La matematica e la sua didattica • Anno 20 (2006), n. 3, 2006, 3-35

Quali saperi sono acquisiti da chi fa matematica?

una conversazione con

Jean-Philippe Drouhard

IREM de Nice (France)
IUFM de Nice (France)

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine (Italia)

Summary. *In this paper we shall present the Orders of Knowledge model by J.-Ph. Drouhard and M. Panizza (2003a, b); we shall propose some questions to Jean-Philippe Drouhard and report his answers. The Paradigmatic Perspective will allow us to point out some interesting elements related to the debate about the knowledge needed in order to perform a correct mathematical activity.*

Resumen. *En este articulo voy a presentar el modelo de los Ordines del Saber, concebido por J.-Ph. Drouhard y M. Panizza (2003a, b); vamos a plantear unas preguntas a Jean-Philippe Drouhard y vamos a referir sus respuestas. La Perspectiva Paradigmática nos hará posible de poner en evidencia unos interesantes elementos relacionados al debate sobre el saber necesario para una actividad matemática correcta.*

Sunto. *In questo articolo presenteremo il modello degli Ordini del Sapere proposto da J.-Ph. Drouhard e M. Panizza (2003a, b); porremo alcune domande a Jean-Philippe Drouhard e riporteremo le sue risposte. La Prospettiva Paradigmatica ci permetterà di evidenziare alcuni interessanti elementi collegati al dibattito sul sapere richiesto per una corretta attività matematica.*

Resumo. *Neste artigo vamos apresentar o modelo das Ordens do Saber proposto por J.-Ph. Drouhard e M. Panizza (2003a, b); vamos pôr algumas perguntas a Jean-Philippe Drouhard e vamos relatar as suas respostas. A Perspectiva Paradigmática nos permiterá de salientar alguns elementos interessantes relacionado com o debate sobre o saber requerido por uma actividade matemática adequada.*

Résumé. *Dans cet article on va présenter le modèle des Ordres du Savoir proposé par J.-Ph. Drouhard et M. Panizza (2003a, b); on pose quelques ques-*

tions à Jean-Philippe Drouhard et on expose ses réponses. La Perspective Paradigmatique permet aux auteurs de mettre en évidence quelques éléments intéressants liés au dédat sur le savoir requie par une correcte activité mathématique.

Zusammenfassung. *In diesem Artikel werden wir das von J.-Ph. Drouhard und M. Panizza (2003a, b) vorgeschlagte Modell der Ordnung des Wissens vorstellen; wir werden einige Fragen an Jean-Philippe Drouhard stellen und die relativen Antworten wiedergeben. Die Paradigmatische Perspektive erlaubt uns einige interessanten Elementen hervorzuheben, die mit der Debatte über dem von einer korrekten mathematischen Aktitvität verlangten Wissen verbunden sind.*

«C'è probabilmente molto di più, nella matematica, di quanto previsto dalle sole regole della logica»

A. Sfard (1991, p. 2)

1. Gli *ordini del sapere* secondo J.-Ph. Drouhard e M. Panizza

Jean-Philippe Drouhard e Mabel Panizza, nel proprio contributo intitolato *What do the Students Need to Know, in Order to be Able to Actually do Algebra? The Three Orders of Knowledge* accettato al CERME-3 (Group 6, *Algebraic thinking*: Bellaria, 2003), hanno proposto un'importante classificazione dei saperi coinvolti nel fare matematica. Lo scopo generale di tale ricerca è la costruzione di un modello della conoscenza in grado di rispondere alla domanda: "Che cosa uno studente deve imparare, al di là del semplice testo, per fare matematica?" (Drouhard, Panizza, 2003b). A tale ricerca, come vedremo, si collega l'estensione denominata Prospettiva Paradigmatica.
La domanda precedente può essere specificata, nella forma: "Che cosa si deve sapere per fare matematica in modo che essa sia matematica?" A tale riguardo, nel lavoro citato viene suggerita la distinzione di tre ordini del sapere (citiamo liberamente da: Drouhard, Panizza, 2003a, b):

- *Saperi del I ordine.* Consideriamo saperi del I ordine i "contenuti" di ogni affermazione matematica vera (assiomi, definizioni, proprietà, teoremi). In particolare, distinguiamo i saperi del I ordine in:

