2005, *Progetto Alice*, 17, 203–228

Funzioni: processi, proprietà, oggetti

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

Riassunto In questo lavoro si analizzano alcuni aspetti dell'apprendimento delle funzioni reali. Per quanto riguarda l'*action view* e gli approcci *object-oriented* e *property-oriented*, molte ricerche sottolineano l'importanza fondamentale delle rappresentazioni. Proponiamo un case study e concludiamo che, per rendere possibile un'efficace reificazione, è importante considerare e analizzare il ruolo dell'insegnante nell'istituzionalizzazione del concetto, tenendo conto sia delle diverse rappresentazioni che delle diverse radici di razionalità (Habermas, 2001).

Abstract In this paper, some aspects of the learning of real functions are investigated. As regards the *action view*, *object-oriented* and *property-oriented* approaches, several works indicate that the role of representations is fundamental. We propose a case study and conclude that, in order to make it possible the effective reification, it is important to analyse teacher's role in the institutionalization, taking into account both the different representations and the different roots of rationality (Habermas, 2001).

Introduzione: le funzioni e le loro rappresentazioni

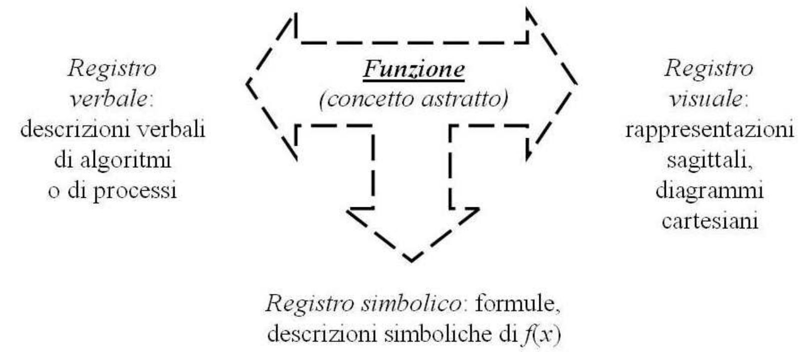
Importanti ricerche didattiche hanno indicato come l'apprendimento del concetto di funzione sia spesso favorito dall'iniziale considerazione di un'azione, o della sua interpretazione in un processo, nei quali concretamente si realizzi la corrispondenza tra quantità (numeri, grandezze fisiche etc.), una dipendente dall'altra (Briedenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992): ricordiamo sin d'ora l'opinione di A. Sfard, sulla quale torneremo nel corso del presente lavoro, che sottolinea come lo sviluppo di "oggetti matematici astratti" può essere considerato il prodotto di una piena comprensione di procedimenti (Sfard, 1989; Sfard & Thompson, 1994). Le ricerche di J. Habermas hanno evidenziato i ruoli interconnessi delle diverse radici della razionalità: alla razionalità epistemica (Cassirer, 1958, III, p. 329) si affiancano quella teleologica e quella comunicativa (Habermas, 2001, p. 99).

Assai importante è dunque l'attenzione all'aspetto semiotico (D'Amore, 2003a e 2003b; Mousoulides & Gagatsis, 2004; la raccomandazione di utilizzare diverse rappresentazioni nell'introduzione del concetto di funzione compare, nella letteratura, ad esempio nei lavori di J. Kaput a partire dalla fine degli anni Ottanta: Kaput, 1989): certamente infatti la considerazione di un'azione, di un processo e infine di un oggetto matematico richiede l'uso di rappresentazioni e, anticipando un'osservazione fondamentale, non dobbiamo dimenticare che «la distinzione tra un oggetto e la sua rappresentazione è un punto strategico per la comprensione» (Duval, 1993, p. 38, e soprattutto: Duval, 1995; si vedano anche gli spunti in: Fischbein, 1993).

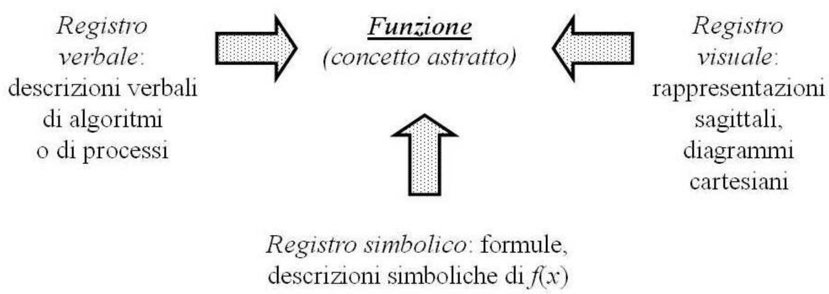
È tuttavia importante sottolineare che non concordiamo con una concezione platonistica affermata senza riserve: il ruolo delle rappresentazioni, a nostro avviso, non è quello di realizzare un'immagine di un oggetto matematico "assoluto". Con R. Thom notiamo: «Nell'interazione *Significato-Significante* è chiaro che il significato emette, genera il significante. Ma il significante genera nuovamente il significato ogni volta che noi interpretiamo il segno» (Thom, 1974, p. 233). Il processo è pertanto (almeno) duplice: limitare la didattica alla produzione di rappresentazioni può portare alla forzatura di alcuni aspetti del "concetto astratto" (ammesso che tale concetto astratto "esista") a scapito di altri (una vasta rassegna di posizioni è esaminata in: Lolli, 2002).

Anche nella formazione della *concept image*, che consente di giungere poi alla *concept definition* le rappresentazioni hanno ruoli rilevanti (Tall & Vinner, 1981, p. 152; la *concept image* e la *concept definition* sono state introdotte in: Vinner & Herhkowitz, 1980; indichiamo inoltre: Tall, 1988 e 1991; Vinner, 1983 e 1991; Davis & Vinner, 1986); e l'uso didattico delle tecnologie, spesso orientate in termini di potenziamento delle rappresentazioni visuali, assume una netta importanza (Briedenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992).

In ogni caso il concetto di funzione, almeno in una prima fase, è avvicinato mediante rappresentazioni, principalmente dedicate a situazioni in cui la funzione appare concretamente come un procedimento che pone in relazione due quantità. Possiamo sintetizzare ciò nello schema seguente, in cui si visualizza come il concetto di funzione, al pari di altri concetti matematici astratti, sembra "generare" le proprie rappresentazioni nei diversi registri.



La precedente figura, tuttavia, deve essere interpretata in termini corretti: dal punto di vista dell'apprendimento, le frecce presenti non dovrebbero condurre dall'"oggetto matematico astratto" alle sue diverse rappresentazioni semiotiche, ma potrebbero essere orientate nel verso opposto (come viene proposto nella figura seguente): per costruire il concetto di funzione (o per accostarsi ad esso), infatti, è necessario considerarne le varie rappresentazioni semiotiche (spunti interessanti sono analizzati in: Gagatsis & Christou, 2002; Gagatsis & Shiakalli, 2004). Nel presente lavoro esamineremo le caratteristiche di questo "accostamento" ed evidenzieremo alcune difficoltà ad esso connesse.



