L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate
22B, 4 (1999), 353-372

Limite e visualizzazione: una ricerca sperimentale

GIORGIO T. BAGNI
NUCLEO DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA, BOLOGNA

IL MATTO Sapete far fruttare il nulla, zietto?
LEAR No di certo, ragazzo. Da nulla non si cava nulla.

William Shakespeare, *Re Lear*, I, IV

Il limite è uno dei più importanti concetti con i quali gli allievi sono chiamati a confrontarsi nel corso degli studî della scuola secondaria superiore. Si tratta di una nozione fondamentale, sulla quale si basa l'intera Analisi matematica; ma il suo apprendimento può non essere semplice. Il processo di limite, infatti, può essere intuitivo in senso matematico ma non in senso cognitivo, e dunque un importante compito dell'insegnante dovrebbe essere quello di proporre all'allievo esperienze che consentano il corretto sviluppo dei concetti infinitesimali in chiave cognitiva (come osservato in: Tall, 1985, p. 51).

L'apprendimento del concetto di limite può venire ostacolato da numerose difficoltà, alcune delle quali riflettono quelle che, storicamente, si sono presentate ai matematici che, nei secoli, si sono occupati dei procedimenti infinitesimali (per un'ampia bibliografia si veda: D'Amore, 1996 e 1997) ([1]). Alcuni degli ostacoli che possono rendere delicato l'apprendimento del concetto di limite sono dunque di natura epistemologica.

____

([1]) Dimarakis & Gagatsis (1997) correlano alcune difficoltà incontrate dagli allievi all'evoluzione storica (per la storia del limite, riferita agli aspetti didattici: Boyer, 1969; Cornu, 1981). Concordiamo con F. Furinghetti e A. Somaglia, che sottolineano come la storia può riferirsi ad un'immagine 'sociale' della matematica, ma può evidenziare la dimensione culturale dal punto di vista metodologico (Furinghetti & Somaglia, 1997, p. 43; inoltre: Pepe, 1990; Furinghetti, 1993). J. Fauvel e J. van Maanen osservano che l'inserimento della storia nell'insegnamento implica un'aspettativa in termini di migliore apprendimento e ciò rende la ricerca in tal senso una parte importante della ricerca in didattica della matematica (Fauvel & van Maanen, 1997).

INTRODUZIONE: IL LINGUAGGIO E LA VISUALIZZAZIONE

Un'efficace didattica dei concetti infinitesimali deve attentamente considerare gli ostacoli epistemologici ai quali abbiamo accennato. Scrive G. Vergnaud:

"Mi sembra interessante analizzare in dettaglio le differenti difficoltà che incontrano gli studenti nel corso dell'apprendimento della matematica. Alcune di queste difficoltà si reggono solo sul fatto che esistono dei salti mentali, senza che questi salti entrino violentemente in contraddizione con i concetti e le competenze formate precedentemente. Delle altre, al contrario, formano degli ostacoli epistemologici importanti e duraturi... Non si salta un ostacolo epistemologico, lo si analizza, per cambiare idea e capire la relazione tra la concezione nuova da formare e quella precedente... Il modo in cui la matematica viene insegnata può rendere più o meno agevole il superamento di questi ostacoli: esistono delle presentazioni che rafforzano gli ostacoli epistemologici invece che facilitarne il superamento. Si può allora parlare di ostacoli didattici" (Vergnaud, 1989, pp. 168-169; il riferimento è a: Brousseau, 1983).

Dunque per il superamento degli ostacoli epistemologici alcune scelte didattiche possono rivelarsi decisive ([2]).

Il linguaggio impiegato nella trattazione del limite, ad esempio, è un elemento importante (come vedremo, esso può favorire la formazione di modelli spontanei sui quali possono basarsi alcune misconcezioni: Cornu, 1980); J. Mamona-Downs osserva che "per il concetto di limite [...] le percezioni sono di natura *dinamica*, e tale tendenza è sostenuta anche dall'importanza linguistica di parole come 'si avvicina', 'tende' etc." (Mamona-Downs, 1990, p. 20; Mamona, 1987). I. Dimarakis e A. Gagatsis considerano le interazioni tra il linguaggio matematico e la lingua naturale e notano come le espressioni *tende a*, *limite*, *si avvicina* e *converge*, equivalenti dal punto di vista matematico, non lo siano nel linguaggio quotidiano (Dimarakis & Gagatsis, 1997).

J. Monaghan rileva che *approssima* è un termine vago e può risultare di difficile comprensione; inoltre "*tende a* è spesso visto come simile a *si avvicina* in un contesto matematico, sebbene il suo impiego quotidiano non suggerisca situazioni riferibili a limiti. Ad entrambe le frasi è data un'interpretazione *dinamica*". Il termine *converge* può generare confusione: il suo significato può essere associato a linee convergenti (Monaghan, 1991, pp. 23-24) ([3]).

____

([2]) R. Schwarzenberger (1980) osserva che le difficoltà collegate all'Analisi non ammettono spiegazioni semplici e che dunque ogni formulazione intuitiva dei concetti infinitesimali contiene implicitamente alcune difficoltà (sugli ostacoli epistemologici indichiamo: Sierpinska, 1987, 1990 e 1994); sulle incoerenze relative all'Analisi: Tall, 1990.

([3]) Cornu (1980) afferma che il termine *limite* indica spesso qualcosa di avvertibile in senso concreto, mentre l'espressione *tende a* sembra indicare una nozione vaga.

L'espressione linguistica non è l'unico registro rappresentativo nel quale è possibile esprimere i concetti infinitesimali: gli oggetti matematici non vengono percepiti mediante i sensi e ciò rende necessario il ricorso a diverse rappresentazioni semiotiche (Sfard, 1991, p. 3; Duval, 1993, p. 37); ma, ad esempio, l'apprendimento mediante le rappresentazioni grafiche non può essere condotto basandosi soltanto sull'interpretazione spontanea delle figure (Duval, 1994).

Un lavoro ben noto di E. Fischbein è dedicato specificamente alla rappresentazione visuale di oggetti matematici e alla sua importanza nella didattica della matematica. Illustrando la propria *teoria dei concetti figurali*, Fischbein afferma che dovrebbe essere cura dell'insegnante controllare l'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei contenuti concettuali su quelli figurali (Fischbein, 1993, p. 156). Nel caso dei concetti infinitesimali e, in particolare, del limite una simile attività richiesta al docente assume, come vedremo, importanza essenziale.

