Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7, 1 (2004), 5-24

Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria

Giorgio T. Bagni
Departamento de Matemáticas
Universidad de Roma “La Sapienza” (Italia)

Introducción

Un concepto fundamental tomado de la historia para la didáctica de las matemáticas

El concepto de función es un elemento fundamental de los currículos de matemáticas de la escuela secundaria[1]; su importancia es notable también desde el punto de vista histórico. Newton y Leibniz, en sus elaboraciones originales de Cálculo infinitesimal, no hicieron referencia explícita a funciones: consideraron principalmente *curvas y variables*. Observamos un crecimiento progresivo de la importancia del concepto de función en conexión con el análisis de relaciones entre las operaciones sobre la variable x y el comportamiento de una variable y dependiente de x. La expresión “función” aparece en una obra matemática en 1673, en *Methodus tangentium inversa seu de functionibus,* de Leibnitz (Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992; Smith, 1959, también encontramos el término “función” en trabajos impresos de Leibniz de los años 1692 y 1694).

Leonhard Euler en *Introductio in Analysin Infinitorum* de 1748 definió la función como “una expresión analítica en general compuesta por esta cantidad variable y por algunos números o cantidades constantes” (vol. I, p. 18 y p. 74: Euler, 1796; una similar introducción la ofrece Johann Bernoulli en una obra publicada por la Academia de París: Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, p. 315). Subrayemos que en las introducciones originales de la función el problema de la continuidad no se consideraba explícitamente (Dini, 1878, p. 36).

El objetivo de nuestra trabajo no es el examen detallado de las experiencias históricas y de las investigaciones didácticas dedicadas al concepto de función, sobre todo si se considera la enorme cantidad de trabajos que se produjeron en este tema. Muchos Autores han estudiado, también

[1] Nota del traductor: La escuela secundaria en Italia atiende a los estudiantes de 16 a 19 años.

recientemente, aspectos importantes de la introducción de definición y de la representación de las funciones (citemos por ejemplo: Vinner, 1992; Duval, 1993; Fischbein, 1993); citamos una síntesis excelente en: Slavit, 1997) y la bibliografía es vasta. En el articulo presente deseamos subrayar que utilizando la prueba y conversaciones, [2] la verificación en la práctica didáctica de fenómenos importantes como la formación de obstáculos causados por la identificación de una función y de su gráfica cartesiana, así como problemas determinados por la falta de indicaciones del dominio de una función, o bien sobre las concepciones en relación a las operaciones analíticas.
Indicaremos al lector algunas cuestiones importantes, sin la pretensión de proporcionar una justificación experimental a cualquier afirmación. Podemos así presentar el contenido de nuestro trabajo:

1. Concepto de función y registros representativos
2. Funciones y continuidad
3. Funciones y visualización
Una investigación experimental
4. Funciones, curva, dominio
Una investigación experimental
5. Funciones y operaciones analíticas
Una investigación experimental
6. Conclusiones: Concepto de función y registros semióticos

Concepto de función y registros representativos

La introducción didáctica del concepto de función se basa en el uso de representaciones; frecuentemente, por ejemplo, a los alumnos se les ha pedido que consideren el usar gráficos cartesianos de funciones. Frecuentemente se han propuesto otras representaciones (por ejemplo visuales).
Antes de todo subrayemos que algunas costumbres difundidas en la práctica didáctica no podrían considerarse del todo correctas, desde el punto de vista formal. A menudo, en algunos libros de texto para la secundaria, la misma ecuación $y = f(x)$ representa el conjunto de los puntos del plano cartesiano, que tienen coordenadas que pertenecen al conjunto: $\{(x;y)\in D\times\mathbf{R}:\ y=f(x)\}$ (en donde $D\subseteq\mathbf{R}$ es el dominio de f). Alguna vez $y = f(x)$ representa la función f misma (es decir leamos: “dada la

[2] Subrayamos que el autor no había tenido lecciones en las clases consideradas en las investigaciones experimentales expuestas en el presente artículo. En la sección 5 analizaremos los resultados de una investigación experimental inédita.

función *y = f(x)*...", o su gráfico cartesiano (y leamos: "dada la *curva y = f(x)*..."). Naturalmente se trata de *abusos:* una *función f:*D→**R** es una *relación* por tanto es una particular representación de Dx**R** (y no una *ecuación* ni una *curva*); la ecuación *y = f(x)* se usa para representar la función *f.* Y el gráfico cartesiano de *y = f(x)* es una representación *del plano* cuyos puntos pertenecen a {*(x;y)* ϵ*Dx***R***: y = f(x)*} estableciendo una correspondencia unívoca.
Naturalmente subrayamos que la mencionada indicación de una función *f* mediante *y = f(x)* es interesante desde el punto de vista didáctico (consideremos por ejemplo el procedimiento para obtener la inversa de una función dada): por ello nuestro objetivo no es el abolir los citados usos didácticos, sino aclarar los papeles y los términos para evitar consecuencias negativas en la adquisición de conocimientos [3].
Por lo que respecta a las funciones continuas, en un trabajo anterior (Bagni, 1998) notamos que la visualización está muchas veces unida a la continuidad y ésta a características gráficas: una función se dice *continua* en un punto del propio dominio si correspondiendo con tal punto, puede trazarse su gráfico cartesiano *sin levantar el lápiz del papel.* Una función continua en todo el dominio es una función cuyo gráfico puede trazarse sin "interrupciones", "saltos" o "irregularidades gráficas" (Apostol, 1969, I; el libro de T.M. Apostol es un conocido texto universitario: Las introducciones didácticas presentes en los textos para la escuela secundaria en Italia son análogas).

