Bollettino dei Docenti di Matematica 36 (1998), 53-60

Dimostrare e convincere

GIORGIO T. BAGNI

NUCLEO DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA, BOLOGNA

Abstract. The demonstration is often considered the essential moment of doing Mathematics, from the didactical point of view as well. With no intention to deny the primary relevance of the demonstration, the paper reminds us thet demonstrations themselves are only one side of the mathematical work. In fact, there is a pre-demosntrative phase, of relevant importance, usually left to intuitive capacity. Those ideas have repercussions on the conception and the role of demonstration, as it is shown through experiences carried out in some higher secondary schools.

Spesso, nei corsi scolastici di matematica e nei libri di testo (pensiamo soprattutto alla scuola secondaria superiore), la dimostrazione viene considerata il momento essenziale dell'intera trattazione di una questione matematica, anche dal punto di vista didattico. Talvolta questa impostazione porta ad attribuire alla dimostrazione un ruolo preponderante: osserva F. Speranza che "siamo stati educati nell'ideale aristotelico-euclideo nel quale la matematica viene presentata secondo lo schema *enunciati-dimostrazioni*. Siamo arrivati a far coincidere con questo stile la *sostanza* della razionalità matematica" (Speranza, 1992, p. 135).

Non intendiamo negare l'importanza primaria della dimostrazione, sia per la ricerca sia nell'àmbito della didattica disciplinare; eppure, nota ancora Speranza, "in quanto alla pratica matematica, le dimostrazioni sono solo una parte del lavoro (anche per i matematici 'puri'): essa è preceduta da una fase di intuizioni, di congetture, di tentativi che via via si perfezionano" (Speranza, 1992, p. 135).

Il ruolo di questa fase pre-dimostrativa, generalmente affidata a capacità di intuizione ([1]) prima ancora che di organizzazione razionale della dimostrazione, è rilevante (si veda ad esempio: Mazzanti & Piochi, 1990; Dapueto, 1992, p. 39), soprattutto se si considera che "la dimostrazione... non dà necessariamente il massimo convincimento" (Speranza, 1992, p. 137). Osserva E. Fischbein:

([1]) Sul significato del termine intuizione in àmbito matematico, F. Furinghetti annota (riferendosi a Davis & Hersh, 1980, p. 391): "Il problema del significato dell'intuizione è prima di tutto glottologico... L'ambiguità e il mistero che circonda questo termine possono spiegarsi col fatto che nell'immagine comune la matematica è associata alla pura deduzione logica, per cui ogni fatto discende strettamente e 'fatalmente' dai precedenti; certi processi di acquisizione di nuova conoscenza (e, tra essi, in particolare, le scoperte/invenzioni matematiche) sembrano avvenire saltando alcuni anelli della catena di deduzioni e... creano la necessità di un elemento 'estraneo' (l'intuizione, appunto) che entri in gioco a spiegare ciò che è avvenuto" (Furinghetti, 1992, p. 85). Citiamo E. Fischbein: "La più diffusa interpretazione di intuizione è che l'intuizione è senso comune... Il fatto che questa identificazione è in parte corretta ha probabilmente bloccato gli interessi degli psicologi nello studio del fenomeno dell'intuizione" (Fischbein, 1993, p. 1).

"*Capire intuitivamente* non significa semplicemente *vedere*... Dobbiamo considerare tre livelli di accettazione intuitiva. Un primo livello si riferisce al fatto espresso dall'affermazione stessa... Un secondo livello si riferisce alla struttura della dimostrazione: un allievo può capire intuitivamente il significato di un teorema ma può non essere in grado di capire intuitivamente la struttura della rispettiva dimostrazione (sebbene sia in grado di memorizzare e di capire formalmente i suoi passi)... Il terzo livello si riferisce al fatto di capire la validità universale dell'affermazione come garantita ed imposta dalla validità della dimostrazione" (Fischbein, 1993, p. 22).

