L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate (1996),
19B, 2, 167-176

Disequazioni irrazionali quadratiche: apprendimento e *contratto didattico*

GIORGIO T. BAGNI
NUCLEO DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA, BOLOGNA

Summary. In this paper we examinate by a test the learning of an important "chapter" of the mathematical education in the High School (in particular, referred to pupils aged 16-17 years, of II and III classes of the Italian *Liceo scientifico*). Many students are conditioned from *didactical contract* to apply always the "standard" rules given by the teacher, and this behaviour can be harmful: resolutions are mechanical, not creative and sometimes they become more complicated.

PREMESSA

L'influenza del *contratto didattico* sul comportamento dell'allievo è rilevante: nella presente nota proponiamo una breve indagine su alcuni fenomeni connessi all'apprendimento nell'ambito di un'unità didattica tratta dai programmi delle scuole secondarie superiori [1].

Didatticamente, le disequazioni irrazionali vengono introdotte (ad esempio nella II classe del Liceo scientifico, o nei primi mesi della III classe), facendo iniziale riferimento alle disequazioni irrazionali quadratiche che l'allievo frequentemente si troverà chiamato ad affrontare. La risoluzione di tali disequazioni viene basata su alcune regole che gli allievi spesso memorizzano ed applicano con abilità; ma non sempre, come vedremo, tale applicazione pratica è accompagnata dall'opportuna consapevolezza critica.

LA RISOLUZIONE DI DISEQUAZIONI IRRAZIONALI QUADRATICHE

La risoluzione di una disequazione irrazionale quadratica, nel tradizionale programma di matematica della scuola secondaria superiore, è una delle prove con le quali più frequentemente l'allievo è chiamato a confrontarsi. In particolare, notissime sono le regole sintetizzate da:

$$\sqrt{A(x)} \le B(x) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} A(x) \ge 0 \\ B(x) \ge 0 \\ A(x) \le [B(x)]^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A(x)} \ge B(x) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} A(x) \ge 0 \\ B(x) \le 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \ge 0 \\ A(x) \ge [B(x)]^2 \end{cases}$$

Esse vengono ad arricchire stabilmente il già cospicuo ed oneroso patrimonio di formule, tecniche, procedimenti che l'allievo è tenuto a conoscere e ad impiegare ripetutamente.

La risoluzione di una *qualsiasi* disequazione irrazionale quadratica, spesso, viene identificata con l'applicazione (consapevole o... meccanica?) delle regole sopra ricordate. Notiamo innanzitutto, però, che non sempre tale applicazione risulta strettamente necessaria; consideriamo, ad esempio, la disequazione:

$$\sqrt{x} + 2 \le 0$$

Essa *non* è risolta da alcun reale *x*: ma per giungere a questa conclusione non è necessario basarsi sulla prima delle formule sopra ricordate. Anzi, una diretta applicazione di tali formule porta alla risoluzione (peraltro corretta):

$$\sqrt{x} + 2 \le 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} \le -2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \ge 0 \\ -2 \ge 0 \\ x \le (-2)^2 \end{cases}$$

e il sistema non è verificato da alcun reale *x*.

Tutto ciò è però causa di una sostanziale complicazione del procedimento risolutivo: molto più semplice sarebbe notare che $\sqrt{x}$ non può assumere valori negativi e di conseguenza la somma $\sqrt{x} + 2$ non può risultare negativa o nulla.

Ma la consolidata abitudine all'impiego di formule per risolvere esercizi e problemi porta talvolta l'allievo a privilegiare un approccio meccanico; molti allievi sembrano infatti basare il proprio atteggiamento sulla seguente considerazione: per la risoluzione di un ben determinato genere di esercizi (le disequazioni irrazionali quadratiche), l'insegnante ha fornito una o più regole, una o più formule, dunque *ogni* esercizio di quel genere (*ogni* disequazione irrazionale quadratica) *deve* essere affrontato e risolto applicando tali regole e tali formule. B. D'Amore e P. Sandri hanno chiamato "e. g. f." (esigenza della giustificazione formale) una clausola del *contratto didattico* molto simile a quella qui evidenziata, la cui presenza è riscontrabile già a partire dalle scuole elementari: a loro avviso la clausola diventa sempre più vincolante con il passare degli anni, al crescere del livello scolastico di appartenenza (si veda [2]).