1. Funciones y su representación gráfica (en lugar de continuidad)

Por cuanto se refiere a los registros de representación, señalamos que una consideración suya absoluta debe considerarse una simplificación. En nuestra opinión no se puede hablar de un *solo* registro representativo en términos absolutos: existen diversos registros de representación (por ejemplo verbales, pero también simbólicos) con referencia a diversas instituciones culturales o a diversos usos. Además cualquier registro de representación está implícita o explícitamente conexo a los otros: en el registro verbal las palabras se usan siempre con referencia a su significado y tal significado se une frecuentemente a experiencias (por ejemplo sensoriales) que se reintegran también a otros registros.

[3] Análogas consideraciones didácticas pueden desarrollarse por ejemplo con referencia a la simbología de Leibniz para indicar la derivada (dy/dx); Castelnuovo, 1938, p. 115. Subrayamos que el papel de los elementos históricos en el presente trabajo es sólo de introducción (citamos a propósito: Harel & Dubinsky. 1992) y no pretende fijar objetivos y metodologías en términos absolutos. Además, el saber matemático no puede considerarse históricamente en términos absolutos, sino comprendido con referencia a las instituciones culturales (Grugnetti & Rogers, 2000, Furinghetti & Radford, 2002) La misma corrección debe examinarse en el propio contexto histórico y no comparada con las convenciones modernas (Radford, 1997).

En general hemos podido observar que desde el punto de vista de la práctica didáctica, una función se expresa a menudo en el registro visual mediante su gráfica cartesiana; naturalmente eso no excluye la posibilidad y la oportunidad de un amplio uso de otros registros semióticos (por ejemplo, el uso del registro simbólico es importante en el ámbito topológico). Naturalmente debe considerarse de primerísima importancia la visualización en la Didáctica de la matemática; sin embargo, a veces algunos alumnos parecen distinguir con dificultad del concepto de función de su visualización gráfica: como podremos constatar, algunos obstáculos pueden estar unidos a funciones cuyo gráfico cartesiano no puede diseñarse. Además en problemas y ejercicios, los alumnos tienen que hacer con funciones continuas y eso puede llevarlos erróneamente a considerar la continuidad según el resultado de una característica común en todas las funciones: si los alumnos asocian directa y no críticamente el concepto de función en un gráfico cartesiano, ellos pueden ser inducidos a considerar indispensable la presencia de una curva (la que sea) para la concepción de una función.

2. Funciones y visualización

Retomemos en una síntesis los resultados de una investigación experimental (Bagni 1998) que tiene el objetivo de hacer evidente cómo la visualización de una función mediante su gráfico cartesiano puede llevar en algunos casos, a obstaculizar la plena comprensión del concepto de función (Vinner, 1983 y 1987).

La prueba siguiente se propuso a los alumnos de tres 3as clases de un *Liceo Scientífico* en Italia (Alumnos de 16-17 años; el *Liceo Scientífico* es la escuela superior de Italia con dirección científica), para un total de 75 alumnos) sus currículos matemáticos eran tradicionales: en particular, ellos conocían el concepto de función y el gráfico cartesiano de una función) y a los alumnos de tres 5as clases de un *Liceo Scientífico* (18-19 años), para un total de 66 alumnos (cursos de matemáticas tradicionales: Bagni, 1998).

Nos hemos referido a algunos ejemplos analíticos clásicos (no particularmente conexos con la intuición): *La función de Dirichlet* es la función $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\to\chi_{R\backslash Q}(x)$ tal que $\chi_{R\backslash Q}(x) = 0$ si, y sólo si x es racional; $\chi_{R\backslash Q}(x) = 1$ si y sólo si x es irracional; su gráfica cartesiana puede trazarse sólo para un conjunto finito de puntos (entre las investigaciones didácticas dedicadas a la función de Dirichlet indicamos: Norman 1992; Schwingendorf, Hawks & Beineke, 1992). Existe una situación análoga para la *función de Gelbaum* (Gelbaum 1961, p. 124), considerada en el punto A4 de la ficha siguiente:

Ficha A

Se dan las siguiente relaciones entre números reales; para cada una de ellas trace (si es posible) la gráfica cartesiana y establezca si la relación es una función:

A1) R_1 es la relación tal que (para cualquier $x\epsilon$**R)** $R_1(x)$ =2x

A2) R_2 es la relación tal que (para cualquier $x\epsilon$**R)** $R_2(x)$ =1.

A3) R_3 es la relación tal que:

* si x real es racional, entonces R_3 (x) = 0;

* si x real es irracional, entonces R_3 (x) = 1;

A4) R_4 es la relación tal que:

- si x real *es racional*, x = m/n, con m entero, n entero positivo, m/n irreducible, entonces: $R_4(x)$= $1/n$;
- si x real *es irracional*, entonces $R_4(x)$ = 0 [4].

Resultados – Ficha A – Alumnos de 16 -17 años

	Diseñan el gráfico cartesiano correcto	Respuesta es una función	Respuesta no es una función	Ninguna respuesta
A1	69 (92%)	71 (95%)	1 (1%)	3 (4%)
A2	61 (81%)	54 (72%)	19 (25%)	2 (3%)
A3	--	34 (46%)	31(41%)	10 (13%)
A4	--	21 (28%)	40 (53%)	14 (19%)

Resultados – Ficha A – Alumnos de 18 -19 años

	Diseñan el gráfico cartesiano correcto	Respuesta es una función	Respuesta no es una función	Ninguna respuesta
A1	66 (100%)	65 (98%)	0 (0%)	1 (2%)
A2	65 (98%)	58 (88%)	5 (7%)	3 (5%)
A3	--	39 (46%)	31(41%)	10 (13%)
A4	--	21 (28%)	40 (53%)	14 (19%)

[4] Tal función está bien definida: si x es racional, s = m/n con m enero, n entero positivo, m/n irreducible, entonces m, n son determinados unívocamente (Gelbaum 1962, p,. 53); ésta es continua para toda x real no racional y no continua para toda x real racional

Por lo que se refiere a los alumnos de 16–17 años, observamos que la presencia usual del gráfico de $y = 2x$ (A1, una recta correctamente trazada por el 92%) se une al carácter de función que se atribuye la correspondencia $x \to 2x$ (95%). Algunos alumnos tienen algunas dificultades con la función constante (A2, el gráfico fue trazado correctamente por el 81%, el carácter de función fue atribuido sólo por el 72%). Las dificultades parecen evidentes para la función de Dirichlet (A3) y para la función de Gelbaurn (A4) subrayamos que es imposible trazar sus gráficos cartesianos de manera completa.