  – *saperi oggetto* (direttamente riferiti a oggetti e relazioni),
  – *saperi semiolinguistici* (riferiti ai sistemi semiotici della rappresentazione),
  – *saperi strumentali* (riferite agli strumenti di lavoro mediante i quali operare in matematica).
- *Saperi del II ordine.* In termini generali, è ciò che permette al discorso matematico di funzionare come si suppone che esso debba funzionare. Per fare matematica bisogna sapere come esprimersi correttamente nei vari registri semiotici e sapere che ci sono regole per argomentare, dimostrare, dedurre etc. È inoltre indispensabile operare una scelta delle regole di denotazione: scegliere, dunque, quale sistema adottare, con riferimento ai saperi del I ordine.
- *Saperi del III ordine.* Il sapere del III ordine riguarda le concezioni della natura del sapere del I e del II ordine. Un'interpretazione stretta di tale idea porterebbe a dire che c'è forse un solo sapere del III ordine, cioè quello secondo la quale l'attività matematica consiste nell'operare con il sapere del I ordine secondo le regole del gioco date dal sapere del II ordine. Dal punto di vista squisitamente didattico, osserviamo che in situazioni di insegnamento si può avere a che fare con affermazioni che non sono riconducibili a sapere del I o del II ordine (ad esempio le affermazioni di insegnanti e di allievi riguardanti la natura stessa della matematica; si vedano alcune riflessioni in: Bagni, 2003a, b). Possiamo dunque affermare che il sapere del III ordine permette l'identificazione della matematica in quanto tale.

L'approccio teorico che viene ora indicato può essere individuato mediante il termine *epistemografia*, tale da indicare una descrizione dell'organizzazione dei saperi per tipologia, idealmente contrapposta ad *epistemologia*, che si riferisce invece alla natura dei saperi.
Iniziamo con il notare che l'individuazione del sapere del I ordine non appare problematica. Il sapere del III ordine, invece, è difficile da identificare in quanto da un lato è stato rilevata chiaramente solo in pochi casi e dall'altro l'accordo a proposito di esso è tutt'altro che universale (anche all'interno della comunità matematica: si pensi ad esempio ai noti dibattiti sull'intuizionismo o sulle dimostrazioni basate sull'uso delle tecnologie informatiche). Significativo è notare che più si considerano ordini di sapere elevati meno accordo si trovi su di essi: mentre il sapere del I ordine è presente chiaramente nei manuali, il sapere degli ordini

superiori viene difficilmente ad ottenere lo statuto di sapere ‘ufficiale’ ed è considerato piuttosto alla stregua di commento o di interpretazione. Il sapere matematico del III ordine sarebbe infine collegato ad una definizione della matematica e, come rilevato, non c’è un completo accordo su di esso (Drouhard, Panizza, 2003 a).

2. Il sapere del II ordine e le “regole del gioco matematico”

Per quanto riguarda il sapere del II ordine, alcuni riferimenti teorici potranno risultare interessanti. L’identificazione del sapere del II ordine come le “regole del gioco” che permettono al discorso matematico di funzionare come si suppone che esso debba funzionare richiama le celebri considerazioni avanzate, a questo proposito, da Ludwig Wittgenstein (1953, n. 202). Esse ci consentiranno di avvicinare il focus del presente lavoro.

Con riferimento ai saperi del II ordine collegati alla validità o verità, è interessante la riflessione wittgensteiniana sull’essenza e sul ruolo della dimostrazione: essa non costituisce una sorta di garanzia della verità del teorema, l’elemento che forza il singolo o la comunità a riconoscere la verità di quanto espresso nell’enunciato a cui si riferisce (Gargani, 1993, p. 99; spunti stimolanti possono trovarsi in: Habermas, 1999). Possiamo piuttosto dire che “La proposizione grammaticale «la corretta applicazione delle tali e tali regole di trasformazione segnica *deve* condurre al tale risultato» acquista un contenuto definito solo in riferimento a una dimostrazione” (Frascolla, 2000, pp. 122 e 132; si veda inoltre: Wright, 1980). La dimostrazione (ciò che *deve accadere*) si differenzia dall’esperimento (ciò che *accade*) mediante l’attribuzione di una funzione normativa, e ciò fa riferimento ad una decisione necessariamente comunitaria di considerare corretti i passi della trasformazione segnica che “prova” il risultato considerato (Frascolla, 2000, pp. 137 e 140; Wittgenstein, 1956, II, n. 39).

