

*In Atti dell'Italian Afternoon del Convegno "ICMI 2008", Roma
Accademia dei Lincei, 6 marzo 2008. Progetto Alice, 25, 53–64 (2008)*

Matematica e interpretazione

Giorgio T. Bagni

Riassunto Nel presente lavoro descriveremo un approccio ermeneutico all'insegnamento–apprendimento della matematica, con particolare riferimento all'introduzione delle serie numeriche mediante alcuni noti esempi storici (Nicola d'Oresme, Guido Grandi).

Abstract In this paper we shall describe an hermeneutic approach to mathematics teaching and learning, with particular reference to the introduction of infinite series taking into account some well-known historical examples (Nicole Oresme, Guido Grandi).

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

Un “appello” di Francesco Speranza

Sono trascorsi dieci anni dalla scomparsa di Francesco Speranza (1932–1998) e le sue lucidissime intuizioni si mantengono assai preziose per chi si occupa di didattica della matematica. Nell'*Appello all'ermeneutica*, uno dei suoi ultimi scritti (Speranza, 1999), leggiamo ad esempio: «l'insegnamento–apprendimento si può interpretare in chiave ermeneutica: che cosa sarebbe altrimenti il passaggio dal *savoir savant* al *savoir de l'élève*?»

Non è difficile rendersi conto che chi apprende (e chi insegna: D'Amore 2005) opera sul piano dell'ermeneutica: uno studente chiamato ad accostarsi alla matematica si trova spesso di fronte a un discorso scientifico formalizzato che non conosce e all'interno della quale deve penetrare, *interpretando* procedure e concetti (Bagni, in via di pubblicazione, 2006–a, 2006–b e 2007). Un sapere formatosi nel tempo, sulla base di esigenze e di scelte diverse (Radford, 1997), non sempre, oggi, immediatamente comprensibili.

Il significato della parola *ermeneutica* è spesso identificato con *interpretazione*. Quest'ultimo termine indica tuttavia un campo di riflessione ampio (Vatimo, 2002, pp. 3 e 5; Nietzsche, 1975, § 7[60], pp. 299–300): più precisamente, «l'ermeneutica è la dottrina del comprendere», scrive Matthias Jung (2002, p. 7); «tuttavia chi voglia comprendere lo stesso comprendere farà bene a prestare attenzione alla molteplicità dei fenomeni rispetto a cui c'è qualcosa da comprendere»: una considerazione che potremo tener presente con profitto anche occupandoci di didattica della matematica (Bagni, 2008, in cui ci si riferisce a: Rorty, 2004).

Friedrich Schleiermacher (1768–1834) aveva indicato la presenza di un «circolo apparente, per il quale ogni particolare può essere compreso solo a partire dall'universale di cui è parte e viceversa» (Schleiermacher, 2000, p. 331). Scrive in *Hermeneutik* (144/455: Jung, 2002, p. 59): «partendo dall'inizio di un'opera e progredendo a poco a poco, la comprensione graduale di ogni singolo elemento e delle parti della totalità che a partire da essa si organizzano è sempre soltanto qualcosa di provvisorio. [...] Solo che quanto più avanziamo tanto più tutto ciò che precede viene anche illuminato da ciò che segue».

La questione viene ripresa da Martin Heidegger (1889–1976), il quale riconosce che «l'interpretazione deve sempre muoversi nel compreso e nutrirsi di esso [e] le regole più elementari della logica ci insegnano che il *circolo* è *circulus vitiosus*»; tuttavia se si identifica nel circolo ermeneutico «un circolo vizioso e se si mira ad evitarlo o semplicemente lo si “sente” come un'irrimediabile imperfezione, si fraintende la comprensione da capo a fondo» (Heidegger, 2005, p. 188; inoltre: Gadamer, 2000). Possiamo concludere, sempre seguendo

Heidegger (2005, p. 189), che «il circolo non deve essere degradato a circolo vizioso e neppure ritenuto un inconveniente ineliminabile. In esso si nasconde una possibilità positiva del conoscere più originario, possibilità che è affermata in modo genuino solo se l'interpretazione ha compreso che il suo compito primo, durevole e ultimo è quello di non lasciarsi mai imporre pre-disponibilità, pre-veggenza e pre-cognizione dal caso o dalle opinioni comuni, ma di farle emergere dalle cose stesse, garantendosi così la scientificità del proprio tema».