Algunos alumnos han dado justificaciones escritas a sus propias respuestas; en particular, se nota que a menudo los errores en las respuestas a las preguntas A3 y A4 se empalman explícitamente a la dificultad (o a la imposibilidad) de diseñar el gráfico cartesiano de las correspondencias consideradas.

Así pues el concepto de función se vincula, a menudo, directamente con el gráfico cartesiano de la relación examinada; para muchos alumnos tal conexión es esencial para decidir si una relación es una función; una relación puede considerarse una función si y sólo si su gráfico cartesiano es una curva con algunas características (por ejemplo, cualquier recta de ecuación $x = a$, con a que pertenece al dominio, encuentre la curva en uno y sólo en un punto). Tal situación, intuitiva y didácticamente importante, debe ser controlada por el profesor, una exagerada importancia que se atribuye a la representación visual podría llevar a los alumnos a malentendidos a propósito del carácter de algunas relaciones (como las funciones de Dirichlet y de Gelbaum) que no se considerarían funciones en cuanto no puedan visualizarse mediante curvas.

Considerando los alumnos de 18 – 19 años, los resultados no muestran una mejora sustancial de la comprensión del concepto de función, por lo que se refiere a las funciones de Dirichlet (A3) y de Gelbaum (A4); sin embargo el error que niega el carácter de función a la correspondencia que en toda $x \in R$ asocia el real 1, antes frecuente entre los alumnos más jóvenes parece ahora más raro). Una notable parte de los alumnos han tratado de estudiar las funciones de Dirichlet (A3) y de Gelbaum (A4) con base en sus gráficos cartesianos. En particular, 15 de los 18 estudiantes que no consideraron la función de Dirichlet como una verdadera y propia función y 16 estudiantes (a menudo los mismos) de los 22 que no consideraron la función de Gelbaum como una función han destacado la imposibilidad de trazar los relativos gráficos cartesianos [5].

---

[5] Por ejemplo, la justificación de Claudio es interesante: «el gráfico de la cuarta relación no existe, por tanto no puedo aplicar la regla según la cual una función debe tener un gráfico que puede ser cruzado sólo una vez por una línea recta. Nuestro profesor nos pide siempre que hagamos este control». Por tanto el Contrato didáctico tiene cláusulas explícitas que se refieren a la visualización (Bagni, 1998)

Podemos concluir que la visualización de una función mediante el gráfico cartesiano es didácticamente importante, *pero no debe ser una práctica exclusiva*. Muchos estudiantes parecen de hecho identificar una correspondencia con su visualización (es decir con su gráfico cartesiano) y eso les es un obstáculo al considerar funciones cuyo gráfico no es completamente trazable como el caso de las funciones de Dirichlet y de Gelbaum.

3. Función, curva, dominio

La conexión, sin embargo, didácticamente importante, entre una función y su gráfica cartesiana, puede causar una subvaloración de la importancia de algunos aspectos del mismo concepto de función, en particular, como veremos, puede causar problemas conexos con el papel fundamental del dominio. De hecho el aspecto para definir una función es la misma presencia de la curva trazada en el plano cartesiano, la indicación explícita del dominio de tal función puede parecer absolutamente superflua: la función f "existiría" si y sólo si el gráfico cartesiano de $y = f(x)$ "puede diseñarse" y eso podría erróneamente sustraer significado a la indicación del dominio [6].
Un ejercicio común en la práctica didáctica es la investigación del dominio de una función dada (citaremos algunos resultados de: Bagni 1997). Con frecuencia, a los alumnos se les pide que consideren una función real f: D $\rightarrow$ **R** (con D $\subseteq$ **R**) asignada sólo mediante una expresión en x, así pues por: $x \rightarrow f(x)$. Por tanto a los alumnos se les pide que encuentren su dominio. Es decir el conjunto D al que pertenecen todos los reales x tales que $f(x)$ sea un "real calculable" Tal ejercicio es importante y debe interpretarse con cuidado: desde el punto de vista didáctico, puede conducir a dificultades en la comprensión del concepto de función
De hecho es bien conocido que la indicación explícita del dominio es una parte esencial de la definición de función, pero por ejemplo en las pruebas propuestas en el examen de secundaria en Ciencias (examen con el que concluye la escuela secundaria el dominio se omite a menudo, Ponemos en lista un ejemplo cualquiera:
«Trace los gráficos cartesianos de las funciones $y = \frac{x(1-2x)}{1+2x}$ e $y = \frac{1}{1+2x}$ escriba las ecuaciones de sus asíntotas » (1973).
«Estudie la función $y = \frac{x^3}{2x^2-1}$ y trace el gráfico cartesiano» (1974)

---

[6] Para el aspecto histórico volvemos a Boubaki, 1966. E. Giusti subraya que si "la noción de función se define sólo con referencia a los conjuntos (...) se mejora el aspecto formal pero se pierde la intuición inmediata". (Giusti 1983, p. 121).