Nell’impostazione wittgensteiniana dunque la matematica viene ad essere un’attività consistente nella produzione (segnatamente nell’invenzione) del significato delle espressioni, dei segni, mediante la costruzione di figure. La connessione dei diversi saperi del II ordine appare dunque evidente (Drouhard, Panizza, 2003b).

Citando Wittgenstein, G.G. Granger rileva la presenza di un significativo “spazio di libertà” aperto a proposito delle convenzioni sulle possibili forme di rappresentazione (Granger, 2003, p. 240) e proprio in ciò si evidenzia un'essenziale connessione tra i saperi del I ordine e quelle del II ordine nella classificazione di Drouhard e Panizza: si deve cioè scegliere come designare un oggetto o una relazione; inoltre, è necessario fissare consapevolmente le regole di manipolazione nel sistema di rappresentazione scelto. Queste scelte influenzano in termini decisivi, ad esempio, le possibilità di dimostrazione.

3. Una conversazione con Jean-Philippe Drouhard

Nel presente lavoro proporremo a Jean-Philippe Drouhard alcune domande per mettere a fuoco alcuni punti di una classificazione che può risultare molto interessante per la didattica della matematica.

> *Puoi richiamare brevemente il quadro teorico al quale la vostra classificazione fa riferimento?*

J.-Ph. Drouhard: Il nostro approccio è stato ampiamente presentato in alcuni articoli già pubblicati (Panizza, Drouhard, 2003; Drouhard, Panizza, 2003b; Sackur, Assude, Maurel, Drouhard, Paquelier, 2005; Drouhard, Panizza, 2005) ovvero in via di pubblicazione (Drouhard, Panizza, 2003a): in questi lavori il lettore potrà dunque trovare un inquadramento teorico dettagliato. Possiamo tuttavia notare che la nostra classificazione degli Ordini del Sapere, la sua estensione, la Prospettiva Paradigmatica, e l'epistemografia, si collegano, direttamente o meno, ad altri approcci didattici come la Sémiosis, l'Approccio Antropologico e la Teoria delle Situazioni. Quest'ultima ad esempio, è tutt'altro che incompatibile con il nostro modello di ordini del sapere, sebbene non abbiamo trovato alcun esplicito riferimento in essa che possa corrispondere ad una distinzione dei saperi in ordini.

> *Nel tuo lavoro scritto con Mabel Panizza leggiamo: «Le regole del gioco (matematico) non sono per niente 'naturali'. L'aritmetica e la geometria sono un qualche modo 'modelli' del mondo naturale; ma il loro apprendimento lo è ben poco» (Drouhard, Panizza, 2003b). Puoi illustrare ulteriormente questo importante punto?*

J.-Ph. Drouhard: Una citazione di A. Robert e J. Robinet sarà molto utile per inquadrare la nostra ricerca: «Utilizzeremo il prefisso 'méta' davanti alla parola 'conoscenze' (…) per indicare gli elementi di informazione o di conoscenza SULLA matematica, sul suo funzionamento, sulla sua utilizzazione, sul suo apprendimento» (Robert, Robinet, 1996, p.

156, la traduzione è nostra). Il quadro teorico al quale si fa qui riferimento non è esattamente il nostro: viene a collegarsi a dei saperi di ordine I strumentali, a saperi del II ordine e al sapere del III ordine. Ma un punto in comune c'è, e ci porta a ribadire che non possiamo limitarci a guardare alla matematica come ad una semplice e indolore traduzione di modelli naturali.

Un'altra frase del vostro lavoro merita un approfondimento: «Non si cercherà di rispondere alla domanda: che cosa è la matematica?» (Drouhard, Panizza, 2003b). In che modo questa domanda può essere collegata ai saperi del III ordine (e distinta da essi)?