Naturalmente non intendiamo riferirci all'intera filosofia heideggeriana che va ben oltre queste considerazioni. Ma le osservazioni citate sono importanti e capovolgono la posizione secondo la quale la presenza di un pre-giudizio dovrebbe essere considerata come un indice di scarsa disponibilità a una valutazione obiettiva. Proprio le "pre-supposizioni", i "pre-giudizi" sono, per Reale (Gadamer, 2000, p. XIV), «ciò che mette in moto il circolo; e la scientificità della ricerca si realizza nella misura in cui i pre-concetti vengono via via rinnovati e sostituiti nel corso del lavoro di interpretazione, in modo sempre più adeguato, e sempre più in sintonia con l'oggetto che viene indagato».

Un esempio didattico: le serie numeriche

L'introduzione delle serie può essere considerata un momento delicato del curriculum, in quanto il concetto di serie numerica si sovrappone a quello di addizione, uno dei capitoli più familiari della storia scolastica di qualsiasi studente. Chiaramente una serie *non* è riconducibile a un'addizione con "tantissimi" addendi, anche se i simboli usati possono avallare un'analogia del genere: un'addizione di numeri, ad esempio, ha sempre uno e un solo risultato, mentre una serie può essere convergente (con somma finita), divergente (tendente all'infinito) o indeterminata (quando non ammette somma). Ma queste considerazioni non sono sempre presenti nella mente degli allievi che si accostano alle "addizioni con infiniti addendi". Come avviene dunque l'ingresso di uno studente nel mondo delle serie, soprattutto quando esso non sia "preparato" da una precedente trattazione del concetto di limite?

In termini informali, l'allievo ha spesso a che fare con il termine "infinito" e anche questo fa sì che l'"infinito" costituisca un possibile risultato per queste strane "addizioni": spesso una "somma di infiniti addendi" non nulli è intuitivamente considerata "infinitamente grande" (D'Amore, 1996) e la possibilità di indicare un controesempio sarebbe dunque preziosa. La storia può aiutarci a orientare correttamente i nostri studenti. Possiamo riferirci a Zenone d'Elea (490–430 a.C.) e al celebre paradosso di Achille e della Tartaruga che, modernamente interpretato, porta a considerare una serie *convergente*. L'uso di un

esempio basato sulla serie delle potenze di $\frac{1}{2}$ può essere efficace: la velocità di Achille potrebbe essere il doppio di quella della Tartaruga e il vantaggio concesso dal primo alla seconda unitario. In tale caso andremmo a considerare la scrittura $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ che non supererebbe 2, qualsiasi sia la quantità di addendi considerata. Infatti in ogni passo di questa “addizione” si aggiunge *la metà* di quanto servirebbe per raggiungere 2 (i metodi grafici possono essere utilissimi: Barra, 2001).

L'utilità di questo esempio (Bagni, 2000) può però abbinarsi a un potenziale equivoco: ad esempio, qualche allievo potrebbe notare che gli addendi così sommati sono “sempre più piccoli” (indefinitamente piccoli): c'è dunque il rischio di interpretare la condizione che prevede che il termine generale sia infinitesimo come *sufficiente* affinché una serie sia convergente, mentre essa è solo *necessaria*. Potrà allora essere utile un altro esempio storico: la serie armonica ($1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$), la cui divergenza è stata provata già nel XIV secolo (senza con ciò affermare una considerazione moderna di una serie nel Medioevo). Gli allievi potranno così constatare che la condizione che prevede che il termine generale sia infinitesimo non basta a garantire la convergenza della serie in questione.

La prova della divergenza della serie armonica, seguendo Nicola d'Oresme (1323–1382), non coinvolge tecniche raffinate e può essere proposta al livello della scuola secondaria. Possiamo scrivere:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots$$

Abbiamo così raggruppato le frazioni considerate entro parentesi contenenti 1, 2, 4, 8, ... frazioni. La somma delle frazioni in ciascuna parentesi è non minore di $\frac{1}{2}$, ed essendo possibile ottenere un qualsiasi numero di parentesi, si può avere una somma maggiore di ogni costante positiva (si noti che la serie armonica cresce “lentamente”: per superare 20 servono ben 272 400 200 termini – ovviamente quanto scritto è un'interpretazione moderna delle considerazioni trecentesche, anche per la simbologia impiegata).



Fig. 1 – Nicola d'Oresme

Una catena di presupposizioni

Ricapitoliamo ora le situazioni che si sono presentate al nostro studente che si accosta alle serie. Questo accostamento è influenzato da atteggiamenti mentali decisivi nella fase interpretativa di un “discorso matematico” nuovo (D'Amore & Sbaragli, 2005); per questo ci riferiremo ad essi come a delle “presupposizioni”. L'allievo, che conosce le operazioni aritmetiche, è portato a interpretare una serie come un'addizione “con infiniti addendi”:

Presupposizione originale (errata)

- (i) una “addizione con infiniti addendi”
è pur sempre un'addizione e dunque avrà un “risultato”;
- (ii) essendo infinito il numero degli addendi,
tale “risultato” sarà infinito.