Tali idee si riflettono sulla concezione e sul ruolo della dimostrazione:

"Formalmente non c'è differenza tra l'accettare la correttezza di una dimostrazione matematica e l'accettare l'universalità di un'affermazione come garantita da quella dimostrazione. Il fatto che, per l'alunno, ci sia differenza tra accettare una dimostrazione ed accettare l'universalità dell'asserto provato da essa dimostra che si può prendere in considerazione un elemento in più. Tale elemento aggiuntivo è costituito dal bisogno di un'accettazione intuitiva complementare della capacità predittoria assoluta di un'affermazione che è stata formalmente provata" (Fischbein, 1993, pp. 22-23; inoltre: Lolli, 1989).

Una vasta e profonda ricerca attualmente in corso (Arrigo & D'Amore, 1998, *comunicazione privata all'autore*) è dedicata allo studio delle reazione degli allievi di vari livelli scolastici (particolarmente della scuola secondaria superiore) di fronte ad alcune dimostrazioni riguardanti l'infinito. Da uno degli esempiesaminati nell'àmbito di tale ricerca, la scrittura di un numero decimale periodico in forma di frazione (in particolare l'interpretazione di un periodico con periodo 9), traiamo lo spunto per alcune riflessioni sulla dimostrazione in didattica ([2]).

A tale proposito, consideriamo le due seguenti schede: nella prima è riportata una "tradizionale" dimostrazione mediante la quale si prova che $0,\overline{9}$ non è un numero minore di 1, anzi che risulta: $0,\overline{9} = 1$; nella seconda si afferma che $0,\overline{9}$ non è minore di 1 mediante un'argomentazione che può apparire meno rigorosa, basata su di un procedimento pratico.

Scheda A

Dimostriamo che $0,\overline{9}$ non è un numero minore di 1.

Per fare ciò dimostreremo che è: $0,\overline{9} = 1$. Infatti possiamo scrivere:

$$0,\overline{9}\cdot 10 = 9,\overline{9}$$
$$0,\overline{9}\cdot 10 = 9+0,\overline{9}$$
$$0,\overline{9}\cdot 10-0,\overline{9} = 9$$
$$0,\overline{9}\cdot (10-1) = 9$$
$$0,\overline{9}\cdot 9 = 9$$
$$0,\overline{9} = \frac{9}{9} \qquad \text{cioè:} \quad 0,\overline{9} = 1$$

([2]) Sulla questione c'è una vasta bibliografia: D'Amore, 1996 e 1997. C. Dapueto segnala che "quando si costruisce un nuovo insieme di oggetti matematici occorre definire una nuova nozione di identità: ad esempio... occorrerebbe precisare che sono da considerarsi eguali come numeri le espressioni 1.3999... e 1.40000... La nozione di relazione di equivalenza dovrebbe, cioè, avere un uso diffuso" (Dapueto, 1992, p. 37).

Scheda B

Immaginiamo un numero positivo scritto in forma decimale minore di 1; ad esempio:

$$a = 0{,}68422432763$$

Consideriamo ora il seguente esercizio:

Scrivere un numero *b*, in forma decimale, minore di 1 e maggiore di *a*.

Ci chiediamo innanzitutto: **è sempre possibile risolvere questo esercizio?**

Per rispondere, ripensiamo al numero *a*, che sappiamo essere minore di 1; la differenza tra 1 e *a* è 1–*a*, un numero positivo. Ebbene, se ad esempio aggiungiamo ad *a* un numero positivo più piccolo di 1–*a* (ad esempio: la metà, o la terza parte di 1–*a*) otteniamo un numero certamente maggiore di *a* e minore di 1. **Dunque l'esercizio è sempre risolubile: basta che *a* sia minore di 1**.