J.-Ph. Drouhard: Nelle varie situazioni d'insegnamento, insegnanti e allievi possono essere talvolta portati a pronunciare affermazioni sulla matematica che non possono essere ricondotti soltanto a saperi del I o del II ordine. Ad esempio, un allievo può dire ad un altro che: «In algebra non c'è nulla da capire»; un insegnante, nel restituire un elaborato al proprio allievo, può dirgli «Ma no, questa non è matematica!» Sono frasi generali, non riferiti a contenuti matematici particolari (vale a dire non a saperi del I ordine) né ad un particolare sapere del II ordine, ad esempio alla scelta di un sistema di denotazione. Tuttavia si tratta pur sempre di affermazioni importanti, che si collegano ad un'attività (o ad una produzione) rilevante per la nostra disciplina. Non vogliamo qui definire la matematica in assoluto: ma quelle affermazioni non possono essere trascurate nell'ambito dell'insegnamento della matematica, perché si collegano alla concezione che l'insegnante e gli allievi hanno della matematica.

In alcuni punti la vostra analisi sembra rifarsi idealmente ad alcune considerazioni di Wittgenstein. Mi riferisco ad esempio alla celebre concezione wittgensteiniana delle "regole" (Kripke, 1982; Messeri, 2000; Bagni, 2005 e in via di pubblicazione).

J.-Ph. Drouhard: Senza alcun dubbio il 'secondo' Wittgenstein è un autore per noi molto importante, soprattutto per le sue riflessioni su quelle che chiama "regole del gioco" e sull'atto di "seguire una regola", denso di implicazioni (è stato giustamente citato: Granger, 2003). È però opportuno osservare che l'esposizione di Wittgenstein è tipicamente asistematica ed è soggetta ad interpretazioni anche molto diverse, addirittura contrastanti. Fondare direttamente la nostra impostazione sulle grandi idee wittgensteiniane, ad esempio su quelle espresse nell'ultimo, importantissimo lavoro del grande filosofo viennese, *Della certezza* (Wittgenstein, 1969), richiederebbe un approfondimento filosofico assai impegnativo.

La suddivisione nei tre ordini di sapere che tu e Mabel Panizza proponete può avere interessanti conseguenze sul piano della ricerca: ad esempio, sarebbe interessante considerare l'evoluzione storica della matematica con riferimento a tali ordini di sapere. Si verrebbe ad esaminare dunque: l'evoluzione dei contenuti; l'evoluzione del modo di fare matematica (le forme di rappresentazione, di argomentazione, di dimostrazione, di deduzione etc.); l'evoluzione di ciò che la matematica è (ovvero è ritenuta). Un nome al quale non si può non fare riferimento è quello di Thomas S. Kuhn: quali collegamenti sono da evidenziare tra la Struttura delle Rivoluzioni Scientifiche e la vostra impostazione teorica?

J.-Ph. Drouhard: Avrò occasione di riprendere più avanti il discorso riguardante l'aspetto pratico. Ora desidero sottolineare che abbiamo riscontrato numerose e rilevanti analogie tra i paradigmi introdotti da Kuhn ed alcuni aspetti centrali del nostro modello di ordini del sapere: ad esempio, l'analogia tra i saperi del II ordine e le norme che regolano la risoluzione dei problemi (che Kuhn chiama "enigmi", in inglese "puzzles") della scienza "normale" (Kuhn, 1962, 1983, p. 64); a livello più concreto possiamo citare le considerazioni su "certi tipi di strumentazione (…) e il modo legittimo di usarli" (ibid. p. 67); interessante è la somiglianza tra il III ordine e ciò che Kuhn descrive quando parla di norme riferite a "un livello più elevato, quasi metafisico" (ibid. p. 68). E l'analogia non si limita all'aspetto teorico, ma si estende all'apprendimento: la nozione di paradigma viene introdotta da Kuhn per trattare i problemi dell'evoluzione (ovvero delle rivoluzioni) nello sviluppo delle scienze (ibid. p. 22). I paradigmi si evolvono, e da questo punto di vista l'accento è sull'aspetto epistemologico; inoltre si trasmettono, e qui l'aspetto principale da considerare è quello didattico. Chiaramente, dunque, gli aspetti epistemologico e didattico assumono importanza primaria.

In che modo avete collegato l'originale impostazione teorica di Kuhn alla vostra riflessione?