Essa è errata da due punti di vista: è falso che una “addizione di infiniti addendi” sia una particolare addizione e abbia sempre un “risultato”; inoltre non è vero che tale “risultato” (anche ammesso che esista) sia sempre infinito.

Per correggere questa presupposizione iniziamo dal punto (ii) e ricorriamo al primo esempio storico: il paradosso di Achille e della Tartaruga, interpretato modernamente con riferimento alla serie delle potenze di $\frac{1}{2}$. Esso smentisce il fatto che una “somma di infiniti addendi” sia sempre “infinita”, ma *induce l’allievo a darsi una spiegazione della situazione*. La risposta può portare a una seconda presupposizione errata:

Seconda presupposizione (errata)

- (i) una “addizione con infiniti addendi”
è pur sempre un’addizione e dunque avrà un “risultato”;
- (ii) il “risultato” non è infinito
quando gli addendi diventano indefinitamente piccoli

La correzione del nuovo punto (ii) può basarsi sul secondo esempio: la dimostrazione di Nicola della divergenza della serie armonica. L’allievo potrà notare che il fatto che il termine generale sia infinitesimo *non basta* a garantire la convergenza (l’insegnante mostrerà che la condizione è *necessaria*):

Terza presupposizione (parzialmente errata)

- (i) una “addizione con infiniti addendi”
è pur sempre un’addizione e dunque avrà un “risultato”;
- (ii) il “risultato”, quando gli addendi diventano indefinitamente piccoli,
può essere finito o infinito

Il punto (ii) è sotto controllo ed è ora necessario occuparsi del punto (i). Lo studente deve rendersi conto che una serie *non* è un’addizione (né, in generale, una “somma algebrica”). Questa esigenza ha naturalmente robuste motivazioni teoriche, ma può anche essere considerata dal punto di vista pratico.

Pensiamo ancora alla serie delle potenze di $\frac{1}{2}$. Una volta che l’allievo ha constatato che il suo “risultato” non è “infinito”, si pone il problema di capire quale esso sia (una serie è ancora vista come un’addizione e ogni addizione *deve* avere un risultato). In effetti, abbiamo mostrato che $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ non supererà 2; al più possiamo rilevare praticamente che più addendi si fanno entrare in gioco più la somma parziale si avvicina a 2. Ma è sufficiente ciò per

dire che la somma di “tutti gli infiniti addendi” è 2? Si potrebbe essere tentati di procedere nel (pericoloso) modo seguente: posto $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = s$, si “raccolghe” $\frac{1}{2}$ tra tutti i termini dal secondo in poi, ottenendo

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right) = s \qquad 1 + \frac{1}{2}s = s \qquad \text{da cui} \qquad s = 2$$

Abbiamo qui applicato le proprietà delle operazioni aritmetiche: è però lecito fare ciò con un’“addizione di infiniti addendi”? Il procedimento ci ha portato a una conclusione corretta (la somma è davvero 2), ma può costituire un precedente grave.



Fig. 2 – Guido Grandi

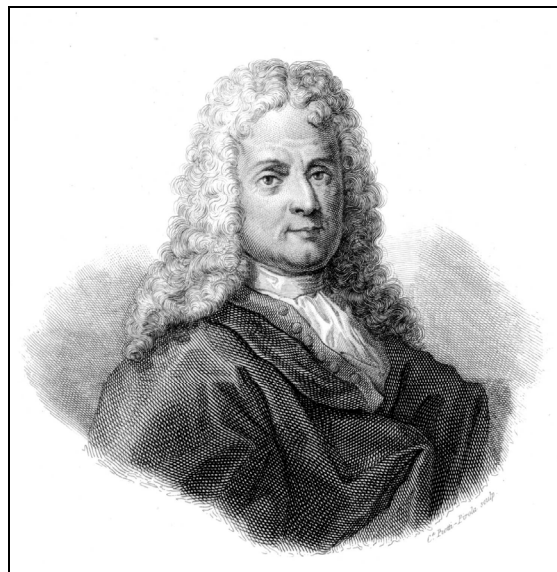


Fig. 3 – Jacopo Riccati

Prendiamo in considerazione ad esempio la “serie di Grandi”. Nel 1703, Guido Grandi (1671–1742) affermò (Silov, 1978, I, p. 85): «mettendo in modo diverso le parentesi nell’espressione $1-1+1-1+\dots$ io posso, volendo, ottenere 0 o 1. Ma allora l’idea della creazione *ex nihilo* è perfettamente plausibile»:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0+0+0+0+\dots = 0$$