STRUTTURA DELLA PRESENTE RICERCA

La visualizzazione, come mezzo per la rappresentazione di oggetti matematici, assume importanza primaria nella didattica del limite e dell'infinitamente piccolo ([4]): ma quale concezione di infinitesimo è suggerita dalle rappresentazioni visuali? Un infinitesimo potenziale, intuitivamente più vicino all'esperienza (o all'immaginazione) degli allievi, ovvero un più astratto ed impegnativo infinitesimo attuale? ([5]) E quali effetti si manifestano sull'apprendimento degli allievi della scuola secondaria superiore, nei due casi ora prospettati?

____

([4]) Abbiamo già evidenziato l'opportunità di usare cautela nell'impiego dei procedimenti visuali nella didattica della matematica nella scuola superiore (Bagni, 1997a).

([5]) A proposito dell'infinitesimo potenziale contrapposto all'attuale citiamo I. Dimarakis e A. Gagatsis, che evidenziano le radici storiche delle concezioni di limite basate su impostazioni dinamiche (potenziali) e statiche (attuali): "Fino all'era di Weierstrass, il concetto di limite era stato introdotto mediante connotazioni di movimento continuo: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa che $f(x)$ si avvicina a L quando x si avvicina ad a. Weierstrass contestò questa descrizione *dinamica* di limite e la sostituì con una *statica*, che coinvolge soltanto dei numeri reali. Questa definizione non si basa sulla nozione di movimento [...]; è la cosiddetta definizione *epsilon-delta*: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa che, comunque dato $\varepsilon>0$, esiste un numero $\delta>0$ tale che $|f(x)-L|<\varepsilon$ se $|x-a|<\delta$. Robinson (1918-1974) dimostrò che gli infinitesimi esistono come oggetti matematici veri e proprî e che essi possono essere impiegati come fondamento sul quale basare un rigoroso sviluppo alternativo del Calcolo. La sua Analisi non-standard [...] riprende il modello di Leibniz-Cauchy, nel quale i numeri appartenenti alla retta reale hanno intorni infinitesimi" (Dimarakis & Gagatsis, 1997; si veda inoltre: Bagni, 1997b).

Possiamo sintetizzare il progetto della nostra ricerca nella tabella seguente:

Struttura della ricerca (allievi di 18-19 anni)	
1. Esame della situazione dopo la tradizionale introduzione del concetto di limite. *Test I: presenza di misconcezioni*	**2. Intervento** per rimuovere le misconcezioni evidenziate in (1). *Nuova introduzione del limite come concetto topologico*
3. Controllo della situazione dopo l'intervento (2). *Test II: revisione delle risposte al test I: il limite come concetto topologico*	

1. LA TRADIZIONALE INTRODUZIONE DEL LIMITE

1.1. IL TEST I

Abbiamo preso in esame una classe di V Liceo scientifico, a Treviso, per un totale di 27 allievi ([6]). Al momento del test erano stati trattati i limiti; la definizione di limite era stata data nella forma tradizionale per la scuola secondaria, *non* preceduta dallo studio della topologia elementare; il libro di testo in uso fa riferimento, in una fase introduttiva, ad una concezione *dinamica* del limite, per poi dare la definizione *statica* ([7]): l'insegnante ha utilizzato alcuni diagrammi presenti nel testo e non ha sottolineato, nella fase di spiegazione, la differenza tra l'approccio intuitivo e la definizione. Erano stati presentati e dimostrati i primi teoremi (tra i quali quello dell'unicità del limite).

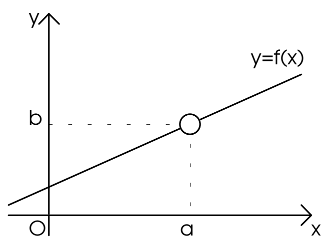
Agli studenti abbiamo proposto il seguente test (era stato specificato che, nei disegni, la linea continua indica che tutti i punti sono definiti dalla $y = f(x)$; il circoletto vuoto evidenzia che il punto in questione non è definito in quella posizione; il circoletto pieno indica invece il punto da considerare):

____

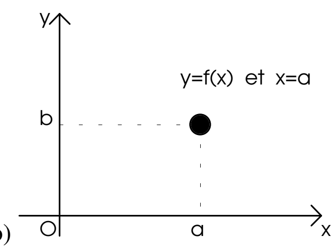
([6]) Come vedremo, la classe esaminata può essere considerata di 'buon livello".

([7]) Riportiamo una frase dal testo, seguito dall'insegnante nella spiegazione: 'Per introdurre il concetto di limite, consideriamo ad esempio la funzione f: $D \to \mathbf{R}$, $x \to (2x^2-8)/(x-2)$ essendo $D = \mathbf{R}-\{2\}$. La funzione non è definita per $x = 2$; possiamo tuttavia calcolarla in punti che si approssimano a 2 tanto per difetto che per eccesso... A mano a mano che x si avvicina a 2, i valori di $f(x)$ si avvicinano sempre più a 8...". Una concezione *dinamica* del limite (con una concezione potenziale dell'infinitesimo) ci sembra dunque evidente, almeno nella fase introduttiva. La definizione di limite viene poi data nel modo seguente (in accordo con Weierstrass): 'Sia f una funzione definita in un intorno I del punto x_0, senza che sia necessariamente definita in x_0. Si dice che il numero l è il limite della funzione f nel punto x_0 [...] se, fissato comunque un numero $\varepsilon>0$, è possibile determinare in corrispondenza di esso un numero $\delta_\varepsilon>0$, tale che, per ogni x appartenente a I verificante la condizione $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$, risulti $|f(x)-l|<\varepsilon$".