Dal processo all’oggetto

Certamente un apprendimento del concetto di funzione che si limiti alla considerazione di un’azione o di un processo (e delle sue rappresentazioni) risulterebbe parziale e incompleto: la formazione di un concetto matematico richiede, come abbiamo ricordato, una sequenza di fasi diverse, dunque un progressivo avvicinamento (sebbene non tutti i ricercatori optino, da alcuni anni a questa parte, per una struttura rigorosamente sequenziale: Slavit, 1997, p. 268). A. Sfard indica nella fase di *reificazione* il decisivo passaggio da un’introduzione basata sulla considerazione di un processo ad una più elevata ed organica concezione che consideri propriamente l’oggetto matematico (*object-oriented*) e sottolinea che «se vogliamo parlare di *oggetti* matematici, dobbiamo essere in grado di riferirci ai *prodotti* di certi processi senza preoccuparci di quegli stessi processi» (Sfard, 1991, p. 10; inoltre: Sfard, 1991, p. 21; Sfard, 1992; Sfard & Linchevsky, 1994; D. Slavit tuttavia osserva una qualche «mancanza di chiarezza in cui si incorre quando si afferma che qualcuno ha una comprensione *object-oriented* di un’idea matematica»: Slavit, 1997, p.265, in cui si cita: Thompson, 1994). Questione didatticamente delicata, a questo punto, è la effettiva e corretta realizzazione della fase di reificazione: il tentativo di forzare un’impostazione strutturale potrebbe infatti condurre alla formazione, nella mente dell’allievo, di pericolosi pseudo-oggetti, accompagnati dal sorgere o dal consolidarsi di misconcezioni.

Seguendo M. Artigue (Artigue, 1998), che riassume il «lavoro pionieristico» di E. Dubinsky (si veda: Dubinsky 1991, la cui impostazione può essere affiancata a quella di: Sfard, 1991 e 1992), una sequenza gerarchica può essere concepita dalla considerazione di un’azione alla seguente concezione di un processo (fase detta di *interiorizzazione*) e quindi ad un oggetto matematico (fase detta di *incapsulamento*). Assai significativa appare inoltre la nozione di *procept* (Gray & Tall, 1994): M. Artigue (rifacendosi in particolare a: Tall, 1996) rileva che «la nozione di procept sottolinea il ruolo giocato dal simbolismo (…). In effetti, molti dei simboli matematici hanno la natura propria del procept: rappresentano a volte un processo ed a volte il risultato di tale processo» (Artigue, 1998). Ancora una volta rileviamo che il ruolo delle rappresentazioni semiotiche e dei registri coinvolti appare essenziale.

Gli importanti quadri teorici ora tratteggiati si sono recentemente evoluti e, come abbiamo sopra anticipato, hanno progressivamente preso le distanze da un’impostazione troppo rigida e strettamente gerarchico-sequenziale: i rapporti tra processo ed oggetto hanno infatti sensibilmente valorizzato un confronto dialettico tra le fasi considerate ed una crescente importanza viene attribuita alla dimensione semiotica dell'attività di concettualizzazione (Radford, 2003).

Le proprietà

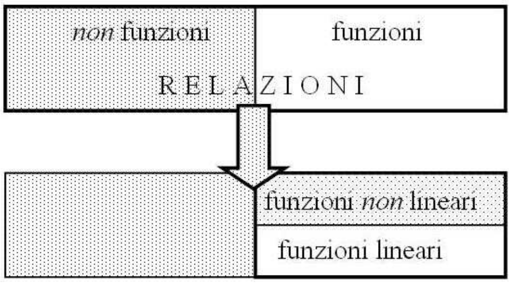
L'aspetto semiotico, dunque, si conferma di primaria importanza per una progressiva definizione di un quadro teorico per l'apprendimento dei concetti matematici, ed in particolare del concetto di funzione. Ciò può comportare la necessità di considerare attentamente alcune esigenze ad esso collegate, che anticipiamo: per un apprendimento organico, ad esempio, «non è sufficiente che ci sia uno sviluppo di ogni registro»; è indispensabile un «coordinamento dei diversi registri di cui si dispone» (Duval, 1995b, p. 259; si veda inoltre: D'Amore, 2001a e 2001b). Per rendersi conto dell'urgenza di una tale verifica si tenga presente inoltre la nettissima importanza delle rappresentazioni (ad esempio visuali, grafiche) nell'approccio al concetto di funzione del tipo *property-oriented* (Kieren, 1990), un'impostazione che non intende sostituirsi alle teorie precedentemente citate, bensì proporre di esse una rinnovata e più completa interpretazione (Slavit, 1997, p. 269; ma anche: Thompson, 1994).

Secondo tale approccio, una funzione viene introdotta e descritta con riferimento alle varie proprietà locali (intersezioni con gli assi, presenza di estremanti e di punti di flesso, presenza di asintoti verticali etc.) o globali (simmetria, periodicità, invertibilità etc.) di cui essa gode (ovvero non gode): evidentemente in un'impostazione *property-oriented*, che didatticamente è di primaria importanza, è coinvolta decisamente la capacità dell'allievo di stabilire connessioni significative tra rappresentazioni diverse (Nemirowsky & Rubin, 1992; Monk & Nemirowsky, 1994), spesso anche con decisivo riferimento alle tecnologie grafiche (Ruthven, 1990).

La stessa esperienza didattica quotidiana permette di affermare che il rilevamento e l'analisi di alcune proprietà globali e locali di cui gode una funzione (in particolare, di cui gode il suo diagramma cartesiano) è essenziale per caratterizzare alcune importanti classi di funzioni: ad esempio, le funzioni lineari hanno diagrammi facilmente caratterizzabili da evidenti proprietà, soprattutto di tipo globale, e ciò ci rende possibile identificare una funzione lineare come una funzione il cui diagramma cartesiano goda delle proprietà considerate; un analogo discorso può essere sviluppato per altre classi di funzioni, come le funzioni quadratiche o le funzioni periodiche; le più significative proprietà che caratterizzano le funzioni continue o le funzioni derivabili sembrano invece essere di tipo locale, e gli esempi potrebbero costituire ancora un lungo elenco.

Alcune ricerche sperimentali (Slavit, 1997, p. 272) hanno messo in evidenza che gli allievi spesso combinano un approccio basato sulla considerazione di una concreta corrispondenza (*action view*, *operational view*) ed uno basato sul rilevamento di alcune proprietà significative (*property-oriented*). Ad esempio, nello studio di funzioni (ci riferiamo soprattutto alle scuole superiori italiane, con studenti di 18-19 anni), gli allievi considerano talvolta sia alcune corrispondenze tra alcune singole ascisse e le rispettive ordinate, sia alcune proprietà globali o locali della funzione considerata. Il primo approccio, dal punto di vista semiotico, è collegato alla rappresentazione numerica, il secondo appare più vicino alla rappresentazione grafica, quindi al registro visuale.