$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\dots = 1+0+0+0+\dots = 1$$

Ora, quale di queste due opzioni, 0 o 1, dovremmo privilegiare per dare un “risultato” a $1-1+1-1+1-1+\dots$? Nel XVIII secolo la scelta cadeva spesso sulla media aritmetica di tali valori: la serie a segni alterni che oggi scriviamo $\sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i$ era eguagliata da Grandi e da altri matematici del periodo a $\frac{1}{2}$ (Leibniz, 1716).

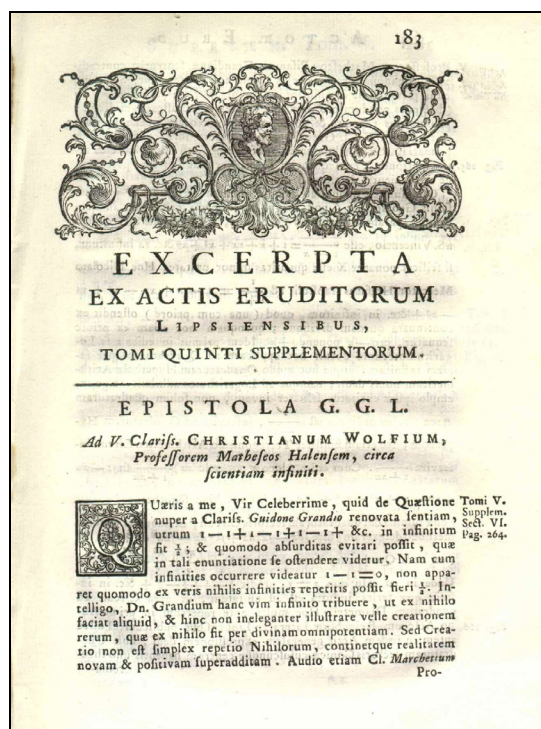


Fig. 4 –La memoria leibniziana sulla serie di Grandi

Per Grandi la “dimostrazione” di ciò poteva essere ricondotta allo sviluppo seguente (che oggi sappiamo essere valido soltanto per $|x|<1$):

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{+\infty} (-x)^i = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Ponendo $x = 1$ (ma ciò *non* rispetta la condizione ricordata, $|x| < 1$) seguirebbe la convergenza di $1-1+1-1+\dots$ a $\frac{1}{2}$ (Bagni 2005-b).

Da un punto di vista più elementare, il risultato di convergenza della serie di Grandi a $\frac{1}{2}$ potrebbe essere ottenuto anche attraverso un procedimento (pericolosamente) vicino a quello che, poco fa, ci ha condotto ad affermare che la somma di tutte le potenze di $\frac{1}{2}$ è 2. Posto $1-1+1-1+\dots = s$, si “raccolghe” -1 tra tutti i termini dal secondo in poi:

$$1-(1-1+1-\dots) = s \quad s = 1-s \quad \text{da cui} \quad s = \frac{1}{2}$$

Questa volta, tuttavia, le conclusioni sono *errate* (la stessa ammissione che $1-1+1-1+\dots$ indichi un numero s non è giustificata); oggi sappiamo che la successione delle somme parziali associata alla serie di Grandi non ammette limite, dunque *tale serie non ammette somma* (anche qualche matematico del XVIII secolo aveva suggerito una tale conclusione: Riccati, 1761, I, p. 87; non ci si occuperà, in questa sede, della convergenza secondo Cesaro: Bagni, 2006-a).

Verso una conclusione

Quanto osservato ci induce a ribadire che l’identificazione tra le “addizioni normali” e le serie intese come “addizioni con infiniti addendi” non è accettabile: l’ultimo esempio storico può essere didatticamente utile in tal senso.