METODOLOGIA DELLA RICERCA

L'analisi del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando 2 classi di III liceo scientifico, a Treviso, per un totale di 52 allievi che sono stati invitati a svolgere un test.

In entrambe le classi, al momento del test, erano già state introdotte le disequazioni irrazionali quadratiche; per la loro risoluzione, erano state proposte e dimostrate (ed applicate in numerosi esempi) le regole sopra ricordate.

A ciascun allievo è stato sottoposto il seguente test, senza fornire ulteriori indicazioni riguardanti i procedimenti risolutivi da impiegare:

Determinare i valori di $x \in \mathbf{R}$ per i quali risulta:

a) $\sqrt{x} \le 6 - x$	*b)* $\sqrt{x-1} \ge 1 - x$	*c)* $\sqrt{x} \le 1$
d) $\sqrt{x} \ge 0$	*e)* $\sqrt{x} \le -1$	*f)* $\sqrt{-x} \ge 0$

Il tempo accordato per la risoluzione è stato di 30 minuti. Non è stato consentito agli allievi l'uso di tavole numeriche né della calcolatrice scientifica.

Il test è stato concepito affiancando a due quesiti (*a*), (*b*), che richiedono l'applicazione delle regole risolutive "tradizionali" complete, un terzo quesito (*c*), la cui risoluzione può essere trovata con o senza l'applicazione di tali regole. La risoluzione dei tre quesiti seguenti (*d*), (*e*), (*f*) è invece certamente possibile senza le regole precedentemente ricordate; anzi, la loro applicazione viene ad essere causa di una sostanziale complicazione del procedimento risolutivo.

RISULTATI DEL TEST

Elenchiamo i risultati dei test, suddivisi per esercizio (le percentuali saranno arrotondate all'unità; le "risposte in parte esatte, incomplete" sono risposte che individuano gli intervalli correttamente, con errori riguardanti soltanto gli estremi di essi; ad esempio: $0 \le x < 4$ invece di $0 \le x \le 4$).

QUESITO (*a*): $\sqrt{x} \le 6 - x$.

Totale.	Risposte esatte:	34	(66%);
	Risposte in parte esatte, incomplete:	7	(13%);
	Risposte errate:	9	(17%);
	Risposte non date:	2	(6%);

QUESITO (*b*): $\sqrt{x-1} \ge 1 - x$.

Totale.	Risposte esatte:	30	(58%);
	Risposte in parte esatte, incomplete:	8	(15%);
	Risposte errate:	10	(19%);
	Risposte non date:	4	(8%);

QUESITO (*c*): $\sqrt{x} \le 1$.

Totale.	Risposte esatte:	36	(69%);
	Risposte in parte esatte, incomplete:	4	(8%);
	Risposte errate:	10	(19%);
	Risposte non date:	2	(4%);

QUESITO (*d*): $\sqrt{x} \ge 0$.

Totale.	Risposte esatte:	31	(60%);
	Risposte in parte esatte, incomplete:	1	(2%);
	Risposte errate:	19	(36%);
	Risposte non date:	1	(2%);

QUESITO (*e*): $\sqrt{x} \le -1$.

Totale.	Risposte esatte:	31	(60%);
	Risposte in parte esatte, incomplete:	3	(6%);
	Risposte errate:	10	(19%);
	Risposte non date:	8	(15%);

QUESITO (*f*): $\sqrt{-x} \ge 0$.