Un'impostazione *property-oriented* non si rivela utile soltanto per classificare le funzioni, dunque per raggruppare alcune funzioni sulla base di caratteristiche comuni; lo stesso concetto generale di funzione, come particolarizzazione del concetto generale di relazione, appare infatti suscettibile di un'interpretazione *property-oriented*: ad esempio, una funzione D→**R** è una relazione (un sottoinsieme di D×**R** ovvero di **R**×**R**, essendo D⊆**R**: ma una tale introduzione delle relazioni può non essere didatticamente consigliabile) il cui diagramma cartesiano incontra *non più di una volta* una retta parallela all'asse delle ordinate, cioè di equazione $x = a$ (con $a \in \mathbf{R}$; o incontra *una e una sola volta* una retta di equazione $x = b$ con $b \in$ D).



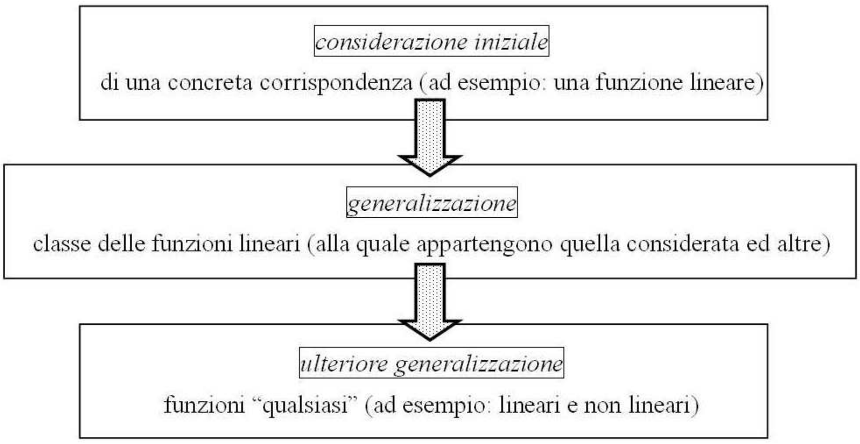
Riassumendo quanto sopra esemplificato, osserviamo che un approccio *property-oriented* può essere basato sulla partizione di un insieme I in un sottoinsieme S costituito dagli elementi che godono della proprietà P e nel sottoinsieme S' complementare di S rispetto a I, costituito, dunque, dagli elementi che *non* godono della proprietà P (si veda la figura precedente).

Considerando questa impostazione, una fase essenziale (talvolta tutt'altro che semplice) è la precisazione dell'*ambiente*, cioè dell'insieme I nell'ambito del quale operare la partizione sopra esemplificata: nel caso del concetto generale di funzione, ad esempio, prima di passare a considerare le relazioni in grado di essere caratterizzate dalla proprietà sopra citata, sarebbe necessario precisare che cosa si debba intendere con il termine “relazione”.

Generalizzazione e particolarizzazione

Quanto notato a proposito di un approccio *property-oriented* può far pensare a procedimenti basati su di una forma di *particolarizzazione*: dal concetto (generale) di relazione si passerebbe al concetto (meno generale) di funzione e quindi ad una particolare classe di funzioni (ad esempio le funzioni lineari). Ma l’apprendimento avviene davvero così?

L’esperienza didattica suggerisce forse un percorso opposto: la costruzione di un concetto generale sembra seguire un itinerario che da una particolare corrispondenza porta alla *generalizzazione* di essa in un’intera classe di funzioni per giungere infine al concetto generale di funzione, come indicato nella figura seguente (sempre considerando l’esempio delle funzioni lineari).



Ogni generalizzazione (passaggio da una classe di funzioni ad un’altra, più ampia) avviene mediante la considerazione di alcune nuove corrispondenze:

- aventi qualche caratteristica (ad esempio con riferimento ai grafici cartesiani) diversa dalle caratteristiche delle corrispondenze considerate nella fase precedente;

- aventi qualche caratteristica comune con le corrispondenze considerate nella fase precedente.

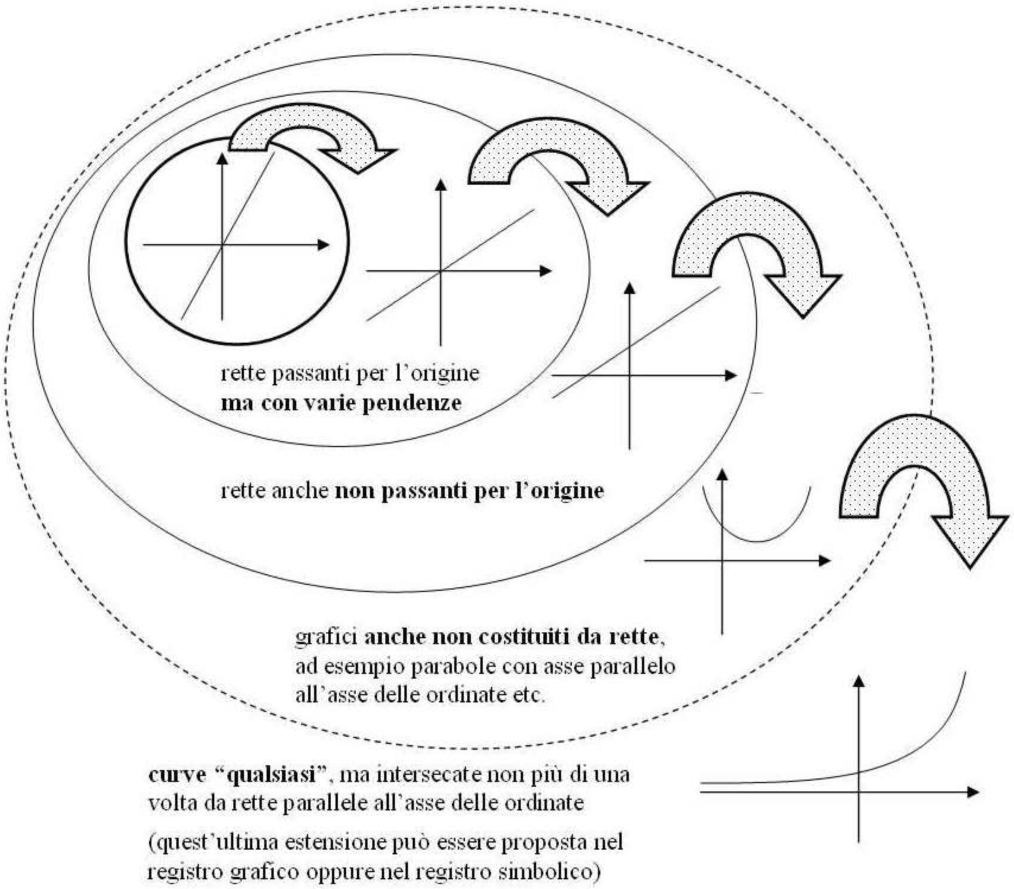
Mantenendo il citato riferimento alle funzioni lineari, nella tabella seguente è delineato un accostamento al concetto di funzione.