«Trace el gráfico cartesiano de la función $y = xe^{-x}$” » (1990)

Frecuentemente una función se indica sólo con una simple fórmula, sin ninguna indicación explícita que se refiera al dominio [7]. Consideramos otro ejercicio asignado al examen de Maturità Científica de 1989 (Bagni 1997): a los alumnos se les pide que estudien la función $x \to f(x)$ expresada por: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ (sin indicar el dominio). Por lo que se refiere a la determinación del dominio, si buscamos el más amplio conjunto $D \subseteq \mathbf{R}$ tal que el denominador sea diferente de cero y la raíz cuadrada sea real. Debemos imponer la condición $x>1$. Sin embargo existe un problema: si $x = 0$ (considerado como un número complejo, entonces $f(0) = \frac{0}{\sqrt{0-1}} = \frac{0}{i} = 0+0i$ es decir: 0. La cuestión es la siguiente: Hemos afirmado que de $f(0)$ resulta ser 0 (cualquier alumno podría preguntarse: 0 en **R** ó en **C**?) por tanto nos veremos inducidos a considerar 0 como perteneciente al dominio de f; pero para calcular $f(0)$ deberemos considerar 0 como un complejo y calcular la raíz cuadrada de -1; esto nos llevaría a excluir 0 del dominio de f. Claramente la decisión de considerar 0 como perteneciente o no al dominio de f depende de cómo se defina y conciba el dominio mismo, en particular del papel eventual que se haya atribuido a las operaciones a ejecutar para calcular el valor de la función. En general en este caso la indicación explícita del dominio nos parece oportuna para evitar malentendidos.

Usaremos ahora la función recordada; presentaremos de hecho los resultados de una investigación experimental (Bagni 1997); hemos considerado 75 alumnos, 26 de una clase tercera de un Liceo Scientifico (alumnos de 16–17 años), 24 de una 4ª clase de un Liceo Scientifico (17–18 años), 25 de una 5ª clase de un Liceo Scientifico (18–19 años). Sus curricula de matemáticas eran tradicionales [8]; conocían los números complejos y los conceptos de función y de dominio.

---

[7] Observamos que el hábito de omitir el dominio ha causado inconvenientes, como se muestra en el siguiente ejercicio (Maturitá scientifica. Italia. 1995): “En el cubo ABCDEGH, ABCD y EFGH son caras opuestas y AE, BF, CG son ángulos. Los ángulos miden 1. Consideramos un punto P sobre el ángulo BF de modo que $\overline{BP} = x$. a) verificar que la distancia y de P desde la diagonal AG está expresada por la función: $y = \sqrt{\frac{2}{3}\left(x^2 - x + 1\right)}$ .b) trazar el gráfico cartesiano de esta función y determinar sus asíntotas”. Consideremos el problema geométrico si P pertenece al ángulo BF y $\overline{BP} = x$, se debe poner $0 \le x \le 1$.Por consiguiente no tiene significado el hablar de asíntotas de una función continua definida en [0; 1] (Bagni, 1995).

[8] Cuanto se afirma está ligado con las tradiciones curriculares, con referencia a la Escuela Secundaria en Italia; en otros países las elecciones curriculares son diversas y no hay una tradición de enseñanza de los complejos, por lo que se refiere al nivel escolástico en el examen. Análogas consideraciones pueden valer para la enseñanza de la integral a la que se hará referencia en la sección 5 del presente trabajo.

A todos los alumnos se les propuso la ficha siguiente:

> *Ficha B*
> Encuentre el dominio de la función $x \to f(x)$ espresada por: $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

Tiempo: 5 minutos.

Después entrevistamos a los alumnos que dieron respuestas diferentes del conjunto $\{x \in \mathbf{R}: x > 1\}$ para comprender las razones de tales respuestas (tal análisis no ha proporcionado resultados particularmente significativos).

En este punto hemos buscado analizar más en detalle las ideas de los alumnos que respondieron $\{x \in R: x > 1\}$. En particular hemos buscado destacar sus reacciones a una observación que revisa la eventual asignación del valor $x = 0$ en la función en cuestión. Para esto se les propuso la ficha siguiente:

> *Ficha C*
> Considera la afirmación siguiente: $\dfrac{0}{\sqrt{0-1}} = \dfrac{0}{i} = 0$. ¿es verdadera o falsa?

Tiempo 5 minutos.

Finalmente todos los alumnos que habían recibido la *ficha C* sobrepusieron la ficha siguiente, para poner en claro eventuales reflexiones por parte de los estudiantes:

> *Ficha D*
> Considera nuevamente tus respuestas (fichas B y C)
> Ahora, después de dar respuesta a la ficha C, ¿cambiarías la respuesta que diste a la ficha B? ¿por qué?

A cada uno de los alumnos se le devolvieron sus propias fichas B, C.

Tiempo 5 minutos.

Resultados. *Ficha B*

Clase (edad)	3°(16—17)	4°(17-18)	5° (18-19)	Total
$\{x\epsilon\mathbf{R}: x>1\}$	18	20	23	61 (81 %)
$\{x\epsilon\mathbf{R}: x\geq1\}$	4	3	2	9 (12%)
$\{x\epsilon\mathbf{R}: x\neq1\}$	2	1	0	3 (4 %)
$\{x\epsilon\mathbf{R}: x>0\}$	2	0	0	2 (3 %)

61 alumnos recibieron las fichas B y C. Los porcentajes siguientes se referirán a los alumnos que las recibieron.

Resultados – Ficha C

Clase (edad)	3°(16—17)	4°(17-18)	5° (18-19)	Total
Verdadero	11	10	16	37 (61%)
Falso	7	10	7	24 (39 %)

Resultados – Ficha D

Clase (edad)	3°(16—17)	4°(17-18)	5° (18-19)	Total
Confirmación	12	13	16	41 (67%)
No confirmación	4	7	5	16 (26 %)
Sin respuesta	2	0	2	4 (7%)

Así pues la habilidad de los estudiantes para resolver los ejercicios del tipo “encuentra el dominio de la función” parece muy buena. El porcentaje de las respuestas $\{x\epsilon\mathbf{R}: x>1\}$ (81%) es elevado

Por lo que se refiere a $\frac{0}{\sqrt{0-1}} = \frac{0}{i} = 0$ los alumnos se dividieron en dos grupos y según el 39% esta afirmación es falsa.