Un primo approccio alle serie potrebbe però avvenire anche senza far riferimento alla nozione di limite (Bagni, 2005-a). In tale caso non sarà possibile invocare l’assenza del limite della successione delle somme parziali per escludere la presenza di un “risultato” per $1-1+1-1+\dots$. Una strategia alternativa si basa sulla possibilità di ottenere diversi “risultati” per $1-1+1-1+\dots$ applicando (impropriamente!) i procedimenti:

$$\begin{aligned} s &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0+0+0+0+\dots = 0 \\ s &= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\dots = 1+0+0+0+\dots = 1 \\ 1-1+1-1+\dots = s &\Rightarrow 1-(1-1+1-\dots) = s \Rightarrow s = 1-s \Rightarrow s = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Essi *non sono accettabili* in quanto applicano a un’ “addizione di infiniti addendi” delle proprietà che valgono per operazioni propriamente dette. La discordanza dei risultati ottenuti potrebbe indurre l’allievo a comprendere che *la*

presenza di questi “infiniti addendi” cambia radicalmente le cose, sia da un punto di vista pratico che da un punto di vista teorico. Dunque alla terza presupposizione si potrà sovrapporre la seguente:

Quarta presupposizione

- (i) una “addizione con infiniti addendi”
non è una vera e propria addizione;*
- (ii) essa può avere un “risultato” finito o infinito
oppure non avere alcun “risultato”*

Quest’ultima presupposizione, così progressivamente costruita, potrà finalmente consentire anche agli allievi principianti (dunque non sorretti dalla trattazione del concetto di limite) di entrare nel mondo delle serie senza l’eredità di un’analogia, quella tra la serie e l’addizione aritmetica, che spesso ostacola in maniera decisiva l’apprendimento.

Riferimenti bibliografici

- Bagni, G.T., 2000, Difficulties with series in history and in the classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (a cura di), *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (pp. 82–86). Kluwer, Dordrecht.
- Bagni, G.T., 2005–a, The historical roots of the limit notion. Cognitive development and development of representation registers. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 5, 4, 453–468
- Bagni, G.T., 2005–b, Mathematics education and historical references: Guido Grandi’s infinite series. *Normat*, 55, 4, 173–185
- Bagni, G.T., 2006–a, *Linguaggio, storia e didattica della matematica*. Piagora, Bologna
- Bagni, G.T., 2006–b, Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 3, 259–280
- Bagni, G.T., 2007, *Rappresentare la matematica. Simboli, parole, artefatti e figure*, Aracne, Roma
- Bagni, G.T., 2008, Richard Rorty (1931–2007) and his legacy for mathematics educators. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 1, 1–2
- Bagni, G.T., in via di pubblicazione, *Interpretazione e didattica della matematica. Una prospettiva ermeneutica*
- Barra, M., 2001, Ipersolidi e altri argomenti. *Progetto Alice*, 5, 2, 191–246

- D'Amore, B., 1996, L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi. *La matematica e la sua didattica*, 3, 322–335
- D'Amore, B., 2005, Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (Nyaya). *For the Learning of Mathematics*, 25, 2, 26–32
- D'Amore, B. & Sbaragli, S., 2005, Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*, 2, 139–163
- Gadamer, H.G., 2000, *Verità e metodo*, Bompiani, Milano (*Wahrheit und Methode: Grundzüge einer philosophischen Hermeneutik*, Mohr, Tübingen 1960)
- Heidegger, M., 2005, *Essere e tempo*, nuova edizione a cura di F. Volpi sulla traduzione di P. Chiodi, Longanesi, Milano (*Sein und Zeit*, Niemeyer, Halle an der Saale, 1927)
- Jung, M., 2002, *L'Ermeneutica*, Il Mulino, Bologna (*Hermeneutik zur Einführung*, Junius, Hamburg 2001)
- Leibniz, G.W., 1716, Epistola G.G.L. ad V. Clariss. Christianum Wolfium, Professorem Matheseos Halensem, circa scientiam infiniti. *Excerpta ex Actis Eruditorum Lipsiensibus*, V suppl., 183–188
- Nietzsche, F., 1975, *Frammenti postumi, 1885–1887*, Adelphi, Milano
- Radford, L., 1997, On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17, 1, 26–33
- Riccati, J., 1761, *Opere*, Jacopo Giusti e Giuseppe Rocchi, Lucca
- Rorty, R., 2004, *La filosofia e lo specchio della natura*, Bompiani, Milano (*Philosophy and the mirror of nature*, Princeton University Press, Princeton 1979)
- Schleiermacher, F.D.E., 2000, *Ermeneutica*, Bompiani, Milano
- Silov, G.E., 1978, *Analisi matematica. Funzioni di una variabile*, Mir, Moskva (*Matematičeskij analiz. Funkzii odnogo peremennogo*, Nauka, Moskva 1978)
- Speranza, F., 1999, Appello all'ermeneutica. *Quaderni di ricerca in didattica* 8, Palermo
- Vattimo, G., 2002, *Oltre l'interpretazione*, Laterza, Roma–Bari

Giorgio T. Bagni