- È possibile iniziare con la considerazione della singola corrispondenza che ad un numero associa il suo doppio: $\boxed{x \to 2x}$
(descritta, nel piano cartesiano, dalla *singola retta* di equazione: $y = 2x$)
- Si può considerare una generalizzazione: $\boxed{x \to mx}$
(oppure: $x \to mx+q$, le quali, pur non godendo delle proprietà di linearità, hanno grafici cartesiani costituiti da *rette*)
- Un'ulteriore generalizzazione porta quindi a: $\boxed{x \to f(x)}$
(mediante la considerazione di funzioni aventi grafici cartesiani *non costituiti da rette*, ma tali da mantenere alcune caratteristiche peculiari come quella di *intersecare non più di una volta una retta parallela all'asse delle ordinate*)

Il procedimento ora esaminato non è certamente unico: ad esempio, nella tabella seguente la sequenza a destra include quella a sinistra, meno dettagliata:

corrispondenze considerate	*rappresentazioni grafiche*	*corrispondenze considerate*	*rappresentazioni grafiche*
singola corrispondenza $x \to 2x$ ↓ funzioni rappresentabili da una retta ↓ funzioni "qualsiasi"	retta di equazione $y = 2x$ ↓ rette di equazione $y = mx+q$ ↓ curve intersecate non più di una volta da rette parallele all'asse delle ordinate	singola corrispondenza $x \to 2x$ ↓ funzioni lineari (propriamente dette) ↓ funzioni rappresentabili da una retta ↓ funzioni polinomiali ↓ funzioni "qualsiasi"	retta di equazione $y = 2x$ ↓ rette di equazione $y = mx$ ↓ rette di equazione $y = mx+q$ ↓ esempi di rette, parabole, cubiche etc. ↓ curve intersecate non più di una volta da rette parallele all'asse delle ordinate

Fondamentale, in un simile procedimento, è il ruolo dei controesempi: infatti è indispensabile che l'allievo si renda conto che la generalizzazione da una classe ad una classe più generale, a partire dalla singola corrispondenza considerata, realizza un'effettiva estensione.



Chiaramente ad un maggior numero di suddivisioni considerate, e quindi di generalizzazioni, corrisponde un apprendimento più profondo e completo del concetto in questione.

Non sempre tuttavia la distinzione delle varie classi può risultare agevole, da un punto di vista concettuale e particolarmente dal punto di vista della rappresentazione grafica: ad esempio, la distinzione tra "funzioni polinomiali" e "funzioni qualsiasi" corrisponde con difficoltà ad una differenza delle caratteristiche grafiche (si veda la figura precedente, in cui l'insieme delle funzioni polinomiali è indicato tratteggiato). Si potrebbe suggerire l'assenza, per i grafici delle funzioni polinomiali, di asintoti; ma tale proprietà non caratterizza unicamente le funzioni polinomiali nell'ambito delle funzioni "qualsiasi" (è immediato verificare, ad esempio, che il grafico di $y = x+\cos x$ non è dotato di asintoti). Dunque può essere più semplice caratterizzare le funzioni polinomiali ricorrendo al registro rappresentativo simbolico piuttosto che all'esame dei grafici cartesiani, e questo cambiamento di strategia presuppone, nell'allievo, una buona capacità di coordinazione dei diversi registri rappresentativi. Il ruolo dell'insegnante è comunque fondamentale per mantenere il corretto rapporto tra l'"oggetto matematico" (come esso viene concepito dall'allievo) e le sue rappresentazioni semiotiche.

Proprio in queste ultime difficoltà, collegate alle caratteristiche ed alle potenzialità dei registri rappresentativi di volta in volta impiegati, individuiamo un limite connesso ad un approccio *property-oriented*: la sua importanza didattica deve essere considerata primaria ed evidente, ma esso non sembra esaurire il problema della reificazione, dunque della costruzione di un oggetto matematico (lo stesso D. Slavit osserva prudentemente che non sono noti studi decisivi riguardo alla questione se un'impostazione *property-oriented* possa agevolare lo sviluppo di una concezione *object-oriented* della nozione di funzione: Slavit, 1997, p. 271).

Riassumendo, un importante elemento va rilevato a proposito di un approccio *property-oriented*: nel caso del concetto di funzione (e in modo del tutto analogo nel caso di altri concetti) esso viene spesso ad essere fortemente basato sulla rappresentazione visuale, e segnatamente sul diagramma cartesiano: ciò può comportare alcuni ostacoli per l'allievo (Bagni, 1997 a e 1997b); inoltre l'eventuale uso di diverse rappresentazioni del concetto i funzione (ricordiamo il problema della caratterizzazione delle funzioni polinomiali, precedentemente segnalato) può richiedere una notevole capacità di coordinazione dei diversi registri rappresentativi. Quindi uno dei compiti primari dell'insegnante è quello di stabilire e di mantenere l'indipendenza dei ruoli che vengono assegnati, nella pratica didattica ed in particolare nei vari momenti dell'apprendimento, all'oggetto matematico (una volta che esso sia costruito, o in fase di costruzione) ed alle sue varie rappresentazioni.

Funzioni e registri rappresentativi: un caso sperimentale

La considerazione di alcune particolari proprietà (segnatamente riferite alla rappresentazione grafica di una funzione reale) è certamente utile, come sopra detto, per una caratterizzazione della funzione in esame o di un'intera classe di funzioni, ma può, in alcuni casi, indurre perplessità nell'allievo e costituire addirittura un ostacolo. Per chiarire il senso di quest'ultima affermazione, volutamente provocatoria, proporremo lo studio di un caso sperimentale.

Anticipiamo che non ci occuperemo dell'accostamento alle funzioni di allievi particolarmente giovani; anzi, scopo dell'esperienza che descriveremo è di evidenziare come anche in alcuni studenti universitari (i quali, dunque, da tempo dovrebbero avere appreso e utilizzato il concetto di funzione nella pratica didattica) una variazione del registro rappresentativo può costituire un ostacolo.

Riportiamo la trascrizione di un'esperienza che ha visto coinvolti un insegnante (*Ins.*) e un'allieva (*Anna*) frequentante il primo anno del corso di laurea in Scienze Biologiche; l'allieva (19 anni, curriculum regolare presso un Liceo scientifico italiano ad indirizzo tradizionale) stava seguendo le lezioni del corso di Calcolo e Biostatistica, comprendente elementi di analisi (limiti, derivate e integrali; al momento dell'esperienza non erano state trattate equazioni differenziali), di geometria e di statistica.

L'esperienza ha avuto luogo nell'ambito di alcuni incontri individuali di approfondimento ed esercitazione (l'insegnante collaborava come esercitatore nel corso frequentato dall'allieva).