También las respuestas a la pregunta de la ficha D presentaron algunas dudas; algunos alumnos (26%) cambiaron su respuesta anterior

Entre las motivaciones de los estudiantes algunas afirmaciones son interesantes como se ilustra a continuación:

Los alumnos que aceptaron que $\frac{0}{\sqrt{0-1}} = \frac{0}{i} = 0$ y que 0 pertenece al dominio (por tanto han cambiado la respuesta en la ficha B) consideran:

"Si pienso en lo que debo hacer para calcular $f(0)$ paso a paso, debo calcular la raíz cuadrada de -1 y luego debo dividir 0 entre el resultado. Naturalmente si considero todo eso deberé usar los imaginarios. pero a mí no me interesa este modo de calcular $f(0)$: una función es una correspondencia que une directamente 0 con 0, sin pasos intermedios" (Andrea, 5ª clase). La opinión de Andrea es muy interesante: el valor $f(0)$ se distingue debido al procedimiento que se usa para calcular tal valor.

"El número 0 debería aceptarse: La imagen es real. Pienso que no sería aceptable en algunas aplicaciones, cuando la función se usa para representar cualquiera cosa porque en este caso tendría que actuar con números no reales. Por ejemplo, una función representa una curva" (Giampaolo, 5ª clase).

También esta afirmación es interesante, Giampaolo hace referencia a algunas "aplicaciones " por ejemplo al gráfico cartesiano de la función. Algunos otros alumnos han hablado de "gráficos" o de "curvas".

De entre los alumnos que no aceptaron que $\frac{0}{\sqrt{0-1}} = \frac{0}{i} = 0$ y que no han considerado que 0 pertenece al dominio, citamos:

"La raíz de un número negativo no existe en **R**. Por tanto la expresión no puede calcularse (Carlo, 4ª. clase).

Mientras que los alumnos que aceptaron la afirmación $\frac{0}{\sqrt{0-1}} = \frac{0}{i} = 0$ pero que no han considerado que 0 pertenece al dominio, citamos:

"$f(0)$ sería 0 en **C**, por tanto la igualdad es verdadera pero es falsa en **R** y 0 no pertenece al dominio" (Alessandro 3ª clase).

Como se indicó antes, las fichas utilizadas tenían por objeto poner a la luz las reacciones de parte de los estudiantes en una situación en que se encuentran implicadas las nociones de función (como relación, como expresión analítica, etc.) y de dominio, y en particular las concepciones de los estudiantes mismos a propósito de ellas. Entonces el ejercicio considerado puede poner en claro algunas dudas en la mente de los alumnos: qué significa "encuentra el dominio" de una función asignada f? Tal vez signifique "encuentra la más amplia representación de **R** cuyos elementos son tales que $f(x)$ sea "real" ¿ y por qué el más amplio? Además, que significa "tales que $f(x)$ sea real"? $f(x)$ podría ser un número complejo con la parte imaginaria nula, o debería ser calculado sin utilizar complejos con las partes imaginarias no nulas. Y finalmente, ¿cuál es la unión entre el dominio y el gráfico cartesiano en tales problemas? [9]. Cabe señalar que las prueba presentadas no demuestran nada a propósito de las funciones y de los dominios: de hecho se hace referencia a ellos principalmente en términos de cómo alumnos (y profesores) interpretan la palabra "calcular". Naturalmente no sería equivocado insertar el cero en el dominio, ni sería errado el excluirlo; sería a la vez posible y oportuno dar respuestas claras a las preguntas que anteceden, pero estas respuestas deberían ser explícitamente comunicadas a los alumnos para evitar malentendidos y formar peligrosas incoherencias (Tall, 1990).

4. Funciones y operaciones analíticas

Es interesante considerar las relaciones entre el concepto de función (y sus representaciones) y las operaciones analíticas, en particular la integración.

En la escuela secundaria, el símbolo $\int f(x)\mathrm{d}x$ se introduce en general para indicar las soluciones de la ecuación diferencial $y'(s) = f(x)$. Su uso didáctico es tal vez ambiguo[10], en particular, esto lo consideran los alumnos a veces como un verdadero y propio conjunto de funciones, a veces como una función "singular" cuya dependencia de un parámetro puede constituir un obstáculo.

Esta cuestión tiene importantes raíces históricas por ejemplo, Isaac Newton (1642-1727) opinaba que la derivación era la principal operación analítica y consideraba la integración a la medida de un problema particular. En efecto Newton no adoptó una denominación ni un símbolo específico para la integral (solo tal vez usó la escritura: ☐ para indicar tal operación: Bourbaki, 1963, p. 201).

---

[9] Consideraciones análogas pueden desarrollarse con referencia a otros casos como la función que se expresa por: $y = \dfrac{\sqrt{-x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$. Su dominio (real) parece ser ø (las condiciones $x \leq 0$ y $x > 1$) son de hecho incompatibles; pero, ¿qué sucede para x que pertenece al intervalo [0, 1)? por ejemplo si $x = \dfrac{1}{3}$ cualquier alumno podría detenerse a reflexionar sobre si $y = \sqrt{\dfrac{1}{2}}+1$, que parece ser un numero real (o un complejo con la parte imaginaria nula: Bagni, 1997). Nota: al sustituir 1/3 en la expresión, obtenemos $y = \dfrac{\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\,i + \sqrt{\frac{2}{3}}\,i\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,i\right)}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,i\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,i\right)} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}} = \dfrac{-\sqrt{2}-2}{-2}$ y de ahí el valor de $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}+1 = \sqrt{\dfrac{1}{2}}+1$

[10] Subrayamos que no existe propiamente "la" operación de integración: en efecto deberemos considerar las operaciones de antiderivación y de integración para las teorías de derivación y para las teorías de la medida. Pero las consideraciones de este género no pueden proponerse a nivel de secundaria.