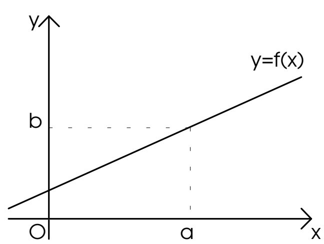
Dire se le seguenti figure sono compatibili con le relative scritture:



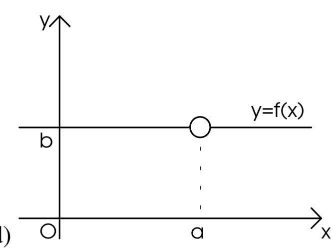
a) $\lim_{x \to a} f(x) = b$



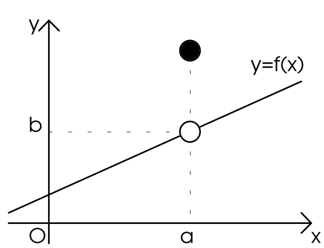
b) $\lim_{x \to a} f(x) = b$



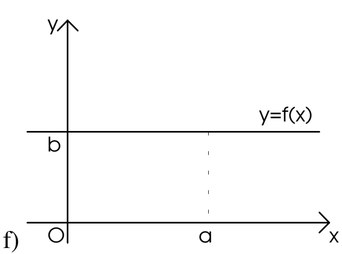
c) $\lim_{x \to a} f(x) = b$



d) $\lim_{x \to a} f(x) = b$



e) $\lim_{x \to a} f(x) = b$



f) $\lim_{x \to a} f(x) = b$

Abbiamo voluto analizzare il rapporto presente nelle concezioni degli allievi tra la nozione di limite (tradizionalmente appresa) e la visualizzazione della situazione geometrica alla quale il limite può riferirsi.

In particolare:

- considerando il limite: $\lim_{x \to a} f(x) = b$, quale importanza riservano gli allievi al valore assunto dalla funzione f per $x = a$ (rispetto ai valori assunti dalla f per x appartenente ad un intorno di a, con $x \neq a$)?
- quale posizione viene assunta dagli allievi rispetto al limite di una funzione costante (per la quale, dunque, la $f(x)$ non "approssima" il limite)?

È importante sottolineare che le questioni sopra presentate non vengono introdotte agli allievi in modo esplicito, cioè ricorrendo direttamente ad una descrizione linguistica (con l'impiego di una terminologia matematica): bensì esse sono proposte, implicitamente, in un registro rappresentativo visuale.

Il tempo accordato per rispondere alle domande del test è stato di 30 minuti. Tutti gli allievi hanno riconsegnato il foglio del test; 5 allievi (19%) hanno riconsegnato il foglio prima della scadenza dei 30 minuti.

1.2. RISULTATI DEL TEST I E PRIME CONSIDERAZIONI

a)	compatibile:	18 (67%)		
	non compatibile:	9 (33%)	nessuna risposta:	0 (0%)
b)	compatibile:	5 (19%)		
	non compatibile:	19 (70%)	nessuna risposta:	3 (11%)
c)	compatibile:	21 (78%)		
	non compatibile:	5 (19%)	nessuna risposta:	1 (3%)
d)	compatibile:	12 (44%)		
	non compatibile:	10 (37%)	nessuna risposta:	5 (19%)
e)	compatibile:	17 (62%)		
	non compatibile:	5 (19%)	nessuna risposta:	5 (19%)
f)	compatibile:	12 (44%)		
	non compatibile:	10 (37%)	nessuna risposta:	5 (19%)

È immediato rilevare che non pochi allievi hanno palesato una qualche difficoltà nel collegare la situazione grafica espressa al concetto di limite: le percentuali delle risposte corrette sono state rispettivamente 67%, 70%, 78%, 44%, 62%, 44%, con una media generale del 60%.

Significativa ci sembra la bassa percentuale di risposte esatte (44%) ai quesiti (d), (f): può dunque sembrare che il concetto di limite venga svincolato dalla rappresentazione grafica quando la funzione considerata è costante, quindi quando non può essere visualizzato il "progressivo avvicinamento" dei valori di $f(x)$ al limite b (corrispondente al "progressivo avvicinamento" di x al valore a: si ricordi l'impostazione presente nel libro di testo in uso nella classe esaminata, alla quale è riferita la precedente nota 7) ([8]).

1.3. INTERVISTE AGLI ALLIEVI (TEST I)

Gli allievi sono stati invitati a riflettere sulle risposte date e sono stati intervistati singolarmente (senza però fornire informazioni sulle risposte esatte). Alcune affermazioni meritano di essere riportate; ad esempio:

"Nella risposta (e) ho applicato il teorema dell'unicità del limite. Ho seguìto la funzione ed ho visto che tendeva a b, poi ho visto il puntino più in alto" ([9]) (Francesco; il teorema dell'unicità del limite è stato citato da altri due allievi, uno dei quali ha deciso di esporre, peraltro correttamente, l'enunciato di tale teorema nel corso dell'intervista. Appare, qui, l'azione del contratto didattico: forse l'insegnante avrà ricordato molte volte l'opportunità di enunciare un teorema quando lo si cita...).

La misconcezione è evidente: i tre studenti hanno interpretato come limite sia il valore assunto dalla funzione f per $x = a$, sia il valore desumibile per $f(x)$ dall'appartenenza di x ad un intorno di a, con $x \neq a$. Questa compresenza di due "limiti" distinti porta a contraddire il teorema dell'unicità del limite, ben noto agli allievi. Francesco dimostra di essere stato ingannato dalla rappresentazione visuale che, in questo caso, viene a costituire un ostacolo decisivo (e diremmo un ostacolo di tipo didattico più che di tipo epistemologico, ricordando ancora la distinzione di Brousseau, 1983).

Interessanti sono alcune risposte riferite alle funzioni costanti:

"Per le funzioni costanti non c'è bisogno di usare il limite. Tutti i punti hanno la stessa ordinata" (Guido).

"Con il limite devo descrivere la variazione della y causata dalla variazione della x" (Stefano).

"Ho pensato che il limite non avesse senso perché la funzione data non è funzione di x" (Norma).

([8]) Dimarakis & Gagatsis (1997) osservano che l'affermazione secondo la quale il limite è un confine che non può essere raggiunto sembra ben salda nelle menti degli allievi ed è la causa di molte misconcezioni (si veda inoltre: Gagatsis & Dimarakis, 1996). Davis & Vinner (1986, pp. 298-300) indicano cinque cause di misconcezioni: l'influenza del linguaggio; la realizzazione di rappresentazioni matematiche a partire da preesistenti frammenti pre-matematici; i processi collegati alla costruzione di concetti; l'influenza di esempi specifici; le errate interpretazioni dell'esperienza personale.