L'insegnante sottopone all'allieva un foglio con la traccia:

> Completa la scrittura seguente. Che cosa rappresenta $y = f(x)$ nel piano cartesiano?
>
> $f''(x) = x$ $\qquad\qquad$ $f(x) = \ldots\ldots\ldots$

L'esercizio proposto prevede una prima parte in cui sarà coinvolto il registro rappresentativo simbolico ed una seconda parte in cui sarà necessario interpretare quanto ottenuto nel piano cartesiano. Chiaramente, per risolvere correttamente e in termini generali l'esercizio, $f(x)$ dovrà essere collegata ad una *famiglia di funzioni* (non ad un singola funzione), ciò dovrebbe essere fatto sia con riferimento alla rappresentazione simbolica (ad esempio mediante un'espressione parametrica) sia in quello della rappresentazione grafica (con la considerazione di un insieme di curve).

Anna (dopo alcuni secondi di attesa): Mi dicono che la derivata seconda è x. Bisogna integrare e quindi si deve usare la solita regola *(scrive)*:

> $f''(x) = x$ $\qquad\qquad$ $f(x) = \ldots\ldots\ldots$
>
> $\int x^n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

Anna (fissa l'insegnante per alcuni secondi): La formula non è questa?
Ins.: Controlla bene.
Anna: Ah, sì: mancano il *dx* e la *c (completa la formula)*.

$f''(x) = x$	$f(x) = \ldots\ldots\ldots$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	

Anna (fissa ancora l'insegnante per qualche secondo): Adesso integro.

$f''(x) = x$	$f(x) = \ldots\ldots\ldots$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	
	$\frac{x^2}{2}$
	$\frac{1}{2}\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{6}$

Anna: La $f(x)$ è $\frac{x^3}{6}$, posso completare l'esercizio.

$f''(x) = x$	$f(x) = \frac{x^3}{6}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	
	$\frac{x^2}{2}$
	$\frac{1}{2}\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{6}$

Ins.: In sé non sarebbe sbagliato, ma cosa diresti per quanto riguarda le costanti di integrazione?
Anna (immediatamente): Ma sì! Scusi, me la dimentico sempre *(aggiunge c nel risultato e nei passaggi)*.

$f''(x) = x$	$f(x) = \frac{x^3}{6} + c$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	

$$\frac{x^2}{2}+c$$
$$\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}=\frac{x^3}{6}+c$$

Ins.: Adesso va bene?
Anna: Direi di sì. Francamente non saprei che cosa aggiungere ancora.
Ins.: Devo ripeterti quello che ti ho detto prima, quello che hai scritto non è sbagliato, ma forse non è la soluzione più generale dell'esercizio. Pensaci un po': perché hai messo quella costante di integrazione?
Anna: Perché l'integrale indefinito si fa così.
Ins.: E perché?
Anna: Perché derivando le costanti vanno via.
Ins.: Qui quante integrazioni hai fatto?
Anna: Due.
Ins.: E non ti aspetti due costanti?
Anna: Forse, ma scrivere c o $2c$ è la stessa cosa.

Chiaramente, dunque, la presenza di due integrazioni successive viene ad essere inusuale per l'allieva, la quale ha invece avuto spesso occasione di integrare separatamente gli addendi di una somma di funzioni (un caso spesso esplicitamente esaminato nei corsi elementari di analisi): qui una consolidata abitudine sembra generare una sorta di effetto *Einstellung* ed alcune clausole del contratto didattico potrebbero aver indotto l'allieva a riprendere e ad applicare delle osservazioni che sarebbero corrette soltanto se inserite in altri contesti.

Ins.: In che senso?
Anna: Quando integro metto $+c$ e quando derivo va via. Nello stesso modo andrebbe via anche $+2c$. *(Per qualche secondo fissa il foglio)*. Sono sicura. Se prendo il risultato e derivo due volte viene x.
Ins.: Che derivando due volte tu ottenga x è vero. Ma prova a risolvere daccapo l'esercizio, facendo con calma le due integrazioni, una dopo l'altra.

Anna prende un altro foglio e scrive:

$$f''(x)=x \qquad f'(x)=\frac{x^2}{2}+c \qquad f(x)=\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+c+c=\frac{x^3}{6}+2c$$

Ins.: Guarda bene l'ultimo passaggio, da f' a f: hai integrato proprio tutto?
Anna (dubbiosa): Ah… si integra anche il c?
Ins.: Tu che cosa ne dici?

Anna (dopo avere riflettuto per pochi istanti): Credo di sì. In effetti prima non ci avevo proprio pensato (*corregge precipitosamente l'ultima formula*).

$f''(x) = x$	$f'(x) = \dfrac{x^2}{2} + c$	$f(x) = \dfrac{x^3}{6} + cx + c$

Ins.: Quelle due costanti devono proprio essere uguali?
Anna: No.
Ins.: Allora sarebbe preferibile indicarle con due lettere diverse (*Anna corregge nuovamente l'ultima formula*).

$f''(x) = x$	$f'(x) = \dfrac{x^2}{2} + c$	$f(x) = \dfrac{x^3}{6} + cx + k$

Ins.: Adesso va bene. Va' pure avanti.
Anna: Devo disegnare questa roba nel piano cartesiano. Ma finché ho le lettere non posso andare avanti.
Ins.: Dunque che cosa intendi fare?
Anna: Posso dare dei valori alle lettere. *(Pausa).* Con gli integrali si dovrebbe fare così.
Ins.: E quali valori vuoi attribuire a c ed a k?
Anna: Tutti i numeri reali. Cioè dei numeri qualsiasi, a scelta.

Osserviamo che fino a questo punto il registro coinvolto è quello simbolico, mentre nessun riferimento è stato fatto al registro visuale. Ma la stessa traccia dell'esercizio proposto porta l'allieva a considerare ora la rappresentazione grafica della funzione appena ricavata e dunque forza un cambiamento di registro.

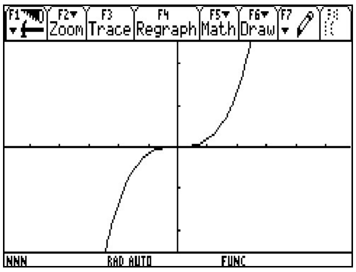
Ins.: Ti propongo, ad esempio, i tre casi: (1) $c = 0$ e $k = 0$; (2) $c = 0$ e $k = 1$; (3) $c = -1$ e $k = 0$. Con l'aiuto della calcolatrice grafica, traccia i tre diagrammi. Riportali su di un foglio in modo da poterli confrontare e poi dimmi che cosa ne pensi.

L'insegnante scrive i valori delle costanti e le tre formule.