J.-Ph. Drouhard: Ci siamo impegnati nella messa a fuoco di quanto il quadro teorico dei paradigmi può apportare al modello degli ordini del sapere: è questa quella che chiamiamo Prospettiva Paradigmatica nella didattica della matematica. Ovviamente una corretta e organica considerazione della nozione di paradigma in campo didattico richiede un attento esame delle critiche mosse a Kuhn (sebbene noi pensiamo che lo stesso Kuhn abbia risposto in anticipo a molti dei suoi detrattori). Non solo possono essere utili i costrutti teorici originali della teoria dei paradigmi, ma anche quelli sviluppati da Kuhn e dai suoi seguaci per ribattere alle critiche.

Consideriamo ora più da vicino la significativa estensione del vostro modello che avete denominato Prospettiva Paradigmatica. Per quanto riguarda specificamente l'aspetto didattico, insegnare la matematica comporta una trasmissione del sapere ai tre ordini. Possiamo chiederci: la nozione di paradigma consente un approccio unitario al problema? Tale domanda è ovviamente rilevante, anche considerando che gli obiettivi dichiarati dell'insegnamento (ad esempio nei programmi 'ufficiali') non sempre fanno esplicita menzione del sapere del II e del III ordine. In altre parole, pur senza voler valutare nel dettaglio la misura in cui sono (o non sono) presenti saperi del II e del III ordine nei vari livelli scolastici, come i paradigmi possono essere utilmente considerati nei processi di insegnamento-apprendimento?

J.-Ph. Drouhard: Al di là del particolare livello scolastico, è necessario fare una premessa generale. Un problema essenziale che riguarda la possibile applicazione didattica è la seguente: i paradigmi possono essere considerati alla stregua di unità fondamentali di sapere? Oppure per gli scopi e le necessità didattiche sono strutture dalle dimensioni difficilmente gestibili? Abbiamo ritenuto opportuno affermare che il paradigma della matematica appresa dagli studenti possa essere suddiviso in una famiglia di componenti: gli allievi passano da una componente all'altra durante il percorso di apprendimento. Questi componenti vengono chiamati "sotto-paradigmi". Ad esempio, almeno in prima approssimazione, possiamo dire che la statistica è un sotto-paradigma del paradigma della matematica.

Quali sono le caratteristiche fondamentali di un sotto-paradigma?

J.-Ph. Drouhard: La nostra proposta è di caratterizzare un sotto-paradigma mediante:

(1) dei saperi concettuali, cioè dei saperi sugli oggetti matematici e sulle loro relazioni (saperi di I ordine);[1]

(2) dei saperi semiolinguistici, cioè dei sistemi di rappresentazioni semiotiche e linguistiche di oggetti (saperi di I ordine);

(3) dei saperi strumentali cioè saperi e meta-saperi legati a strumenti che permettono di operare sulle rappresentazioni di oggetti, in funzione delle proprietà di tali oggetti (saperi di I ordine);

(4) delle regole del gioco matematico proprie del sotto-paradigma (saperi di II ordine);

(5) dei saperi che permettono l'identificazione (saperi di III ordine);

(6) un certo numero di attività paradigmatiche (gli "esempi").

I primi cinque componenti organizzati in tre ordini formano la "matrice disciplinare" (nella terminologia di Kuhn) del sotto-paradigma.

Quale potrebbe essere un esempio in grado di illustrare il ruolo e l'influenza della nozione di sotto-paradigma?

J.-Ph. Drouhard: La recente storia dell'insegnamento della matematica ci fornisce un'occasione interessante: possiamo interpretare la riforma detta della "matematica moderna" come un tentativo di unificare tutti i sotto-paradigmi matematici insegnati nella scuola primaria e secondaria in un solo sotto-paradigma, quello degli insiemi. Com'è noto, tutto si risolse in un sostanziale fallimento: e dal punto di vista paradigmatico fu un'operazione priva di senso.

L'analisi di un paradigma in sotto-paradigmi comporta certamente un approccio che rende possibile una considerazione didattica più agevole. Ma qual è l'autonomia reciproca dei vari sotto-paradigmi

---

[1] Sarebbe stato possibile parlare di "*un insieme* di saperi concettuali…". L'uso del termine "insieme" non deve però far pensare alla descrizione epistemografica come ad una modellizzazione matematica in termini insiemistici; Mabel Panizza ha fatto notare (sulla base di Granger) che considerare dei saperi come elementi di insiemi può conferire ad essi un carattere universale, cioè indipendente dai sotto-paradigmi nei quali si trovano. Ad esempio, i saperi legati al numero π nel suo paradigma geometrico risulterebbero uguali a quelli legati a π nel suo paradigma analitico (dove π è definito mediante serie numeriche). Una tale universalità dei saperi sarebbe difficilmente compatibile con la concezione wittgensteiniana dei "giochi linguistici", che si considera primaria.

che si considerano?