([9]) Il termine "seguìto" è particolarmente indicativo a proposito della percezione *dinamica* del grafico di una funzione da parte dell'allievo!

Da queste giustificazioni possiamo evidenziare alcune misconcezioni: la bassa percentuale di risposte corrette ai quesiti (d), (f), riferiti ad una funzione costante, può confermare che l'infinitesimo, in forma intuitiva, è ancora inteso in termini potenziali. Consideriamo attentamente l'affermazione di Guido: se non ci sono due corrispondenti variazioni (per le x e per le y) risulta impossibile considerare il "progressivo avvicinamento", l'indefinito approssimarsi della funzione al limite (in una concezione, dunque, *dinamica*).

1.4. CONCLUSIONI (TEST I): ALCUNE MISCONCEZIONI

Dai risultati del test e dalle interviste menzionate emerge chiaramente che l'uso delle rappresentazioni visuali è importante (e delicato) nella didattica del limite nella scuola secondaria superiore ([10]). La varietà dei registri rappresentativi, giustamente auspicata da Duval (1993), non è un obiettivo semplice da raggiungere: talvolta gli stessi grafici cartesiani possono essere fonte di dubbi e di perplessità per l'allievo (fino a contribuire al sorgere di misconcezioni).

Nonostante il campione considerato sia piuttosto esiguo ([11]), è possibile evidenziare soprattutto la presenza di due misconcezioni principali (che identificheremo con le denominazioni seguenti):

- **Misconcezione della funzione valutata nel punto.** Il valore assunto dalla funzione f per $x = a$ viene interpretato come limite $\lim_{x \to a} f(x)$ (e talvolta tale valore è considerato insieme al valore desumibile per $f(x)$ dall'appartenenza di x ad un intorno di a, cioè all'effettivo valore del limite: ciò provoca contraddizioni con il teorema dell'unicità del limite).

- **Misconcezione delle funzioni costanti.** In base ad una (erroneamente intesa) nozione *dinamica* del limite, collegata all'infinitesimo potenziale, alcuni allievi, per considerare $\lim_{x \to a} f(x) = b$, intendono come indispensabile la presenza di un "progressivo avvicinamento" di y al limite b a fronte del "progressivo avvicinamento" di x al punto $x = a$. Ciò rende ad esempio impossibile la considerazione del limite di funzioni costanti.

Per eliminare tali misconcezioni abbiamo messo in atto l'intervento descritto nella sezione seguente.

([10]) Per lo status dei procedimenti visuali nella didattica della matematica, si veda l'analisi in: Kaldrimidou, 1987, ripresa in: Kaldrimidou, 1995. Inoltre: Bagni, 1997a.

([11]) Dimarakis & Gagatsis (1997) indicano l'opportunità di un ampio questionario e di un esteso campione di studenti, con l'inclusione di universitari. Facciamo nostri tali suggerimenti: in particolare, il coinvolgimento nella ricerca di studenti universitari ci sembra indispensabile per analizzare l'evoluzione dei concetti dell'Analisi.

2. INTERVENTO PER RIMUOVERE LE MISCONCEZIONI: IL LIMITE COME CONCETTO TOPOLOGICO

Dopo il test I, agli allievi della classe esaminata è stato brevemente richiamato il concetto di intorno di un punto sulla retta (specificando dettagliatamente la "traduzione" di tale nozione, in lingua naturale, in termini di "vicinanza"). Il concetto è stato illustrato dall'insegnante con alcuni esempi ([12]).

Agli allievi sono stati quindi forniti alcuni appunti sul concetto di limite (che sono stati illustrati dall'insegnante nel corso di due ore di lezione).

La prima parte distingue chiaramente il ruolo del limite dalla tradizionale valutazione di una funzione "in un punto" e mira dunque ad evitare il formarsi della *Misconcezione della funzione valutata nel punto*.

La seconda parte mira ad evitare i problemi connessi all'opposizione che può determinarsi tra il linguaggio utilizzato in matematica e la lingua naturale; si noti che **in tutti gli appunti forniti non vengono impiegati termini come *si avvicina* e *converge*, tali da suggerire una concezione dinamica del limite**; termini come *tende a* sono entrati nell'uso comune per quanto riguarda il linguaggio impiegato trattando di limiti; essi sono però esplicitamente "tradotti" nel senso dell'appartenenza alle "immediate vicinanze" del punto considerato, dunque in un'interpretazione topologica (attraverso il concetto di intorno). Con tali accorgimenti si intende evitare la formazione della *Misconcezione delle funzioni costanti*.

3. LA SITUAZIONE DOPO L'INTERVENTO

3.1. IL TEST II

Come ricordato nel paragrafo 1.3, dopo il test I e le relative interviste *non* sono state fornite agli allievi informazioni sulle risposte esatte ai quesiti proposti. Dopo l'ulteriore spiegazione descritta nella sezione precedente, a ciascun allievo è stato riconsegnato il proprio foglio del test; gli allievi sono stati quindi invitati a riconsiderare le risposte date ed a confermarle oppure a modificarle.

Il tempo accordato è stato di 30 minuti (come per il test I). Tutti gli allievi hanno riconsegnato il foglio del test; 9 allievi (33%) hanno riconsegnato il foglio prima della scadenza dei 30 minuti.

3.2. RISULTATI DEL TEST II E PRIME CONSIDERAZIONI

Riportiamo i risultati del test II (e le risposte del precedente test I):

____

([12]) Il testo degli appunti forniti agli allievi ed illustrati dall'insegnante è riportato in appendice. Dopo il richiamo sul concetto di intorno, la prima parte è relativa ai paragrafi 1-2-3; la seconda parte è relativa al paragrafo 4.