Totale.	Risposte esatte:	32	(61%);
	Risposte in parte esatte, incomplete:	1	(2%);
	Risposte errate:	16	(31%);
	Risposte non date:	3	(6%).

Per le considerazioni che proporremo, sarà rilevante anche il dato seguente, riferito complessivamente alle risposte ai quesiti (*d*), (*e*), (*f*): nel 58% dei casi le disequazioni proposte in tali quesiti vengono affrontate applicando le regole precedentemente ricordate.

Il 58% di risoluzioni con tale metodo può essere così suddiviso: il 36% è costituito da risoluzioni esatte o parzialmente esatte, il 22% da risoluzioni errate.

PRIME CONSIDERAZIONI SUI RISULTATI

I risultati del test, descritti nel paragrafo precedente, e l'analisi dei protocolli suggeriscono le seguenti considerazioni.

- Gli allievi sono mediamente preparati a risolvere disequazioni come quelle proposte nei quesiti (*a*), (*b*), (*c*), con l'applicazione delle tecniche risolutive "tradizionali" (spesso gli insuccessi sono determinati da errori di calcolo, o da errori nell'esecuzione delle operazioni insiemistiche); non pochi allievi, però, mostrano qualche disagio nell'affrontare esercizi anche apparentemente più semplici, ma che non richiedono obbligatoriamente la diretta applicazione delle formule studiate.

Notiamo infatti che, raggruppando i quesiti (*a*), (*b*), (*c*), si ottiene:

Risposte esatte o in parte esatte:	119	(76%)
Risposte errate o non date:	37	(24%)

Raggruppando i quesiti (*d*), (*e*), (*f*) si ottiene:

Risposte esatte o in parte esatte:	99	(63%)
Risposte errate o non date:	57	(37%)

Pertanto la percentuale complessiva di insuccessi appare superiore (37% contro 24%, sebbene il numero di allievi sia limitato) per le disequazioni del secondo gruppo.

- Nonostante l'evidente semplicità, gli esercizi (*d*), (*e*), (*f*) vengono spesso ugualmente affrontati (come sopra notato, nel 58% dei casi) e risolti, talvolta correttamente (nel 35% dei casi), applicando le tecniche "tradizionali"; ad esempio (quesito *d*):

$$\sqrt{x} \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 0 \geq 0 \\ x \geq 0^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x \geq 0$$

Talvolta invece l'allievo, percepita intuitivamente la semplicità dell'esercizio, tenta di affrontare la disequazione senza fare ricorso agli "ingombranti" procedimenti ora ricordati. Notiamo tuttavia che l'impiego delle tecniche "tradizionali" viene comunque ad essere preferito dalla maggior parte degli allievi.

Ad esempio, per i quesiti (*d*), (*e*), (*f*), su di un totale percentuale di risposte esatte o in parte esatte del 63% (99 casi), possiamo evidenziare la suddivisione seguente:

Risposte esatte o quasi esatte determinate ricorrendo al procedimento "tradizionale":	56	(36%)
Risposte esatte o quasi esatte determinate *non* ricorrendo al procedimento "tradizionale":	43	(27%)

- Non sempre, tuttavia, il ricorso ad un procedimento non "tradizionale" ha successo. Ad esempio, piuttosto frequente è la risposta errata:

$\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}$	(18 volte)	(quesito *d*)

Tra le altre risposte errate, peraltro meno frequenti, significative ci sembrano inoltre:

$\sqrt{x} \leq -1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$	(6 volte)	(quesito *e*)
$\sqrt{-x} \geq 0 \Rightarrow \varnothing$	(6 volte)	(quesito *f*)
$\sqrt{-x} \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}$	(9 volte)	(quesito *f*)

Prima di passare ad un'analisi più completa ed organica dei risultati del test, è sembrato indispensabile prestare attenzione al commento critico fornito dagli allievi stessi: pertanto, al fine di comprendere più chiaramente le cause degli errori più frequentemente riscontrati, gli allievi sono stati intervistati (singolarmente, ma alla presenza di tutti i compagni, in aula) ed hanno fornito le spiegazioni riportate nel paragrafo seguente.