Subrayamos, que la presentación tradicional del cálculo infinitesimal a nuestros alumnos no sigue un trayecto histórico (aunque algunos libros de texto propongan diversos planteamientos: Apostol, 1977). E. Hairer y G. Wanner, en su "Analysis by its History" (Hairer & Wanner, 1996) escriben: "Tradicionalmente, un riguroso primer curso de Análisis se basa (más o menos) en el orden siguiente:

conjuntos y funciones	→	Limites, funciones continuas	→	derivadas	→	integrales

por otra parte, el desarrollo histórico tuvo lugar en orden inverso:

Cantor 1875, Dedekind	←	Cauchy 1821, Weierstrass	←	Newton 1665, Leibniz	←	Arquímedes Kepler 1615, Fermat 1638

(Hairer & Wanner, 1996, p. V).

Como veremos, examinando los resultados de un cuestionario sobre el concepto de integral (y el uso de la llamada "integral indefinida" $\int f(x)\mathrm{d}x$ que representa las soluciones de $y'(x) = f(x)$ puede ser causa de dificultades para cualquier alumno. Y naturalmente estas dificultades aumentan si tomamos en consideración la ecuación diferencial $y''(x) = v(x)$. Hemos considerado 49 alumnos de 5ª clase del Liceo Scientifico Italiano (18-19 años) con un curriculum tradicional. Hemos dividido para el caso a los alumnos en dos grupos, E y F. A cada alumno del grupo E le hemos presentado la siguiente tarjeta E.

Ficha E $f''(x) = x \qquad f(x) = ...$

y a cada alumno del grupo F le hemos presentado la siguiente tarjeta F.

Ficha F
$g'(x) = ax+b$ $\qquad g(x) = ...$

Tiempo 5 minutos. No se permitió el uso de libros o calculadoras de bolsillo.

Resultados . Tarjeta E (25 alumnos)

	alumnos	porcentaje
$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + c_1x + c_2$	5	20%
$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + c$	11	44%
$f(x) = \frac{1}{6}x^3$	4	16%
Otras respuestas o ninguna respuesta	5	20%

Resultados - ficha F (24 alumnos)

	alumnos	porcentaje
$g(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$	15	63%
$g(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx$	8	33%
Otras respuestas o ninguna respuesta	1	4%

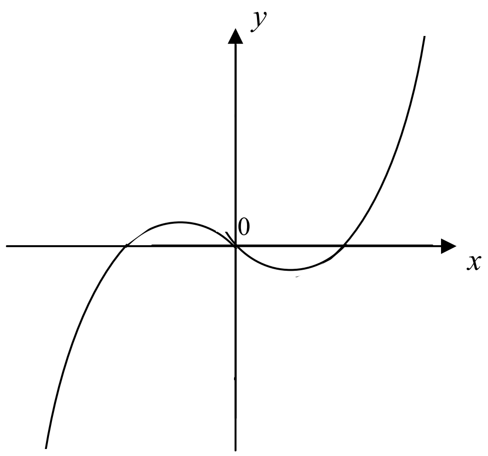
La modesta dificultad del ejercicio no influenció los resultados: muchas veces las respuestas son correctas (también si la constante aditiva se olvida casualmente). Después de la prueba, los estudiantes proporcionaron algunas justificaciones. La mayor parte de los alumnos que en la tarjeta A, respondieron $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + c$ afirmaron que la constante "+c" se puso sólo al final de la resolución "como de costumbre": esto muestra que la actitud de los alumnos refleja tal vez la aplicación mecánica de una regla, sin una reflexión adecuada sobre su significado (falta la interiorización, en la terminología de Dubinsky, quien considera la derivación y la integración como un ejemplo fundamental: Dubinsky, 1991; además: Sfard 1991).

La siguiente justificación es particularmente interesante. :

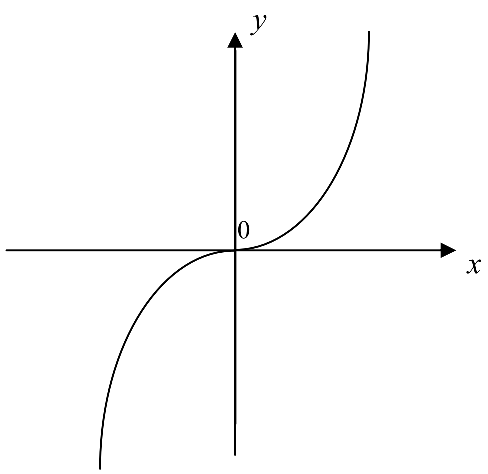
"Cuál es pues la solución? ¿Qué curva debo dibujar? Si hay una sola constante la curva tiene su forma también si se puede mover. Pero qué sucede con dos constantes? (Marco)

La importancia de la solicitud es clara: en $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$ se puede poner c_1, c_2 de modo tal que las "formas" de las curvas obtenidas sean inversas.

- por ejemplo, los valores $c_1 = -1$, $c_2=0$ llevan a: $y = \frac{1}{6}x^3 - x$



- los valores $c_1=0$, $c_2=0$ llevan a $y = \frac{1}{6}x^3$



Aun sin pretender forzar la interpretación de cuanto afirmó Marco, observamos que una tal consideración de más curvas podría parecer problemática, en la mente de los alumnos: no se haría referencia a una (sola) "curva" con "su forma", que "se puede mover" como sucede en las bien conocidas integrales (en presencia de una sola integración). en esta nueva situación, "¿"cuál es la solución?" ¿cuál curva se debe considerar? [11].

5. Conclusiones

Concepto de función y registros semióticos

Por lo que se refiere a las investigaciones presentadas, subrayamos que para proporcionar resultados generales el método de los cuestionarios debería estar integrado con entrevistas y observaciones sistemáticas; además las muestras consideradas son más bien exiguas: seria necesario identificar los criterios de muestreo y, por ejemplo, las características de la formación de cada uno de los alumnos. Por tanto nuestro trabajo no intenta proponer resultados definitivos sino indicar una problemática a través del examen de las situaciones aisladas (si con eso, naturalmente, no intentamos denigrar la investigación cualitativa a favor de la cuantitativa): posteriores investigaciones podrán profundizar cuanto se han proyectado y evidenciado otros elementos significativos, como la influencia de los contratos didáctico y experimental.