		Risultati test II	*Risultati test I*
a)	compatibile:	26 (96%)	18 (67%)
	non compatibile:	1 (4%)	9 (33%)
	nessuna risposta:	0 (0%)	0 (0%)
b)	compatibile:	4 (15%)	5 (19%)
	non compatibile:	20 (74%)	19 (70%)
	nessuna risposta:	3 (11%)	3 (11%)
c)	compatibile:	26 (96%)	21 (78%)
	non compatibile:	0 (0%)	5 (19%)
	nessuna risposta:	1 (4%)	1 (3%)
d)	compatibile:	21 (78%)	12 (44%)
	non compatibile:	4 (15%)	10 (37%)
	nessuna risposta:	2 (7%)	5 (19%)
e)	compatibile:	25 (93%)	17 (62%)
	non compatibile:	2 (7%)	5 (19%)
	nessuna risposta:	0 (0%)	5 (19%)
f)	compatibile:	22 (82%)	12 (44%)
	non compatibile:	3 (11%)	10 (37%)
	nessuna risposta:	2 (7%)	5 (19%)

Rileviamo innanzitutto un netto miglioramento nel collegamento della situazione grafica espressa al concetto di limite: le percentuali delle risposte corrette sono state rispettivamente, nel test II, 96%, 74%, 96%, 78%, 93%, 82% (media generale: 86%; nel test I era del 60%).

Significativa ci sembra la buona percentuale di risposte esatte ai quesiti (d), (f), riferiti a funzioni costanti, che nel test I erano state causa di rilevanti difficoltà: le percentuali di successo nel test II sono state rispettivamente 78% e 82% contro le precedenti 44% e 44%.

Non possiamo tuttavia essere certi che il sostanziale miglioramento della situazione sia totalmente da ascrivere all'intervento ricordato nella sezione 2. Per valutare i motivi di tale miglioramento abbiamo quindi ritenuto opportuno procedere ad ulteriori interviste degli studenti.

3.3. INTERVISTE AGLI ALLIEVI (TEST II)

Gli allievi sono stati invitati a riflettere sulle risposte date sia nel test I che nel test II, e sono stati intervistati singolarmente (alla presenza di tutti i compagni, in aula). Alcune affermazioni tratte dalle interviste meritano di essere riportate, con particolare riferimento agli allievi che abbiamo ricordato nelle precedenti interviste (relative al solo test I).

Francesco, che commentando il test I relativamente alla risposta (e), aveva citato erroneamente il teorema dell'unicità del limite, ha invece riconosciuto la correttezza del limite indicato al punto (e) ed ha osservato:

"Nel test I avevo sbagliato considerando anche il puntino come limite. Il limite valuta solo la funzione nelle immediate vicinanze del punto, e mi devo disinteressare di ciò che accade lì [$x = a$]. Questo limite va bene" (Francesco) ([13]).

Analoghe posizioni sono state espresse da altri quattro allievi.

Per quanto riguarda le risposte riferite alle funzioni costanti, Guido e Stefano hanno ora cambiato la propria risposta; ad esempio:

"Il limite valuta la funzione nell'intorno del punto e il fatto che la funzione sia costante non ha importanza" (Guido).

Analoghe posizioni sono state espresse da altri sette allievi.

Norma, invece (che aveva ritenuto che il limite "non avesse senso perché la funzione data non è funzione di x") ha mantenuto, nel test II, la propria posizione, senza cambiare sostanzialmente la giustificazione inizialmente fornita. Solo in un secondo momento, a fronte delle precisazioni dell'intervistatore, l'allieva si è resa conto della situazione ed ha accettato la correzione.

3.4. CONCLUSIONI (TEST II)

In un lavoro dedicato all'influenza dei modelli taciti nell'apprendimento delle operazioni aritmetiche, E. Fischbein ipotizza che "anche dopo che un individuo diventa capace di ragionare formalmente, i modelli elementari, intuitivi continuano ad influenzare il suo modo di ragionare [...] Il nostro processo di informazioni non è controllato solo dalla struttura logica, ma, allo stesso tempo, da un mondo di modelli intuitivi che agiscono tacitamente ed impongono le loro restrizioni" (Fischbein, 1989, p. 28). Questa osservazione è valida anche al livello della scuola superiore, segnatamente per quanto riguarda il concetto di limite: la presenza di modelli intuitivi (evocati anche dal linguaggio impiegato e da alcune forme di visualizzazione) non può essere trascurata: anche dopo che lo studente ha esaminato il limite mediante la definizione (formale), l'effetto di tali modelli continua a manifestarsi tacitamente e può causare misconcezioni.

([13]) Appare dunque interessante rilevare che Francesco, il quale nell'intervista precedente aveva impiegato il termine "seguìto" per descrivere la propria considerazione (evidentemente *dinamica*) del grafico della funzione esaminata (lo avevamo sottolineato nella nota 9), non si riferisce più ad alcuna lettura in chiave *dinamica* del diagramma.

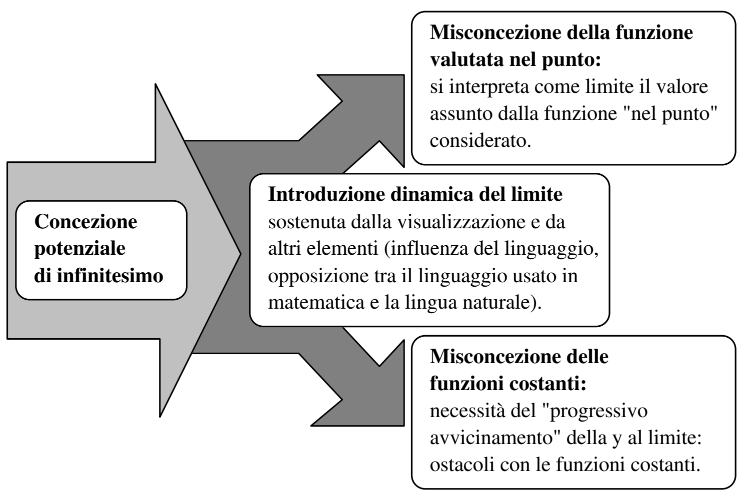
Per quanto riguarda l'esperienza descritta nel presente lavoro, pur non potendo essere certi, come osservato, che il miglioramento delle percentuali di successo sia stato determinato soltanto dall'intervento ricordato nella sezione 2, notiamo che molti allievi hanno superato le misconcezioni rilevate con il test I.

Dalle interviste appare che la *Misconcezione della funzione valutata nel punto*, che porta a confondere $f(a)$ e $\lim_{x\to a} f(x)$, può essere superata anche grazie alla chiara distinzione operata nell'intervento tra i due test.