J.-Ph. Drouhard: Ovviamente i sotto-paradigmi sono collegati tra di loro da un insieme di relazioni, alcune delle quali sono "trasposizioni" nel senso dell'Approccio Antropologico: la prospettiva paradigmatica ha l'ambizione di considerare tali trasposizioni a livello dei sotto-paradigmi di un paradigma dato in tutte le loro componenti e a tutti gli ordini dei saperi.

La considerazione dei diversi sotto-paradigmi introduce un importante elemento di novità. In che cosa, inoltre, il vostro approccio si differenzia dall'originale impostazione kuhniana?

J.-Ph. Drouhard: Secondo Kuhn, una scienza si evolve attraverso una serie di cambiamenti, le rivoluzioni scientifiche; e nel corso di ciascuna di queste rivoluzioni coesistono e si affrontano due "stati" successivi della scienza, i paradigmi. Ma noi non riteniamo di applicare direttamente una tale concezione alla didattica: il nostro intendimento è quello di considerare i paradigmi kuhniani dal punto di vista sincronico piuttosto che da quello diacronico. Stiamo qui riprendendo una celebre opposizione (sincronico-diacronico) introdotta da Ferdinand de Saussure per lo studio del linguaggio «Un fenomeno linguistico si dice sincronico quando tutti gli elementi e i fattori che mette in gioco appartengono allo stesso momento ed alla stessa lingua (= ad un solo 'stato'); si dice diacronico quando fa intervenire elementi e fattori appartenenti a stati differenti della stessa lingua» (Ducrot, Todorov, 1972, p. 179, la traduzione è nostra). Con ciò F. de Saussure contribuì ad introdurre la linguistica (scienza sincronica) a partire dalla filologia (diacronica, almeno in origine). Kuhn concepisce il paradigma per descrivere l'evoluzione (diacronica) della scienza; ma noi siamo interessati primariamente all'organizzazione sincronica dei paradigmi. Del resto, lo studioso di didattica è interessato all'organizzazione dei saperi che una generazione trasmette alla seguente, e non all'evoluzione di tali saperi. Per questo noi ci occupiamo della natura e dell'evoluzione del sapere in un momento preciso della storia. Adottando una prospettiva sincronica, riteniamo che il paradigma, nel momento considerato, possa essere suddiviso nell'unione di quelli che chiamiamo sotto-paradigmi.

Per concludere, uno studioso di didattica potrebbe domandarti se la vostra Prospettiva Paradigmatica debba essere infine considerata *una teoria dell'apprendimento oppure una teoria dell'insegnamento. Tuttavia l'impostazione che hai sino ad ora delineato sembra portare la riflessione in un'altra direzione.*

J.-Ph. Drouhard: In effetti non si tratta né dell'una cosa né dell'altra. È bene ribadire che si tratta di una teoria dei saperi da apprendere (con un'interpretazione, dunque, dal punto di vista epistemologico, ovvero epistemografico) e non dell'apprendimento di tali saperi. Ed analogamente si tratta di una teoria dei saperi da insegnare, non dell'insegnamento di tali saperi. In una delle domande precedenti si parlava dell'evoluzione del modo di fare matematica, citando, tra l'altro, le forme di argomentazione, di dimostrazione, di deduzione. Per l'approccio di Chevallard, ad esempio, il centro della riflessione è costituito dalle pratiche; il nostro approccio è, per così dire, duale: è fondato sui saperi, non sui processi, ad esempio su quelli coinvolti nella costruzione di una dimostrazione (come le fasi di congettura etc.). E secondo noi uno studio dell'insegnamento o dell'apprendimento non può prescindere dall'analisi dei saperi da apprendere e da insegnare.