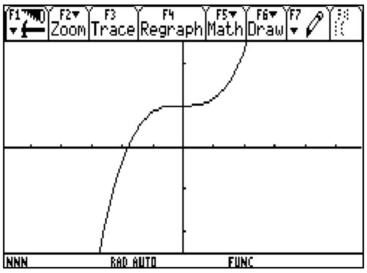
(1) $c = 0$ e $k = 0$;	(2) $c = 0$ e $k = 1$	(3) $c = -1$ e $k = 0$
(1) $y = \dfrac{x^3}{6}$	(2) $y = \dfrac{x^3}{6} + 1$	(3) $y = \dfrac{x^3}{6} - x$

Anna imposta le formule sulla calcolatrice grafica e ottiene, uno dopo l'altro, i tre diagrammi cartesiani che riportiamo nella figura.

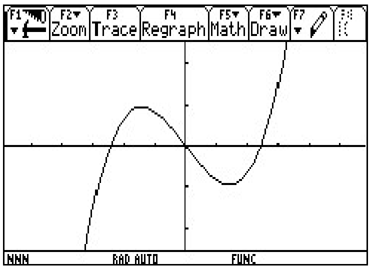
(1)



(2)



(3)



Anna (dopo aver osservato attentamente i diagrammi delle tre funzioni che ha schizzato su di un foglio): I primi due grafici sono uguali, ma il terzo no.
Ins.: Non mi pare che i primi due grafici possano essere considerati uguali.
Anna: Sì, Intendevo dire che le prime due sono la stessa curva spostata rispetto all'asse delle x. Invece la terza è una curva proprio diversa.
Ins.: E secondo te questo che cosa significa?
Anna (dubbiosa, dopo qualche istante): Che c'è qualcosa che non va.
Ins.: In che senso?
Anna: Se una curva è la soluzione l'altra non lo è. Finché una stessa curva si sposta, come accade per (1) e (2), allora tutto va bene. Con gli integrali succede sempre. Ma qui cambia la curva (*osserva le curve con attenzione*): il terzo grafico incontra per tre volte l'asse x, gli altri grafici una sola volta.
Ins.: Eppure abbiamo ottenuto le tre curve partendo dal problema e operando senza fare errori; e la calcolatrice non ha sbagliato. Stando così le cose, tutte le tre curve dovrebbero poter essere considerate il diagramma di una soluzione del nostro esercizio.
Anna (perplessa): Se dovessi scegliere una delle tre curve per identificare la soluzione sceglierei la (3): mi sembra che sia la più generale, c'è anche il termine in x. Le prime due vengono così solo perché la c è 0, ma sono un caso particolare.

(Per un'interpretazione delle presenti risposte concernenti la «costante di integrazione» alla luce della teoria delle *intuitive rules* di D. Tirosh si veda ad esempio: Stavy & Tirosh, 1996).

Dunque Anna è passata decisamente alla considerazione di alcune proprietà della funzione ricavata (D. Slavit nota che «la presenza della rappresentazione grafica sembra indurre l'allievo a considerare le proprietà della funzione»: Slavit, 1997, p, 273); si è infatti resa conto che la presenza di tre intersezioni distinte della curva con l'asse delle ascisse è dovuta alla presenza di una c non nulla. Tuttavia mostra di avere delle rilevanti difficoltà nel considerare una "soluzione" dell'esercizio costituita da una famiglia di funzioni che, rappresentate nel registro visuale mediante i diagrammi cartesiani, non originino delle curve congruenti.

Ins.: Ma non potrebbero essere tutte e tre soluzioni? In fondo vengono tutte dall'equazione $y = \frac{x^3}{6}+cx+k$. Anche altre curve, con diversi valori di c e di k sono soluzioni.
Anna (con aria dubbiosa): Quindi il grafico non esiste?
Ins.: Non esiste un grafico unico perché non esiste un'unica funzione: esistono infinite curve, una per ogni scelta di k e di c.
Anna: Ma sono curve molto diverse tra loro.
Ins.: Certamente. Lo trovi così strano?
Anna (scuotendo la testa): Secondo me un esercizio deve avere una sola soluzione. Un solo grafico.

Osserviamo che questa posizione potrebbe apparire incoerente rispetto a quanto precedentemente affermato dall'allieva stessa (la bibliografia a proposito delle incoerenze è vastissima: ci limitiamo a segnalare: Tall, 1990; Tirosh, 1990); ma la prosecuzione dell'intervista chiarirà che più che di vere e proprie affermazioni mutuamente incoerenti si tratta di riferimenti distinti a diversi tipi di rappresentazione che risultano quindi, in questo caso, non pienamente coordinati tra loro.

Ins.: Ci sono tanti esercizi che hanno più di una soluzione. Tu stessa avevi accettato come soluzione l'equazione $y = \frac{x^3}{6}+cx+k$. Per diversi valori di c e di k questa diventa un'equazione diversa, rappresenta diverse funzioni.

Anna: Non è la stessa cosa: $y = \frac{x^3}{6}+cx+k$ è un'equazione. La posso scrivere tutta insieme, è una cosa *(l'allieva accentua il termine "una")*, anche se può essere trasformata in cose diverse giocando sui c e sui k. Tanti grafici invece come li scrivo o li disegno tutti insieme? Quando passo ai grafici ne devo scegliere per forza uno. Di solito, con gli integrali il vantaggio è che le curve sono uguali e si spostano solo in alto e in basso, come la (1) e la (2): ma la (3) è una curva tutta diversa. Questo è il problema. E ce ne saranno altre, di diverse.

L'allieva è giunta al punto cruciale: infatti afferma esplicitamente che utilizzando il registro simbolico è possibile esprimere con *una* singola scrittura un intero insieme di funzioni (attraverso il ricorso ad uno o più parametri, procedimento evidentemente non nuovo per l'allieva), ma tale operazione *non può essere ripetuta nel registro visuale*, considerando cioè i rispettivi diagrammi cartesiani (ricordiamo che l'allieva stessa aveva osservato, al momento di passare dall'equazione della funzione al suo diagramma cartesiano: «finché ho le lettere non posso andare avanti») e le proprietà che in tale modo risultano evidenti.

Dalle parole di Anna, dunque, emerge che la differente flessibilità dei registri rappresentativi utilizzati, simbolico e visuale, riflette una differenza di potenziale generalità, quindi di possibile utilizzazione dei registri stessi: e tale discrepanza può costituire un ostacolo non trascurabile, particolarmente in mancanza di un'adeguata coordinazione delle diverse rappresentazioni utilizzate. Per superare le conseguenti difficoltà appare dunque necessario un intervento finale di chiarimento, plausibilmente affidato all'insegnante, mediante il quale venga definitivamente precisato ed istituzionalizzato il ruolo della rappresentazione grafica e delle proprietà che da essa possono essere desunte. E questa necessità potrebbe essere ineludibile, a nostro parere, sia nel caso delle funzioni trattate nell'esercizio sopra considerato, in ambito universitario, ma anche, più in generale, con riferimento alla delicata fase di reificazione del concetto di funzione, con allievi di livelli scolastici inferiori.