Analogamente, la *Misconcezione delle funzioni costanti*, direttamente collegata all'introduzione *dinamica* del limite (e relativa alle conseguenze nel caso delle funzioni costanti), può dirsi superata per molti allievi: l'introduzione del limite collegata alla topologia sembra essere un elemento nettamente positivo per ottenere la formazione della concezione corretta di limite.

CONCLUSIONI GENERALI

L'impiego di tecniche visuali (talvolta spontaneamente abbinato alla nozione di infinitesimo potenziale) ([14]) è intuitivo e dunque didatticamente utile, ma deve essere controllato dall'insegnante; un suo impiego non oculato può comportare difficoltà causate da un apprendimento incompleto, a tratti distorto, fuorviante. Talvolta si manifestano misconcezioni, che devono essere adeguatamente valutate e rimosse.



____

([14]) L'introduzione *dinamica* del limite, indotta anche da scelte linguistiche, è agevolata da una concezione potenziale dell'infinitesimo.

Una presentazione del concetto di limite in termini di infinitesimo attuale, preceduta da un'accorta introduzione delle nozioni fondamentali della topologia, pur risultando impegnativa, potrebbe contribuire in modo decisivo ad eludere il formarsi di tali problemi.

> "Da bambino, ricordo, acquistai presso un rigattiere una biglia di vetro per cinque centesimi, ma mi accorsi subito dopo che quella stessa biglia altri la vendevano per soli quattro centesimi. Allora tornai di corsa dal rigattiere che me l'aveva venduta esigendo la restituzione del centesimo che avevo pagato di troppo, ma questi non volle sentire ragione: era suo diritto stabilire il prezzo della merce che vendeva. Me ne andai piuttosto arrabbiato con lui, e anche con me stesso che mi ero lasciato gabbare. Tornando a casa pensavo a come avrei potuto riparare al danno provocato dalla mia scelta precipitosa. E mi venne in mente che se avessi comprato un'altra biglia identica al prezzo di quattro centesimi, la mia perdita si sarebbe dimezzata, e comprandone ancora una, si sarebbe ridotta a un terzo, e ancora a un quarto, e così via. Ma se anche avessi continuato a comprare per tutta l'eternità... la mia perdita avrebbe seguitato a frazionarsi, senza però mai estinguersi del tutto. Eppure, la meta, in questo caso, era apparentemente raggiungibile, la strada da percorrere ingannevolmente breve».
>
> P. Maurensig
> da *Canone inverso* (1996)

L'Autore ringrazia il Prof. Mario Ferrari del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia ed il Prof. Paolo Negrini dell'Università di Bologna per la lettura critica di una precedente versione del presente lavoro.

Riferimenti bibliografici

Bagni, G.T. (1997a), La visualizzazione nella scuola secondaria superiore: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20B, 4, 309-335.

Bagni, G.T. (1997b), *L'infinitesimo nelle concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell'Analisi* (in via di pubblicazione).

Boyer, C. (1969), The History of the Calculus: Hallerberg & Al. (1969), *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, N.C.T.M., Washington.

Brousseau, G. (1983), Ostacles epistemologiques en mathématiques: *Recherches en didactique des mathématiques*, 4, 2.

Cornu, B. (1980), Interference des modeles spontanes dans l'apprentissage de la notion de limite: *Cahier du Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique*, 8, 57-83.

Cornu, B. (1981), Grandes lignes de l'evolution historique de la notion de limite: *Cahier du Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique*, 26, 305-326.

D'Amore, B. (1996), *L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi*, Opening Relation to Topic Group XIV "Infinite processes throughout the curriculum", 8th ICME, Sevilla, 14-21 July 1996 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 322-335).

D'Amore, B. (1997), Bibliografia in progress sul tema: "l'infinito in didattica della matematica": *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-305.

Davis, P. & Vinner, S. (1986), The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages, *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.

Dimarakis, I. (1996), *The Limit Concept: Difficulties-Obstacles of Students' Understanding*, unpublished MA dissertation, Roehampton Institute, Surrey University.

Dimarakis, I. & Gagatsis, A. (1997), Alcune difficoltà nella comprensione del concetto di limite: *La matematica e la sua didattica*, 2, 132-149.

Duval, R. (1993), Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.

Duval, R. (1994), Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage: *Actes de la 46me Rencountre Internationale de la CIEAEM*.

Edwards, C. (1982), *The Historical Development of the Calculus*, Springer, New York.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (1997), Storia e didattica della matematica: *Lettera Pristem*, 23, 8-13.

Fischbein, E. (1989), Tacit models and mathematical reasoning: *For the Learning of Mathematics*, 9, 3, 9-14 (traduzione di Copercini, L.: Modelli taciti e ragionamento matematico: Fischbein, E. & Vergnaud, G., 1992, *Matematica a scuola: teoria ed esperienze*, a cura di D'Amore, B., Pitagora, Bologna, 25-38).

Fischbein, E. (1993), The theory of figural concepts: *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.

Furinghetti, F. (1993), Insegnare matematica in una prospettiva storica: *L'educazione matematica*, III, IV, 123-134.

Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997), Storia della matematica in classe: *L'educazione matematica*, XVIII, V, 2, 1.

Gagatsis, A. & Dimarakis, I. (1996), The limit concept; Difficulties-obstacles of Students' Understanding: Gagatsis, A. & Rogers, L. (eds.), *Didactics and History of Mathematics*, Erasmus, Thessaloniki.

Kaldrimidou, M. (1987), *Images mentales et représentations en mathématiques chez les mathématiciens et les étudiants en mathématiques*, Th. III cycle, Université Paris 7.

Kaldrimidou, M. (1995), Lo status della visualizzazione presso gli studenti e gli insegnanti di matematica: *La matematica e la sua didattica*, 2, 181-194.

Mamona, J. (1987), *Students Interpretations of Some Concepts of Mathematical Analysis*, unpublished Ph. D. thesis, University of Southampton.

Mamona-Downs, J. (1990), Calculus-Analysis: A review of recent educational research: *Proceedings of II Simposio Internacional Investigacion en Educacion Matematica*, 11-36, Cuernavaca, Mexico.

Maurensig, P. (1996), *Canone inverso*, Mondadori, Milano.