INTERVISTE CON GLI ALLIEVI

Alcuni allievi sono stati invitati a giustificare una o più risposte fornite nel test; in particolare, riteniamo interessante riportare sinteticamente alcune osservazioni riguardanti i quattro errori riscontrati con maggiore frequenza nelle risposte ai quesiti (*d*), (*e*), (*f*) (le "formule" alle quale gli allievi fanno talvolta riferimento sono quelle tradizionalmente proposte, ricordate nel primo paragrafo).

Errore: $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}$ (quesito *d*)

Pressoché unanime è il commento degli allievi; Valentina afferma: "Ho dimenticato la condizione di realtà", e moltissimi concordano con lei. Significativo appare il commento di Francesco: "Non ho usato le formule e non pensavo di essere ugualmente obbligato a porre la condizione di realtà. Avrei fatto meglio a non fidarmi e ad applicare le formule!".

Errore: $\sqrt{x} \leq -1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$ (quesito *e*)

Degno di nota è il commento di Luca: "Ho creduto che $\sqrt{x} \leq -1$ avesse le stesse soluzioni di $\sqrt{x} \leq 1$: in fondo, quando nella risoluzione elevo al quadrato -1 ottengo 1".

Errore: $\sqrt{-x} \geq 0 \Rightarrow \varnothing$ (quesito *f*)

Enrico (con alcuni altri) afferma: "Ho visto il segno meno sotto la radice quadrata: ed un radicando non può essere negativo! Non ho pensato che se x è negativo allora $-x$ è positivo".

Errore: $\sqrt{-x} \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}$ (quesito *f*)

Anche in quest'ultimo caso, l'errore viene spiegato da molti allievi con la dimenticanza della condizione di realtà del radicale. Interessante appare il commento di Valentina: "Sapevo che una radice quadrata è sempre positiva [questa è l'affermazione iniziale dell'allieva; solo più tardi sarà corretta in "non negativa"], ed ho dimenticato la condizione di realtà: lo stesso errore che ho fatto risolvendo $\sqrt{x} \geq 0$. Avrei dovuto pensare che due disequazioni diverseunon potevano avere lo stesso risultato!". Un'affermazione interessante, seppure ben difficilmente giustificabile.

ANALISI DELLE INTERVISTE E CONCLUSIONI

Le prime considerazioni sui risultati del test, abbinate a quanto emerso dalle interviste agli allievi, riportate nel paragrafo precedente, consentono la precisazione delle conclusioni seguenti.

- Gli allievi manifestano disagio nell'affrontare la risoluzione di una disequazione irrazionale quadratica, anche assai semplice, senza il "rassicurante" ricorso alle regole risolutive indicate dall'insegnante.

L'applicazione di tali regole agli esercizi standard proposti nei quesiti (*a*), (*b*), (*c*) avviene spesso correttamente: le disequazioni le cui risoluzioni richiedono il loro uso sono infatti quelle che fanno riscontrare la più elevata percentuale complessiva di successo (76%, considerando sia le risposte esatte che quelle con lievi imperfezioni).

Tuttavia, come sopra rilevato, queste regole risolutive sono frequentemente applicate anche ad esercizi semplicissimi, nonostante ciò comporti alcune non trascurabili complicazioni delle risoluzioni.

Quali possono essere i motivi che spingono gli allievi a comportarsi in questo modo?