Affrontiamo ora praticamente l'esercizio: per scrivere un numero *b* maggiore di *a* (e sempre minore di 1) possiamo operare nel modo seguente:

Procedimento: scriviamo un numero che, in forma decimale, coincida con *a* "fino a un certo punto", cioè abbia le prime cifre decimali uguali a quelle di *a* **e quindi abbia una cifra decimale maggiore della corrispondente cifra di *a***. A questo punto il nostro *b* è già maggiore di *a* (e, dato che ha uno 0 prima della virgola, è minore di 1): tutto ciò che scriveremo dopo non avrà più importanza (potremmo anche non scrivere più nulla, oppure lasciare inalterate le cifre di *a*, oppure inventare delle cifre qualsiasi...).

Ad esempio, se $a = 0{,}68422432763$ possiamo scrivere:

$b = 0{,}\mathbf{7}$

oppure: $b = 0{,}6\mathbf{9}422432763$

oppure: $b = 0{,}68\mathbf{8}$ etc.

Possiamo comunque concludere che se vogliamo scrivere un numero maggiore di *a* (e minore di 1) dobbiamo scrivere un numero *b* in cui almeno una cifra decimale sia maggiore della corrispondente cifra decimale di *a*.

Prendiamo ora in considerazione il numero:

$$a = 0{,}99999999999...$$

dunque il numero periodico $0{,}\overline{9}$. Ebbene, se $0{,}\overline{9}$ fosse un numero minore di 1, dovrebbe essere possibile scrivere (applicando il **Procedimento** sopra descritto!) un numero minore di 1 e maggiore di *a*...

Ma non è possibile applicare il **Procedimento**: cioè non è possibile lasciare inalterate le cifre decimali di *a* "fino ad un certo punto" e quindi "aumentare" una cifra decimale, perché tutte le cifre decimali dopo la virgola sono 9!

Concludiamo dunque che $0{,}\overline{9}$ non è un numero minore di 1.

Evidentemente quanto proposto nella scheda B, ancorché sostanzialmente corretto, deve essere considerato incompleto e formalmente debole (non viene ad esempio dimostrato che il "Procedimento" indicato è indispensabile p er scrivere un numero decimale compreso tra il numero assegnato *a* e 1).

Una ricerca sperimentale è stata condotta con riferimento agli allievi di una classe quarta e di una classe quinta Liceo scientifico (allievi di 17-19 anni), per un totale di 50 allievi.

Agli allievi è stato innanzitutto domandato di optare tra le due possibilità:

$0,\overline{9} = 1$ e $0,\overline{9} < 1$

Il 68% degli allievi ha affermato che $0,\overline{9} < 1$; solo il 20% ha indicato $0,\overline{9} = 1$ (il restante 12% non ha risposto).

Ciò conferma che (nonostante agli allievi sia stato proposto, nel programma di matematica delle scuole secondarie inferiori e del biennio delle scuole superiori, come ricavare la frazione generatrice di un numero periodico) l'accettazione del fatto che le due **diverse** scritture "$0,\overline{9}$" e "1" possano indicare uno **stesso** numero costituisce effettivamente una difficoltà per gli allievi, i quali sono abituati a considerare una (implicita) corrispondenza biunivoca tra i numeri e le rappresentazioni (decimali) di essi.

Abbiamo quindi voluto esaminare l'efficacia della dimostrazione 'tradizionale" presentata nella scheda A e dell'argomentazione presentata nella scheda B. A ciascun allievo sono state proposte, in sequenza, la scheda A e la scheda B (in quest'ordine).

Dopo aver proposto agli allievi la scheda A, il ricercatore ha nuovamente chiesto ad essi di scegliere tra le due possibilità $0,\overline{9} = 1$ e $0,\overline{9} < 1$: il 44% degli allievi ha affermato che $0,\overline{9} < 1$; il 48% ha indicato $0,\overline{9} = 1$ (il restante 8% non ha risposto). Intervistati, alcuni allievi (il 28% del totale) hanno affermato che, nonostante la dimostrazione, $0,\overline{9}$ è solo 'un'approssimazione" di 1.