Monaghan, J. (1991), Problems with the language of Limits: *For the Learning of Mathematics*, 11, 3, 20-24.

Pepe, L. (1990), Storia e didattica della matematica: *L'educazione matematica*, III, I, 2, 23-33.

Schwarzenberger, R. (1980), Why Calculus cannot be made easy: *Mathematical Gazette*, 64, 158-166.

Sierpinska, A. (1987), Humanities students and epistemological obstacles related to limits, *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397.

Sierpinska, A. (1990), Some remarks on Understanding Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 10, 24-36.

Sierpinska, A. (1994), *Understanding in Mathematics*, The Falmer Press, London.

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins: *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Tall, D. (1985), Understanding the Calculus: *Mathematical Teaching*, 110, 49-53.

Tall, D. (1990), Inconsistencies in the learning of calculus and analysis*: Focus on Learning Problems in Mahematics*, 12, 49-64.

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1992), Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity: *PME* XVI, 90-97, Durham.

Vergnaud, G. (1989), Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathéma tiques: Bednarz, N. & Garnier, C., *Construction des savoirs*, Cirade, Ottawa, 33-40 (tr. it.: Fischbein, E. & Vergnaud, G., 1992, *Matematica a scuola: teoria ed esperienze*, Pitagora, Bologna, 163-170).

APPENDICE

Appunti forniti agli allievi (cfr. paragrafo 2)

0. Il concetto di intorno

Definizione. Sulla retta, si dice *intorno* del punto P di ascissa $x = c$ l'insieme dei punti appartenenti ad un qualsiasi intervallo aperto al quale appartenga il punto P.

È importante sottolineare che alla definizione di intorno è del tutto estranea una specificazione metrica, ovvero collegata alla distanza dei punti. Pertanto, parlando dell'intorno di un punto non si dovrà mai fare riferimento alla sua "ampiezza", ma si intenderà, in ogni caso, un *qualsiasi* intervallo aperto al quale appartenga il punto considerato.

Questa presentazione linguistica del concetto di intorno, *intuitivamente*, ci darà la possibilità di presentare la nozione di vicinanza tra punti (sulla retta reale): considerati sulla retta i due punti P e Q, per indicare che *il punto P è "vicino" al punto Q* diremo che *P appartiene ad un intorno di Q*.

1. La tradizionale valutazione delle funzioni

Consideriamo la funzione reale f di variabile reale x espressa da $y = f(x)$ ed il punto di ascissa $x = c$ appartenente al dominio di essa. La valutazione diretta della f in corrispondenza all'ascissa $x = c$ descrive, tradizionalmente, il comportamento della funzione data nel punto di ascissa $x = c$.

Il tradizionale metodo per valutare la funzione nel punto $x = c$ si condensa quindi nella frase:

"nella formula $y = f(x)$, sostituendo alla variabile x il valore $x = c$, otteniamo per la y il valore $f(c)$"

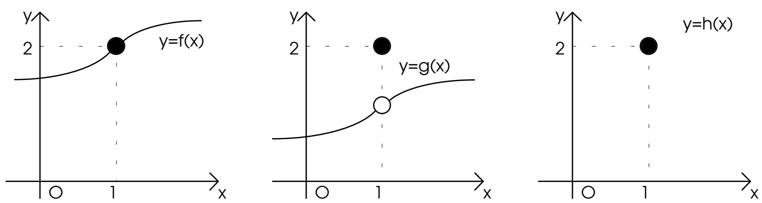
e ciò equivale ad affermare che:

"nel punto di ascissa $x = c$ la funzione f assume il valore $f(c)$"

È importante sottolineare che con un procedimento del genere otteniamo un'informazione riguardante *esclusivamente* il comportamento della funzione f

nel singolo punto di ascissa $x = c$: non sempre questa informazione esaurisce la conoscenza della funzione nelle "immediate vicinanze" di $x = c$.

Esempio. Consideriamo le tre funzioni di variabile reale i cui grafici cartesiani sono rappresentati nei diagrammi seguenti:



Di ciascuna funzione indichiamo il dominio:

$D_f = \mathbf{R}$ $D_g = \mathbf{R}$ $D_h = \{1\}$

Esse, valutate (tradizionalmente) *nel punto* di ascissa $x = 1$, assumono lo stesso valore $y = 2$:

$$f(1) = g(1) = h(1) = 2$$

Si noti, tuttavia, che ben diverso è il comportamento di queste tre funzioni nelle "immediate vicinanze" del punto considerato. Infatti:

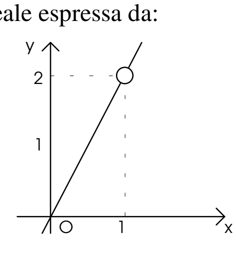
- la funzione f è definita, per $x \neq 1$, in modo che per disegnare il grafico nel punto di ascissa $x = 1$ non è necessario staccare la matita dal foglio;
- la funzione g è definita, per $x \neq 1$, in modo che per disegnare il grafico nel punto di ascissa $x = 1$ *è* necessario staccare la matita dal foglio;
- al dominio della funzione h appartiene *solo* il punto $x = 1$: la funzione h *non* è quindi definita per $x \neq 1$.

2. In qualche caso le funzioni sono difficili da valutare...

Il metodo tradizionale di valutazione di una funzione, ricordato nel paragrafo precedente, può non risolvere qualche problema particolare. Vediamo un caso di questo genere nel seguente esempio.

Esempio. Consideriamo la funzione di variabile reale espressa da:

$$y = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 2x \\ x \neq 1 \end{cases}$$



con dominio: D = **R**\{1}.

Può non essere possibile descrivere il comportamento di tale funzione nelle 'immediate vicinanze" del punto di ascissa $x = 1$ utilizzando il tradizionale metodo di valutazione di una funzione (per sostituzione diretta di $x = 1$ nell'equazione): in questo caso, infatti, non è possibile assegnare direttamente alla variabile x il valore 1, in quanto tale valore è esplicitamente escluso dal dominio.

A parte tale situazione, però, la funzione data presenta un'evidente regolarità nelle 'immediate vicinanze" del punto $x = 1$: quando x si trova nelle 'immediate vicinanze" di $x = 1$ (*e ci disinteressiamo di quanto accade nel punto* $x = 1$), allora $y = f(x)$ si trova nelle 'immediate vicinanze" di $y = 2$.