Hemos evidenciado experimentalmente algunos obstáculos que se manifiestan en el aprendizaje del concepto de función en particular, una identificación total de una función con su gráfico cartesiano puede ser causa de problemas y de un falso concepto, sobre todo con referencia a las funciones cuyos gráficos cartesianos no pueden trazarse sin dificultad [12]; hemos subrayado la presencia de algunos problemas conexos con la indicación deficiente del dominio de una función y finalmente con la integración.

---

[11] Una primera sugerencia podría referirse por ejemplo a una valoración crítica del uso del símbolo tradicional de "integral indefinida" y por ello la eventual reevaluación de la referencia explícita a las ecuaciones diferenciales. Sería interesante además la consideración de la "integral indefinida" como procept (donde el término se emplea según lo que se ha introducido en el ejemplo en: Gray &Tall, 1994). Subrayamos que algunos comportamientos que se refieren a la constante de integración (que concuerdan con la teoría de las *reglas intuitivas* de Dina Tirosh) parecen confirmar el carácter simbólico de la enseñanza y del aprendizaje del cálculo infinitesimal en: (Stavy & Tirosh, 1996), se examina a los estudiantes, profesores en servicio y en formación; véase además: Tirosh, 1994).

[12] Con nuestra investigación no intentamos afirmar la oportunidad de introducir funciones cuyo gráfico cartesiano no pueda dibujarse para los alumnos de 16-19 años, en nuestra opinión es importante controlar que una consideración eventual de estas funciones no cause obstáculos al aprendizaje del concepto de función.

No son pocos los obstáculos que se pueden encontrar en relación con la expresión de una función en los diversos registros semióticos.

Por lo demás, el concepto de función (como la mayor parte de los conceptos matemáticos) es abstracto: por ende es conveniente expresarlo mediante representaciones (Duval, 1993, p. 37; la oportunidad de hacer referencia a diversas representaciones en el estudio de las funciones se encuentra en la literatura a partir de los trabajos de J. Kaput que se remontan a los años ochenta: Kaput 1989 a, 1989b; Harel & Kaput, 1991). En general, "es el objeto matemático que debe ser importante, no sus diversas representaciones semióticas" y la distinción entre un objeto y sus representaciones es un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas" (Duval, 993, pp. 37-38); la presencia de los diversos registros representativos es fundamental. "El funcionamiento cognitivo de la mente humana es inseparable de la existencia de una variedad de registros semióticos de representación" (Duval 1993, p. 39; Duval 1995 a) [13].

Podemos representar una función utilizando muchos registros por lo que se refiere al registro verbal por ejemplo, podemos considerar una descripción del algoritmo que calcula $f(x)$ para una cierta x que pertenezca al dominio; podemos operar en el registro simbólico, visual etc. Naturalmente es imposible aprender las nociones matemáticas sin recurrir a las representaciones. Todas las representaciones son importantes y didácticamente necesarias [14] sin embargo ellas pueden causar el que se presenten obstáculos: el concepto (general abstracto) de función no puede y no debe de hecho identificarse ni con un algoritmo, ni con una formula, ni con una curva. Es pues una tarea muy importante para el docente el control de la exactitud de los papeles de los conceptos abstractos y de las representaciones semióticas.

---

[13] Entre las diversas presentaciones semióticas, es claro que las gráficas son didácticamente fundamentales. E. Fischbein, al presentar su "teoría de los conceptos figurales"! afirma que "la integración de la propiedad conceptual y figural en estructuras mentales unitarias, con el predominio de los contenidos conceptuales respecto a los figurales, no es un proceso natural. Debería constituir una continua sistemática y principal preocupación del profesor." (Fischbein, 1993. p. 156). Una posición objetivista no es auto evidente y además no es universalmente condivisa. Por otra parte, Vinner subraya que le gente recuerda los aspectos visuales de un concepto mejor que los analíticos." Vinner, 1992 p. 197 y p. 212).

[14] La dificultad de coordinar los diversos registros representativos puede ser causa de dificultades para los alumnos s y el desarrollo de los registros solos no basta para obtener el aprendizaje pleno (Duval, 1995b, p.259; D'Amore, 1999, p. 261). Es claro que los obstáculos examinados en este trabajo, con referencia a los registros representativos, no agotan los problemas didácticos y no consideran los falsos conceptos unidos al concepto de función (Bergeron & Herscovics, 1982; Davis, 1982; Arcavi, Tirosh, & Nachmias, 1989); por ejemplo la linealidad parece ser considerada una característica común a todas las funciones por no pocos alumnos (Markovitz; Nylon & Bruckheimer, 1985; Bagni, 2000). Además podrían considerarse otros encuadramientos teóricos, por ejemplo, Lakoff y Núñez sugirieron que las metáforas conceptuales revisten un papel central en la formación de las ideas matemáticas y afirman que la comprensión de estas metáforas volverá más significativa a la misma matemática (Lakoff & Núñez, 2000).

Referencias bibliográficas

Apostol, T.M.: 1977, *Calcolo*: I, Boringhieri, Torino (*Calculus*, 2nd edition, John Wiley & Sons, New York 1969).

Arcavi, A.; Tirosh, D. & Nachmias, R.: 1989, The effects of exploring a new representation on prospective teachers' conception of functions: Vinner, S. (Ed.) *Science and mathematics teaching: Interaction between research and practice*, Hebrew University, Jerusalem.

Bagni, G.T.: 1995, Sul compito di matematica dell'esame di maturità scientifica 1995: *La matematica e la sua didattica* 4, 520-521.