Dopo avere proposto agli allievi anche la scheda B, è stata proposta per la terza volta ad essi la precedente domanda: il 22% degli allievi ha affermato che $0,\overline{9} < 1$; il 70% ha indicato $0,\overline{9} = 1$ (il restante 8% non ha risposto).

	$0,\overline{9} = 1$	$0,\overline{9} = 1$	non risponde
Prima di proporre le schede	68%	**20%**	12%
Dopo la scheda A	44%	**48%**	8%
Dopo le schede A e B	22%	**70%**	8%

Possiamo rilevare che l'insieme dei procedimanti presentati (compreso, dunque, il procedimento presentato nella scheda B) ha potuto convincere alcuni allievi (il 22% del totale) che $0,\overline{9} = 1$, allievi che non erano stati convinti dalla sola dimostrazione 'tradizionale" (presentata nella scheda A).

Questa semplice esperienza non vuole costituire la base sperimentale di una ricerca scientifica nel campo dell'epistemologia dell'apprendimento: il campione, ad esempio, è troppo ristretto per poter essere considerato pienamente significativo e la metodologia del test e delle interviste dovrebbe essere approfondita e debitamente esplicitata. Ma alcuni spunti emersi meritano una riflessione.

La dimostrazione è certamente una fase fondamentale dell'apprendimento della matematica; ma non bisogna dimenticare che non sempre essa è in grado di convincere pienamente l'allievo, di catturare la sua attenzione. Emotivamente, l'allievo può restare in parte o del tutto insensibile ad una 'tradizionale" dimostrazione, mentre può essere affettivamente coinvolto, in termini spesso decisivi, da un'argomentazione più vicina all'esperienza, ad una procedura (praticamente) ripetibile, sebbene, forse, meno 'rigorosa".

Ricordiamo un'osservazione di uno dei più importanti matematici contemporanei, Jacques Hadamard: (1865-1963):

"Che un elemento affettivo sia parte di ogni scoperta o invenzione è sin troppo evidente, e molti pensatori vi hanno già insistito: è chiaro che nessuna scoperta o invenzione significativa può aver luogo senza la volontà di scoprire" (Hadamard, 1993).

A. Rogerson e M. Arora citano un'interessante annotazione di un non meglio precisato "collega giapponese":

"È importante fare ricerca matematica nella propria lingua, in quanto la ricerca coinvolge la persona intera, conoscenza e sentimenti, testa e cuore. Fare matematica in una lingua straniera è come impegnarsi in un incontro di pugilato tenendo una mano dietro la schiena" (Rogerson & Arora, 1995, p. 496).

Dunque il ruolo dell'aspetto affettivo si conferma primario e fondamentale nell'apprendimento della matematica, particolarmente per quanto riguarda l'accettazione di fatti matematici (per l'allievo) sorprendenti, in contrasto con alcuni "preesistenti frammenti pre-matematici" (e proprio la presenza di tali "frammenti" è una delle principali cause di misconcezioni, secondo Davis e Vinner, 1986, pp. 298-300) ([3]).

Concludiamo facendo nostra un'osservazione di F. Speranza, riferita primariamente al ruolo didattico della dimostrazione e dell'esperienza concreta in geometria (ma immediatamente estesa all'aritmetica ed all'algebra):

"Molti insegnanti di matematica sono convinti che attraverso le dimostrazioni gli studenti imparino sia i 'contenuti' sia la 'struttura logica' della disciplina, e siano educati allo 'spirito critico'. Almeno per la geometria, sono profondamente convinto che questa sia un'illusione. Anzitutto i 'fatti spaziali' si imparano per esperienza concreta (in certa misura, anche quella offerta dal metodo delle coordinate); del resto, anche altri settori, nei quali i fatti sono meno 'palpabili', come l'aritmetica e l'algebra, si apprendono anzitutto affrontando problemi, escogitando metodi di risoluzione" (Speranza, 1992, p. 136).