3. Un modo diverso di valutare le funzioni

Situazioni come quella illustrata nell'esempio precedente indicano che è opportuno introdurre un nuovo concetto, in grado di descrivere il comportamento di una funzione nelle 'immediate vicinanze" di un punto di ascissa $x = c$: questo concetto è detto *limite*.

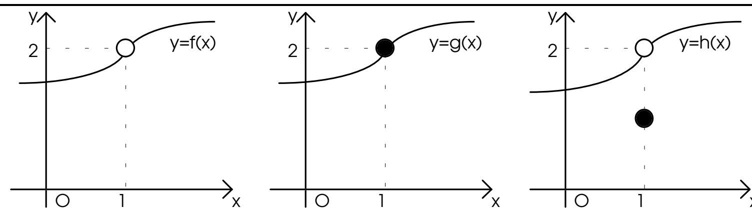
In termini intuitivi, potremmo dire che la funzione f ammette limite l per x tendente a c se tutte le x situate nelle 'immediate vicinanze" di $x = c$ (a parte $x = c$ stesso, di cui ci disinteressiamo) hanno per corrispondenti delle y che si trovano nelle 'immediate vicinanze" di $y = l$. Scriveremo allora:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

Ricordiamo tuttavia che il precedente accenno non può assolutamente essere accettato come una *definizione* del concetto di limite: una simile frase è infatti ancora generica e imprecisa, ed il riferimento alle non meglio definite 'immediate vicinanze" di un punto dovrà essere riformulato (con l'aiuto decisivo del concetto topologico di intorno). Ma già un'introduzione informale come questa ci consente di proporre alcune interessanti osservazioni.

Come abbiamo sopra notato, la valutazione di una funzione f nel punto di ascissa $x = c$ prescinde dal comportamento della funzione stessa nelle 'immediate vicinanze" di tale punto; ebbene, analogamente, il limite della funzione f per x tendente a c (ovvero: la valutazione della funzione data nelle 'immediate vicinanze" del punto di ascissa $x = c$) prescinderà dal valore eventualmente assunto dalla funzione f nel punto considerato. Anzi, l'esistenza del limite della funzione f per x tendente a c non richiederà neppure l'esistenza di $f(c)$, ovvero della funzione f nel punto $x = c$.

Esempio. Consideriamo le tre funzioni di variabile reale i cui grafici cartesiani sono rappresentati nei diagrammi seguenti:



con domini: $D_f = \mathbf{R}\backslash\{1\}$ $D_g = \mathbf{R}$ $D_h = \mathbf{R}$

È facile intuire che esse ammettono lo stesso limite per x tendente ad 1:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = 2$$

Infatti, il comportamento delle tre funzioni date nelle 'immediate vicinanze" del punto di ascissa $x = 1$ (ad eccezione, eventualmente, del punto stesso, di cui però ci disinteressiamo) è identico. Eppure ben diversa è la situazione considerata *esattamente nel punto* di ascissa $x = 1$:

- la funzione f *non è definita* per $x = 1$;
- la funzione g è definita, per $x \neq 1$, in modo che per disegnare il grafico nel punto di ascissa $x = 1$ non è necessario staccare la matita dal foglio;
- la funzione h è definita, per $x \neq 1$, in modo che per disegnare il grafico nel punto di ascissa $x = 1$ *è* necessario staccare la matita dal foglio.

4. Formalizziamo infine la nostra intuizione: la definizione di limite

Ritorniamo a quanto sopra detto per presentare intuitivamente il limite: la funzione f ammette limite l per x tendente a c se tutte le x situate nelle 'immediate vicinanze" di $x = c$ (a parte $x = c$ stesso, di cui ci disinteressiamo) hanno per corrispondenti delle ordinate y situate nelle 'immediate vicinanze" di $y = l$.

Per precisare formalmente tale nozione ricorreremo al concetto topologico di intorno. Dobbiamo innanzitutto fissare arbitrariamente un intorno J(l) del punto di ordinata $y = l$ (che esprima, cioè, le 'immediate vicinanze" di $y = l$, sull'asse delle y). A questo punto, *qualsiasi* sia l'intorno J(l), dobbiamo cercare un intorno I(c) del punto di ascissa $x = c$ (che esprima, cioè, le 'immediate vicinanze" di $x = c$, sull'asse delle x) tale che tutti i punti di I(c) ad eccezione di $x = c$ (di cui ci disinteressiamo) abbiano corrispondenti ordinate in J(l).

Accostiamo quindi la definizione intuitiva del limite di una funzione ad una che formalizzi le 'immediate vicinanze" di un punto attraverso l'intorno:

La funzione f espressa da $y = f(x)$ ammette limite l per x tendente a c se:

[in linguaggio intuitivo]	**[in linguaggio matematico]**
	[fissato a piacere un intorno J(l) di $y = l$ si può determinare un intorno I(c) tale che]
tutte le x nelle “immediate vicinanze” di $x = c$	per ogni $x \in$ I(c),
(a parte $x = c$ stesso, di cui ci disinteressiamo)	tale che $x \neq c$,
hanno per corrispondenti delle y che si trovano nelle “immediate vicinanze” di $y = l$.	risulta: $f(x) \in$ J(l).

Riassumiamo ciò nella definizione di limite di una funzione:

Definizione. Sia f: $x \rightarrow f(x)$ una funzione definita in un intorno di $x = c$, ad eccezione, eventualmente, di $x = c$ stesso. Si dice che il limite di $f(x)$ per x tendente a c è $l \in \mathbf{R}$ e si scrive: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ se, per ogni intorno di $y = l$, J(l), esiste un intorno di $x = c$, I(c), tale che per ogni x appartenente a I(c), con x diverso da c stesso, $f(x)$ appartenga a J(l).

Summary. In this paper the concept of limit in the learning of mathematics is investigated, referred to Italian High School (*Liceo scientifico*, pupils aged 18-19 years). The status of the concept is studied by two tests, particularly referred to visualization. We conclude that the visual representation of some infinitesimal methods is tacitly considered in the sense of potential infinitesimal and not in the sense of actual one; an improper use of visual methods may be uneffective for the correct learning of the limit.