Bibliografia

Bagni G.T. (2003a). Considerazioni che riguardano l'intervento di conoscenze del III ordine nelle fasi di generalizzazione dell'apprendimento del concetto di funzione. In: Bazzini L. (ed.). *Atti del Seminario Franco Italiano di Didattica dell'Algebra, V, (SFIDA 17, 18, 19, 20)*. Dipartimento di Matematica, Università degli Studi, Torino. XIX/16-XIX/25.

Bagni G.T. (2003b). Functions: processes, properties, objects, Paper presented to the 3rd European Conference on Research on Mathematics Education (CERME-3). Bellaria, Italy, in via di pubblicazione in the *Proceedings of CERME-3*.

Bagni G.T. (2005). Esistono infiniti primi gemelli? Nel cinquantenario della pubblicazione di "Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik" (Osservazioni sopra i fondamenti della matematica) di Ludwig Wittgenstein (Oxford, 1956). *La matematica e la sua didattica.* 4, 413-436.

Bagni G.T. (in via di pubblicazione). Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of Set Theory. *Educational Studies in Mathematics.*

Sackur C., Assude T., Maurel M., Drouhard J-Ph., Paquelier Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *RDM*, 25/1, pp. 57-90.
Drouhard J-Ph., Panizza M. (2003a). Les trois ordres de connaissances: un essai de présentation synthétique. In: Bazzini L. (ed.). *Atti del Seminario Franco Italiano di Didattica dell'Algebra, V, (SFIDA 17, 18, 19, 20)*. Dipartimento di Matematica, Università degli Studi, Torino.
Drouhard J-Ph., Panizza M. (2003b). What do the Students Need to Know, in Order to be Able to Actually do Algebra? The Three Orders of knowledge. *Atti della 3rd European Conference on Research on Mathematics Education*. Bellaria, Italy, CD, Università di Pisa.
Drouhard J-Ph., Panizza M. (2005). Perspective Paradigmatique et Ordres de Connaissances. In: A. Mercier, Cl. Margolinas (Dir.). *Actes de la 12ème école d'été de Didactiques des Mathématiques*. 1 ouvrage + 1CD, le texte se trouve dans le CD. Grenoble : La Pensée Sauvage.
Ducrot O., Todorov T. (1972). *Dictionnaire encyclopédique des sciences du langage*. Éditions du Seuil, Paris.
Frascolla P. (2000). Filosofia della matematica. In: Marconi D. (ed.). *Guida a Wittgenstein*. Roma-Bari: Laterza. 103-150.
Gargani A.G. (1993). *Introduzione a Wittgenstein*. Bari-Roma: Laterza.
Granger G.G. (2003). *Philosophie, Langage, Science*. Paris: EDP.
Habermas, J. (1999), *Wahrheit und Rechtfertigung. Philosophische Aufsätze*. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Mein (*Truth and Justification*. MIT Press, Cambridge 2003, *Verità e giustificazione*. Roma-Bari: Laterza, 2001).
Kripke S. (1982). *Wittgenstein on rules and private language*. Blackwell, Oxford (Torino: Boringhieri, 1984).
Kuhn T. (1983). La Structure des révolutions scientifiques. Flammarion, Paris (*The Structure of Scientific Revolutions*, The University of Chicago Press, Chicago, 1962).
Messeri M. (2000). Seguire la regola. In: Marconi D. (ed.). *Guida a Wittgenstein*. Roma-Bari: Laterza. 151-192.
Panizza M., Drouhard J-Ph. (2003). Los órdenes de conocimiento como marco para significar las prácticas evaluativas. In: Palou de Maté C. (ed.). *La Enseñanza y la evaluación: una propuesta para matemática y lengua.* pág. 51-73. GEEMA (Grupo Editor Multimedial). Colección: Estudios Universitarios, Buenos Aires.
Robert A., Robinet J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *RDM* 16/2, 145-176.

Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 1-36.

Wittgenstein L. (1953). *Philosophische Untersuchungen*. Basil Blackwell, Oxford (*Ricerche filosofiche*. Torino: Einaudi, 1999).

Wittgenstein L. (1956). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Basil Blackwell, Oxford (*Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*. Torino: Einaudi, 1971).

Wittgenstein L. (1969). *Über Gewissheit*. Basil Blakwell, Oxford (*Della Certezza*, Torino: Einaudi, 1978).

Wright C. (1980). *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*. London: Duckworth.