Riferimenti bibliografici

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1998), Ricerca in corso, titolo provvisorio: "Lo vedo ma non ci credo", *comunicazione privata all'autore*.

Bottazzini, U. (1981), *Il calcolo sublime*, Boringhieri, Torino.

Brousseau, G. (1986), Fondaments et méthods de la didactique des mathématiques: *Recherches en didactique del mathématiques*, 7, 2, 33-115.

([3]) La questione del rigore (anche dal punto di vista linguistico) è molto delicata. U. Bottazzini evidenzia la storicità di tale aspetto della matematica: "Il rigore in matematica è anch'esso un concetto 'storico' e dunque in divenire... Appellarsi all'esigenza del rigore nello spiegare lo sviluppo della matematica sembra in realtà un discorso circolare: di fatto, alla formulazione di nuovi *standard* di rigore si perviene quando i vecchi criteri non permettono una risposta adeguata alle domande che vengono dalla pratica matematica" (Bottazzini, 1981, p. 13). La questione è complessa e non può essere certo esaurita in poche battute; il lettore potrà consultare ad esempio: D'Amore, 1993; Maier, 1993a e 1993b; Zan, 1995; Pellerey & Orio, 1996.

D'Amore, B. (1993), Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico: *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-301.

D'Amore, B. (1996), *L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi*, Opening Relation to Topic Group XIV "Infinite processes throughout the curriculum", 8th ICME, Sevilla, 14-21 July 1996 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 322-335).

D'Amore, B. (1997), Bibliografia in progress sul tema: "l'infinito in didattica della matematica": *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-305.

Dapueto, C. (1992), La problematica del definire e del dimostrare nella costruzione di un progetto per l'insegnamento della matematica: Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del II Internucleo della Scuola secondaria superiore, CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, 13, 19-51.

Davis, P.J. & Hersh, R. (1980), *The mathematical experience*, Birkhäuser, Boston.

Davis R. & Vinner S. (1986), The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages: *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.

Fischbein, E. (1983), Intuition and proof: *For the Learnong of Mathematics*, 3, 2, 9-24 (traduzione italiana di Copercini, L.: Intuizione e dimostrazione: Fischbein, E. & Vergnaud, G., 1992, *Matematica a scuola: teoria ed esperienze*, Pitagora, Bologna, 1-24).

Furinghetti, F. (1992), Luci ed ombre dell'approccio "intuitivo": Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del II Internucleo della Scuola secondaria superiore, CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, 13, 83-96.

Hadamard, J. (1993), *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, Cortina, Milano.

Lolli, G. (1989), *Capire una dimostrazione*, Il Mulino, Bologna.

Maier, H. (1993a), Conflit entre language mathématique et langue quotidienne pour les élèves: *Cahier de didactique des mathématiques*, 3, 86-118 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1995, 298-305).

Maier, H. (1993b), Problemi di lingua e comunicazione durante le ore di matematica: *La matematica e la sua didattica*, 1, 69-80.

Mazzanti, G. & Piochi, B. (1990), Riflessioni sulla dimostrazione in didattica della matematica: *Didattica delle scienze e dell'informatica nella scuola*, 149, 45-50.

Pellerey, M. & Orio, F. (1996), La dimensione affettiva e motivazionale nei processi di apprendimento della matematica: *ISRE*, 2, 52-73.

Rogerson, A. & Arora, M. (1995), La didattica della matematica verso il 21° secolo: *La matematica e la sua didattica*, 4, 491-508.

Speranza, F. (1992), La geometria nelle scuole superiori: dimostrazioni o progetto di razionalità: Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del II Internucleo della Scuola secondaria superiore, CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, 13, 135-141.

Zan, R. (1995), Chi non riesce in matematica?: D'Amore, B. (a cura di), *Insegnare ad apprendere la matematica in aula: situazioni e prospettive*, Atti del IX Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica", Castel San Pietro Terme, Pitagora, Bologna, 77 - 83.