Conclusione: istituzionalizzazione e ruolo dell'insegnante

Prima di fissare alcune considerazioni sulla fase di reificazione (e sul ruolo dell'insegnante, la cui importanza è emersa chiaramente alla fine del paragrafo precedente) ci sembra opportuno ribadire che anche le osservazioni conclusive che seguiranno non dovranno essere considerate con riferimento ad uno svolgimento rigidamente sequenziale dei processi esaminati: come sopra anticipato, infatti, riteniamo che l'apprendimento di un concetto matematico possa essere scomposto in varie fasi, ma che tale suddivisione non debba essere concepita in termini assolutamente rigidi, ad esempio dal punto di vista cronologico, sebbene alcune fasi possano essere considerate in un certo senso propedeutiche rispetto ad altre; preferiamo comunque pensare ad un confronto progressivo di momenti diversi che possono svilupparsi, almeno entro certi limiti, in termini dialettici, anche con eventuali riprese ed approfondimenti di fasi precedenti.

Inizialmente il passaggio dalla considerazione di un'azione alla concezione di un processo (interiorizzazione) rimane riferito all'ambito del caso considerato, dunque di una situazione particolare e singola: l'allievo sta esaminando un esempio di realizzazione dell'"oggetto matematico" che, in un futuro, potrà concepire in termini generali come *funzione*. Un approccio *property-oriented* può già consentire la precisazione delle caratteristiche di una classe di questi esempi, frequentemente e soprattutto giocando la partita sul piano delle rappresentazioni (in prevalenza visuali); in questa fase, una prima forma di reificazione potrebbe forse prospettarsi anche in forma parziale, dunque con riferimento ad una classe di funzioni (nel caso, ad esempio, delle funzioni lineari, che già abbiamo sopra ricordato, la linearità può concepirsi come la combinazione di alcune proprietà specifiche: Slavit, 1997, p. 275).

Un momento importante nella costruzione dell'oggetto astratto, dunque dell'oggetto matematico vero e proprio, sta nelle fasi di generalizzazione (Eisenberg & Dreyfus, 1994); l'importanza delle proprietà che sono state utilizzate per identificare alcune classi di funzioni deve pertanto essere ridimensionata, ovvero ricondotta alla dimensione corretta (ancora una volta ribadiamo l'essenzialità del ruolo dei controesempi): una funzione può infatti godere di tali proprietà (e allora sarà una funzione di un certo tipo, ad esempio lineare), ma può anche *non* goderne, senza con ciò perdere il carattere di funzione (l'estensione impropria della linearità, che può essere dovuta anche ad elementi affettivi, è esaminata in: Markovitz, Eylon & Bruckheimer, 1986 e in: Bagni, 2000). Altre sono le particolarità di cui deve godere un oggetto matematico per poter essere detto, in generale, *funzione*, e tali proprietà (che possono ad esempio essere evidenziate esaminando i grafici cartesiani delle relazioni in esame) si mantengono, nella considerata generalizzazione.

Nel paragrafo dedicato all'approccio *property-oriented* abbiamo osservato che uno dei compiti dell'insegnante è quello di stabilire e di mantenere l'indipendenza dei ruoli assegnati, nella pratica didattica e nell'apprendimento, all'oggetto matematico ed alle sue varie rappresentazioni. In effetti nella fase di passaggio dalla considerazione di un processo alla costruzione di un oggetto generale, svincolato da singoli esempi o da classi particolari di esempi, dunque nella fase di reificazione propriamente detta, l'insegnante viene ad essere un protagonista dell'istituzionalizzazione (il riferimento è a: Brousseau, 1986, per la teoria delle situazioni; ma anche a: Perrin-Glorian, 1994 e 1997): insomma, l'insegnante, a questo punto, in una situazione didattica, ha il compito di tirare le somme, di curare esplicitamente che i vari elementi che entrano a far parte della *concept image*, per poi originare una compiuta *concept definition*, mantengano ruoli corretti; e di proporre dunque all'allievo la generalizzazione conclusiva, operando con esempi significativi e suggerendo, ove necessario, opportuni controesempi, illustrando classificazioni, mantenendo e gestendo attentamente i riferimenti (in questa fase non eccessivamente preponderanti) alle varie rappresentazioni semiotiche ed al loro ruolo.

Il riferimento all'analisi epistemica disciplinare è dunque essenziale: l'allievo deve comprendere appieno alcune caratteristiche proprie della matematica, e tale apprendimento non può trascurare, ad esempio, una dimensione sociale. Con J.-Ph. Drouhard e M. Panizza, potremmo insomma dire che l'insegnante deve infine proporre all'allievo quelle conoscenze «del III ordine» che, al di là degli aspetti meramente tecnici collegati a definizioni e teoremi (dunque alle conoscenze del I ordine, peraltro essenziali nella gestione del processo) ed alle regole di deduzione o di rappresentazione simbolica (alle conoscenze del II ordine, spesso coinvolte, ad esempio, nell'analisi delle varie proprietà identificate in una funzione), consentiranno all'allievo stesso una presa di coscienza di aver raggiunto un livello di apprendimento le cui caratteristiche di generalità e di completezza sono proprie della matematica (Drouhard & Panizza, 2003; inoltre: Robert & Robinet, 1996). A nostro giudizio, una consapevolezza di queste caratteristiche del sapere (appreso e da apprendere), da parte dell'allievo, viene ad essere una componente essenziale di tutto l'insegnamento-apprendimento nel caso specifico della matematica e potrà completare il bagaglio di conoscenze che l'allievo sarà chiamato ad utilizzare per essere il protagonista di un'attività matematica.

Per rendere possibile un'efficace reificazione, dunque, è essenziale considerare e analizzare il ruolo dell'insegnante nell'istituzionalizzazione del concetto, tenendo conto dei ruoli sia delle diverse rappresentazioni che delle diverse «strutture di razionalità ramificate del sapere, dell'agire e del parlare» (Habermas, 2001, p. 99). Questo ci porta infine a considerare le diverse radici della razionalità, secondo l'approccio teorico di J. Habermas: «noi applichiamo il predicato "razionale" in prima linea a opzioni, azioni ed enunciazioni linguistiche perché nella struttura proposizionale del conoscere, in quella teleologica dell'agire e in quella comunicativa del parlare ci imbattiamo in *radici diverse di razionalità*» (Habermas, 2001, p. 99). I ruoli delle diverse rappresentazioni semiotiche impiegate possono quindi intrecciarsi con tali diverse radici di razionalità: il coordinamento di tali rappresentazioni viene dunque ad essere della massima importanza per l'apprendimento.

Ringraziamenti e nota

L'autore ringrazia vivamente Athanasios Gagatsis (Università di Nicosia, Cipro), per i preziosi suggerimenti.

Il presente lavoro riprende i dati sperimentali presentati nelle comunicazioni dell'Autore al XVIII e XIX Seminario Franco-Italiano di Didattica dell'Algebra (SFIDA-18, Torino 2002 e SFIDA-19, Nizza 2002).

