bagni, G.T. (2007). *Rappresentare la matematica. Simboli, parole, artefatti e figure*. Roma: Aracne.
- Bagni, G.T. (2008). Richard Rorty (1931–2007) and his legacy for mathematics educators. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 1, 1–2.
- Borga, M. & Palladino, D. (1997). *Oltre il mito della crisi. Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*. Brescia: La Scuola.
- Bramanti, M. (2003). Che cos'è la matematica. *Emmeciquadro*, 17, 38–48.
- Casari, E. (1973). *La filosofia della matematica del '900*. Firenze: Sansoni.
- Courant, R. & Robbins, H. (2000). *Che cos'è la matematica?* Torino: Bollati Boringhieri.
- D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2005). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (Nyaya). *For the Learning of Mathematics*, 25, 2, 26–32.
- Datta, B. & Singh, A.N. (1935). *History of Hindu Mathematics: a source book. Part 1, numeral notation and arithmetic*. Lahore: Motilal Banarsi Das.
- Eco, U. & Sebeok, T.A. (a cura di) (2000). *Il segno dei tre – Holmes, Dupin, Peirce*. Milano: Bompiani (1983, *The sign of three – Holmes, Dupin, Peirce*. Bloomington: Indiana University Press).
- Fauvel, J. & van Maanen, J. (a cura di) (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer.
- Feyerabend, P.K. (2003). *Contro il metodo*. Milano: Feltrinelli (1975, *Against method. Outline of an anarchistic theory of knowledge*. London: Verso).
- Font, V., Godino, J.D. & D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27, 2, 9–15.
- Gadamer, H.G. (2000). *Verità e metodo*. G. Vattimo (a cura di). Milano: Bompiani (1960, *Wahrheit und Methode: Grundzüge einer philosophischen Hermeneutik*. Tübingen: Mohr).
- Galilei, G. (1980). Il Saggiatore. In F. Brunetti (a cura di), *Opere di Galileo Galilei*, Torino: UTET.

- Gödel, K. (1999). *Opere, volume 1 1929–1936*. Torino: Bollati Boringhieri (1986, *Collected Works, Volume 1, Publications 1929–1936*. New York–Oxford: Oxford University Press–Clarendon).
- Habermas, J. (1983). *Conoscenza e interesse*. Bari–Roma: Laterza (1968, *Erkenntnis und Interesse*. Frankfurt am Main: Suhrkamp).
- Habermas, J. (1991). *Il pensiero post-metafisico*. Bari–Roma: Laterza (1988, *Nachmeta-physisches Denken. Philosophische Aufsätze*. Frankfurt am Main: Suhrkamp).
- Habermas, J. (2001). *Verità e giustificazione*. Roma–Bari: Laterza (1999, *Wahrheit und Rechtfertigung. Philosophische Aufsätze*. Frankfurt am Main: Suhrkamp).
- Habermas, J. (2003). *Il discorso filosofico della modernità. Dodici lezioni*. Roma–Bari: Laterza (prima ed. 1997; opera originale: 1985, *Der philosophische Diskurs der Moderne. Zwölf Vorlesungen*. Frankfurt am Main: Suhrkamp).
- Heidegger, M. (1959). *Gelassenheit*. Pfullingen: Neske (1983, *L'abbandono*. Genova: Il Melangolo).
- Heidegger, M. (1982). Identità e differenza. *Aut Aut*, 187–188, 2–38 (1957, *Identität und Differenz*. Pfullingen: Neske).
- Kac, M., Rota, G.C. & Schwarz, T.T. (1986). *Discrete Thoughts*. Boston: Birkhäuser.
- Kuhn, T.S. (1970). *La struttura delle rivoluzioni scientifiche*. Torino: Einaudi (1962, *The structure of scientific Revolutions*. Chicago: University of Chicago).
- Lerda, F. (2007). *Intelligenza, conoscenza, realtà*. Soveria Mannelli: Rubbettino.
- Lolli, G. (2002). *Filosofia della matematica*. Bologna: Il Mulino.
- Mazzarella, E. (1981). *Tecnica e metafisica. Saggio su Heidegger*. Napoli: Guida.
- Melucci, A. (2000). *Culture in gioco. Differenze per sopravvivere*. Milano: Il Saggiatore.
- Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic–Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.
- Radford, L. & Empey, H. (2007). Culture, knowledge and the Self: Mathematics and the formation of new social sensibilities in the Renaissance and Medieval Islam. *Revista Brasileira de História da Matemática*. Festschrift Ubiratan D'Ambrosio, Especial 1, 231–254.
- Peirce, Ch.S. (2003). *Opere*. M.A. Bonfantini (a cura di). Milano: Bompiani (1931–1958, *Collected Papers*. I–VIII. Cambridge: Harvard University Press).
- Rorty, R. (2003). *La filosofia dopo la filosofia*. Laterza, Roma–Bari (1989, *Contingency, irony, and solidarity*. Cambridge: Cambridge University Press).
- Rorty, R. (2004). *La filosofia e lo specchio della natura*. Milano: Bompiani (1979, *Philosophy and the mirror of nature*. Princeton: Princeton University Press).
- Sartori, A. (1996). Linguaggio e antropologia. Habermas e Gehlen: un confronto critico. *Fenomenologia e società*, 3, 89–105.
- Vygotskij, L.S. (1990). *Pensiero e linguaggio. Ricerche psicologiche*. Roma–Bari: Laterza (1934, *Myšlenie i rec'.* *Psichologičeskie issledovan'ja*. Moskva–Leningrad: Gosudarstvennoe Social'no–Ekonomičeskoe Izdatel'stvo).