L'interpretazione che proponiamo è la seguente: l'abilità tecnica conseguita nel risolvere *con un ben determinato procedimento* le disequazioni irrazionali quadratiche standard, ovvero del tipo $\sqrt{\mathrm{A}(x)} \leq \mathrm{B}(x)$ e $\sqrt{\mathrm{A}(x)} \geq \mathrm{B}(x)$ (con $\mathrm{A}(x)$ e $\mathrm{B}(x)$ polinomi non costanti), finisce spesso per condizionare l'allievo. Innanzitutto, egli si sente sicuro nell'applicazione usuale, ripetitiva delle formule risolutive memorizzate: è insomma consapevole che, così facendo, riuscirà a raggiungere la soluzione esatta e quindi a soddisfare pienamente la richiesta dell'insegnante; inoltre, la scelta di applicare proprio i procedimenti indicati dall'insegnante non potrà che indurre l'insegnante stesso ad una valutazione positiva del test (*contratto didattico*) [1].

Un qualsiasi esercizio che richieda la risoluzione di una disequazione irrazionale quadratica viene pertanto percepito ed interpretato dall'allievo come un'occasione (irrinunciabile) per applicare le regole e le formule proposte dall'insegnante, fino a giungere all'identificazione:

risoluzione di una disequazione irrazionale quadratica	$\Leftrightarrow$	*applicazione delle regole risolutive fornite dall'insegnante*

Sembra dunque che molti allievi si sentano pressoché obbligati (dal *contratto didattico*) a *percorrere solo ed esattamente la strada indicata dall'insegnante*, evitando, in molti casi anche in presenza di situazioni di evidente semplicità (ad esempio, nella risoluzione della disequazione $\sqrt{x} \geq 0$, quesito *d*), di affrontare autonomamente l'esercizio proposto.

- Nei casi in cui la risoluzione viene tentata per via non formale, ovvero senza ricorrere meccanicamente alle regole prefissate, si possono notare alcuni errori assai frequenti, ricollegabili (in base alle stesse ammissione degli allievi) all'omissione della "condizione di realtà del radicale":

$\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}$ (quesito *d*)

$\sqrt{-x} \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}$ (quesito *f*)

In non pochi casi, la "condizione di realtà" è posta in termini errati, addirittura... rifiutando la stessa presenza del segno meno sotto il segno di radice. In altri termini, la scrittura $-x$ viene interpretata senz'altro come un numero negativo, che dunque non può essere accettato come radicando di una radice quadrata:

$\sqrt{-x} \geq 0 \Rightarrow \varnothing$ (quesito *f*)

Ciò può indicare che quanto espresso dalle regole risolutive "tradizionali" (mediamente ben applicate in esercizi standard) *non è stato effettivamente appreso da parecchi allievi*: la "condizione di realtà", spesso ricordata dagli allievi nelle interviste, viene insomma considerata come un'esigenza connessa all'applicazione di un ben determinato procedimento (riteniamo illuminante, a tale proposito, il sopra riportato commento di Francesco).

Concludiamo infine sottolineando la centrale responsabilità dell'insegnante per quanto riguarda la situazione determinata dal *contratto didattico* e sopra esaminata. *Il contratto didattico, lo ricordiamo, non è inventato o liberamente scelto dall'allievo*: molto spesso un allievo può essere indotto all'impiego (anche acritico) di procedimenti e di regole dal comportamento stesso dell'insegnante. Non sempre, infatti, gli allievi vengono opportunamente stimolati a ricercare le soluzioni semplici, alternative, inusuali, eleganti; e talvolta l'insegnante può addirittura giungere a raccomandare (implicitamente o magari anche esplicitamente) il ricorso alle formule... *sicure*, chiare, codificate. La ricerca di un atteggiamento aperto, vivace e creativo nell'allievo non può quindi che essere fondata su di un corrispondente atteggiamento dell'insegnante.

L’autore desidera ringraziare il Prof. Mario Ferrari del Dipartimento di Matematica dell’Università di Pavia per la generosa collaborazione e per i preziosi suggerimenti.

Riferimenti bibliografici

[1] **G. Brousseau**, *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques,* in: “Études en didactique des Mathématiques” Université de Bordeaux I, IREM de Bordeaux, 1987.

[2] **B. D’Amore-P. Sandri**, *Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante,* in corso di pubblicazione.