Bibliografia

Artigue, M., 1998, L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 18.2, 231-262.

Bagni, G.T., 1997a, Dominio di una funzione, numeri reali e numeri complessi. Esercizi standard e contratto didattico nella scuola secondaria superiore, *La matematica e la sua didattica*, 3, 306-319.

Bagni, G.T., 1997b, La visualizzazione nella scuola secondaria superiore, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20B-4, 309-335.

Bagni, G.T., 2000, "Simple" rules and general rules in some High School students' mistakes, *Journal fur Mathematik Didaktik*, 21, 2, 124-138.

Briedenbach, D.E.; Dubinsky, E.; Hawks, J. & Nichols, D., 1992, Development of the process conception of function, *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285.

Brousseau, G., 1986, Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques: *Recherches en didactique del mathématiques*, 7, 2, 33-115.

Cassirer, E., 1958, *Philosophie der symbolischen Formen*. WBG, Darmstadt.

D'Amore, B., 2001a, Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques, *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXVIII, 1, 17-46.

D'Amore, B., 2001b, Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution, *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXVIII, 2, 143-168.

D'Amore, B., 2003a, La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manqué, *For the learning of mathematics*, 23, 1, 47-51.

D'Amore, B., 2003b, The noetic in mathematics, *Scientia Pedagogica Experimentalis*, XXXIX, 1, 75-82.

Davis, R.B. & Vinner, S., 1986, The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages, *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.

Drouhard J.-Ph. & Panizza, M., 2003, What do the Students Need to Know, in Order to be Able to Actually do Algebra? The Three Orders of Knowledge, *CERME-3 Proceedings*, at the printer's.

Dubinsky, E., 1991, Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 95-126, Kluwer, Dordrecht.

Duval, R., 1993, Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.

Duval, R., 1995a, *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Paris.

Duval, R., 1995b, Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?, *Actes de l'École d'été* (*La matematica e la sua didattica* 3, 1996, 250-269).

Eisenberg, T. & Dreyfus, T., 1994, On understanding how students learn to visualize function transformations, *Research on Collegiate Mathematics Education*, 1, 45-68.

Fischbein, E., 1993, The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.

Gagatsis, A. & Christou, C., 2002, The structure of translations among representations in functions. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 39* (1), 39-58.

Gagatsis, A. & Shiakalli, M., 2004, Translation ability from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, An International Journal of Experimental Educational Psychology, 24* (5), 645-657.

Gray, E. & Tall, D., 1994, Duality, ambiguity, and flexibility: A perceptual view of simple arithmetics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (2), 116-140.

Habermas, J., 2001, *Verità e giustificazione*, Laterza, Roma-Bari.

Kaput, J., 1989, Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra, Kieran, C. & Wagner, S. (Eds.), *Research Agenda for Mathematics Education: Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, 167-194.

Kieren, T.E., 1990, Understanding for teaching for understanding, *The Alberta Journal of Educational Research*, 36 (3), 191-201.

Lolli, G., 2002, *Filosofia della matematica*, Il Mulino, Bologna.

Markovitz, Z.; Eylon, B. & Bruckheimer, N., 1986, Functions today and yesterday, *For the learning of mathematics*, 6 (2), 18-24.

Monk, S. & Nemirowsky, R., 1994, The case of Dan: Student construction of a functional sitiation through visual attributes, *Research on Collegiate Mathematics Education*, 1, 139-168.

Mousoulides, N. & Gagatsis, A., 2004, Algebraic and geometric approach in function problem solving. In Johnsen Hoines, M. & Berit Fuglestad, A.

(Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 385-392). Bergen, Norway: Bergen University College.

Nemirowsky, R. & Rubin, A., 1992, Students' tendency to assume rensemblances between a function and its derivative, *TERC Working Paper*, 2-92, Cambridge MA.

Perrin-Glorian, M.-J., 1994, Théorie des situations didactiques: naissance, développment, perspectives, Artigue, M. & Al. (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 97-147.

Perrin-Glorian, M.-J., 1997, Que nous apprennent les èléves en difficulté en mathematiques? *Repères IREM*, 29, 43-66.

Radford, L., 2003, On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought, Anderson, M. et Al. (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis*, 49-79, Legas, Ottawa.

Robert, A. & Robinet, J., 1996, Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 16/2, 145-176.

Ruthven, K., 1990, The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms, *Educational Studies in Mathematics*, 21 (5), 431-450.

Sfard, A. & Linchevsky, L., 1994, The gains and pitfalls of reification – The case of Algebra, *Educational Studies in Mathematics* 26, 191-228.

Sfard, A. & Thompson, P.W., 1994, Problems of reification. Representations and mathematical objects, Kirshner, D. (Ed.), *Proceedings of PME-NA* 16, Baton Rouge, 1-32.

Sfard, A., 1991, On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sfard, A., 1992, Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: the case of function, Harel, G. & Dubinsky, E. (Eds.), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, 59-84.

Slavit, D., 1997, An alternate route to reification of function, *Educational Studies in Mathematics* 33, 259-281.

Stavy, R. & Tirosh, D., 1996, Intuitive rules in science and mathematics: the case of 'More of A More of B', *International Journal for Science Education*. 18.6, 553-667.

Tall, D. & Vinner, S., 1981, Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-69.

Tall, D. (Ed.), 1991, *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dodrecht.

Tall, D., 1986, *Graphic Calculus*, I, II, III (BBC compatible software), Glentop Press, London.

Tall, D., 1988, Concept Image and Concept Definition, de Lange, J. & Doorman, M. (Eds.) *Senior Secondary Mathematics Education*, OW&OC Utrecht, 37-41.

Tall, D., 1990, Inconsistencies in the learning of Calculus and Analysis, *Focus on Learning Problems in Mahematics* 12, 49-64.

Tall, D., 1996, Function and Calculus, Bishop, A.J. & Al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325, Kluwer, Dordrecht.

Thompson. P.W., 1994, Students, functions and the undergraduate curriculum, Dubinsky, E.; Schoenfeld, A.H. & Kaput, J. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, I, Providence, R.I., American Mathematical Society, and Washington, D.C., Mathematical Association of America.

Thurston, W. P., 1994, On Proof and Progress in Mathematics, *Bulletin of American Mathematical Society*, 30, 2, 161-177.

Tirosh, D., 1990, Inconsistencies in students' mathematical constructs, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 111-129.

Vinner, S. & Hershkowitz, R., 1980, Concept Images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts, *Proceedings of the Fourth International Conference of Psychology of Mathematics Education*, Berkeley, 177-184.

Vinner, S., 1983, Concept definition, concept image and the notion of function, *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology* 14, 3, 293-305.

Vinner, S., 1991, The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics, Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht, 95-126.

Vinner, S., 1992, Function concept as prototype for problems in mathematics, Harel, G. & Dubinsky, E. (Eds.), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, 195-213.