Bagni, G.T.: 1997, Dominio di una funzione, numeri reali e numeri complessi. Esercizi standard and contratto didattico nella scuola secondaria superiore: *La matematica e la sua didattica* 3, 306-319.

Bagni, G.T.: 1998, Visualization and didactics of mathematics in High School: an experimental research: *Scientia Paedagogica Experimentalis* 35, 1, 161-180.

Bagni, G.T.: 2000, «Simple» rules and general rules in some High School students' mistakes: *Journal fur Mathematik Didaktik* 21, 2, 124-138.

Bergeron, J.C. & Herscovics, N.: 1982, Levels in the understanding of the function concept: *Workshop on functions by the Foundation for curriculum development*, Enschede.

Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L.: 1992, *Fonti per la storia della matematica*: Sansoni, Firenze.

Bourbaki, N.: 1963, *Elementi di storia della matematica*: Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris 1960).

Bourbaki, N.: 1966, *Eléments de mathématiques*, *Théorie des Ensembles*, II, Hermann, Paris.

Castelnuovo, G.: 1938, *Le origini del calcolo infinitesimale*: Zanichelli, Bologna (reprint: Feltrinelli, Milano 1962).

D'Amore, B.: 1999, *Elementi di didattica della matematica*: Pitagora, Bologna.

Davis, R.B.: 1982, Teaching the concept of function: method and reasons: *Workshop on functions by the Foundation for curriculum development*, Enschede.

Dini, U.: 1878, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabile reale*: Nistri, Pisa (reprint: UMI, Firenze 1990).

Dubinsky, E.: 1991, Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, 95-126.

Duval, R.: 1993, Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, IREM, Strasbourg.

Duval, R.: 1995a, *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Paris.

Duval, R.: 1995b, Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?: *Actes de l'École d'ètè* (*La matematica e la sua didattica* 3, 1996, 250-269).

Euler, L.: 1796, *Introduction a l'Analyse infinitésimale*: Barrois, Paris (1st French edition).

Fischbein, E.: 1993, The theory of figural concepts: *Educational Studies in Mathematics* 24, 139-162.

Frege, G.: 1973, Senso e denotazione: Bonomi, A. (Ed.), *La struttura logica del linguaggio*, Bompiani, Milano 9-32.

Furinghetti, F. & Radford, L.: 2002, Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. English, L. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 631-654, Lawrence Erlbaum, New Jersey.

Gelbaum, B.R.: 1961, *Advanced calculus*: Appleton-Century-Crofts, New York.

Gelbaum, B.R.: 1962, *The real number system*: Appleton-Century Crofts, New York.

Giusti, E.: 1983, *Analisi Matematica 1*: Boringhieri, Torino.

Gray, E. & Tall, D.: 1994, Duality, ambiguity, and flexibility: A perceptual view of simple arithmetics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (2), 116-140.

Grugnetti, L. & Rogers, L.: 2000, Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, 39-62, Dodrecht, Kluver.

Hairer, E. & Wanner, G.: 1996, *Analysis by its History*: Springer-Verlag, New York.

Harel, G. & Dubinsky, E. (Eds.): 1992, *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*: MAA Notes 25.

Harel, G. & Kaput, J.: 1991, The Role of Conceptual Entities and Their Symbols in Building Advanced Mathematical Concepts: Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, 82-94.

Kaput, J.: 1989a, Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra: Kieran, C. & Wagner, S. (Eds.), *Research Agenda for Mathematics Education: Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Lawrence Erlbaum Publishers, Hillsdale, 167-194.

Kaput, J.: 1989b, Linking representations in the symbol systems of algebra: Wagner, S. & Kieran, C. (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, 167-181.

Kline, M.: 1972, *Mathematical thought from ancient to modern times*: Oxford University Press, New York.

Lakoff, G. & Nuñez, R.: 2000, *Where Mathematics come from? How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.

Malara, N.A.: 1997, Problemi di insegnamento-apprendimento nel passaggio dall'aritmetica all'algebra: *La matematica e la sua didattica*, 2, 176-186.

Markovitz, Z.; Eylon, B. & Bruckheimer, N.: 1986, Functions today and yesterday: *For the learning of mathematics* 6 (2), 18-24.

Norman, A.: 1992, Teachers' Mathematical Knowledge of the Concept of Function: Dubinsky, E. & Harel, G. (Eds.), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, 215-232.

Radford, L.: 1997, On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.

Schwingendorf, K.; Hawks, J. & Beineke, J.: 1992, Horizontal and Vertical Growth of the Student's Conception of Function: Dubinsky, E. & Harel, G. (Eds.), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, 133-149.

Sfard, A.: 1991, On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins: *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.

Slavit, D.: 1997, An alternate route to reification of function, *Educational Studies in Mathematics* 33, 259-281.

Smith, D.E.: 1959, *A source book in Mathematics*: Dover, New York (McGraw-Hill, 1929).

Stavy, R. & Tirosh, D.: 1996, Intuitive rules in science and mathematics: the case of 'More of A More of B': *International Journal for Science Education*. 18.6, 553-667.

Tall, D.: 1990, Inconsistencies in the learning of Calculus and Analysis: *Focus on Learning Problems in Mathematics* 12, 49-64.

Tirosh, D.: 1990, Inconsistencies in students' mathematical constructs: *Focus on Learning Problems in Mathematics* 12, 111-129.

Tirosh, D. (Ed.): 1994, *Implicit and explicit knowledge: an educational approach*: Ablex Publishing Corp., Norwood.

Vinner, S.: 1983, Concept definition, concept image and the notion of function: *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology* 14, 3, 293-305.

Vinner, S.: 1987, Continuous functions-images and reasoning in College students: *Proceedings PME 11*, II, Montreal, 177-183.

Vinner, S.: 1992, Function concept as prototype for problems in mathematics: Dubinsky, E. & Harel, G. (Eds.), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, 195-213.