L'educazione matematica XXI, VI, 2, 1 (2000), 22-46 (Italian and English)

INSIEMI INFINITI DI NUMERI REALI

Le concezioni degli allievi prima e dopo lo studio dell'Analisi e l'introduzione dei numeri reali nella pratica didattica

GIORGIO T. BAGNI
NUCLEO DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA, BOLOGNA

1. INTRODUZIONE

> "È manifesto, che le quantità AB, CD per cagion d'esempio si rendono incommensurabili da una parte FD minore di una qualsivoglia data; imperocché presa AE parte aliquota di AB quanto si voglia piccola, e sottratta da CD quante volte si può, resterà la porzione FD, che fa l'assimetria minore di AE, e ciò perché deve succedere sempre qualunque sia la picciolezza di AE: di FD dovrà essere minore di qualsivoglia data".
>
> Girolamo Saladini, 1761

Con la presente ricerca vogliamo analizzare l'importanza dei concetti di insieme discreto, di insieme denso e di insieme continuo nella didattica (allievi di 16-19 anni). Nella prima parte del lavoro viene esaminata l'idea di insieme connesso, riferita all'insieme dei reali; nella seconda parte viene esaminato l'integrale, con riferimento ad insiemi densi e continui.

Tali concetti hanno costituito oggetto di studio per numerosi ricercatori, sia anticamente (basti pensare ad Aristotele ed a S. Boezio) ([1]) che recentemente: alcuni importanti studi didattici sono stati dedicati all'accostamento al concetto di infinito; ad esempio, di primaria rilevanza nella didattica dell'infinito è la considerazione dei due atteggiamenti dell'allievo orientati rispettivamente alla *misura* ed al *conteggio* (interessanti considerazioni a tale riguardo sono in Tall, 1980; sulla coerenza delle risposte degli allievi: Tsamir & Tirosh, 1992).

Lo studio delle concezioni di continuità si estende a tutti i livelli scolastici (per la scuola primaria: Gimenez, 1990; le "immagini concetto" collegate al continuo negli allievi di 16-17 anni sono in: Romero i Chesa-Azcarate Gimenes, 1994). Il confronto di insiemi infiniti è esaminato in: Waldegg, 1993 ed alcune difficoltà nell'espressione di tale confronto sono evidenziate in: Duval, 1983; R. Duval osserva che un ostacolo a proposito del riconoscimento della biiezione tra l'insieme dei naturali e l'insieme dei naturali quadrati viene ad essere uno "scivolamento" (*glissement*) dall'uso del verbo Avere all'uso del verbo Essere: "chaque entier a un carré - tout les entiers ne sont pas des carrés d'entiers" (Duval, 1983, p. 403) ([2]).

I PARTE: NUMERI RAZIONALE E NUMERI REALI

2. METODOLOGIA DELLA RICERCA (I PARTE)

Nel nostro lavoro l'analisi del comportamento degli allievi è riferita a:

• una classe di III *Liceo scientifico* (età degli allievi: 16-17 anni), a Treviso, per un totale di 26 allievi; al momento della ricerca (test 1) erano stati introdotti i concetti di insieme, con le relative notazioni, e di cardinalità; i reali erano stati presentati, nella precedente II classe, con le sezioni di Dedekind. Non era stata proposta una trattazione specifica degli insiemi infiniti (loro definizione, cardinali transfiniti).

____

([1]) Per la storia in didattica: Grugnetti (1992), Furinghetti (1993), Furinghetti & Somaglia (1997).

([2]) Inoltre: Fischbein; Jehiam & Cohen, 1995, in cui sono studiate alcune difficoltà con i numeri irrazionali. Per gli ostacoli epistemologici collegati ai limiti si veda: Sierpinska, 1987. Sulla didattica dell'analisi indichiamo inoltre: Schwarzenberger, 1980; Cornu, 1980 e 1981; Tall & Vinner, 1981; Orton, 1983; Tall, 1985; Davis & Vinner, 1986; Furinghetti & Paola, 1987; Mamona, 1987; Tall, 1990; Mamona-Downs, 1990; Monaghan, 1991; Dimarakis, 1996; Dimarakis & Gagatsis, 1996.

• Una classe di V *Liceo scientifico* (età degli allievi: 18-19 anni), a Treviso, per un totale di 22 allievi; al momento della ricerca (test 2) erano già stati introdotti i limiti e le funzioni continue. Non era stata proposta una trattazione degli insiemi infiniti (definizione di insieme infinito, cardinali transfiniti).

Dal raffronto dei risultati dei test 1 e 2 (collocati, dunque, *prima* e *dopo* l'introduzione dei principali concetti dell'analisi, nel tradizionale curriculum del *Liceo scientifico*) intendiamo esaminare il ruolo dell'introduzione di tali concetti nell'apprendimento delle nozioni di insieme denso e di insieme continuo.

Agli allievi di entrambe le classi sopra presentate è stato sottoposto il seguente test (tempo: 30 minuti; non è stato concesso l'uso di libri di testo o di calcolatrici):

Test 1 e test 2

1) Determinare il numero di elementi (la cardinalità) dell'insieme:

$I_{\mathbf{N}} = \{x \in \mathbf{N}: 3 \le x \le 10\}$

2) Si consideri ciascuna delle seguenti coppie di numeri razionali; dire se è vero o falso che esiste (almeno) un numero razionale compreso tra i due numeri razionali dati:

(a) $\frac{19}{29}$, $\frac{11}{16}$

(b) 2,610497, 2,310518

(c) $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ con $a \in \mathbf{N} \backslash \{0\}$, $b \in \mathbf{N} \backslash \{0\}$, $c \in \mathbf{N} \backslash \{0\}$, $d \in \mathbf{N} \backslash \{0\}$, $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$

3) Determinare il numero di elementi (la cardinalità) dell'insieme:

$I_{\mathbf{Q}} = \{x \in \mathbf{Q}: 3 \le x \le 10\}$

4) L'elemento $\sqrt{26}$ appartiene all'insieme $I_{\mathbf{Q}}$? Perché?

5) Determinare il numero di elementi (la cardinalità) dell'insieme:

$I_{\mathbf{R}} = \{x \in \mathbf{R}: 3 \le x \le 10\}$

6) Tra gli insiemi $I_{\mathbf{N}}$, $I_{\mathbf{Q}}$, $I_{\mathbf{R}}$ indicati ai punti precedenti, quale ha il massimo numero di elementi (la massima cardinalità)?

3. IL TEST 1 (III *LICEO SCIENTIFICO*)

3.1. Risultati del test 1

I risultati del test 1 sono presentati nella tabella seguente:

1)	Risposta: 8		allievi: 26	100%
2)	a)	Si	allievi: 21	81 %
		No	allievi: 4	15 %
		Non risponde	allievi: 1	4 %
	b)	Si	allievi: 25	96 %
		No	allievi: 1	4 %
		Non risponde	allievi: 0	0 %
	c)	Si	allievi: 22	85 %
		No	allievi: 0	0 %
		Non risponde	allievi: 4	15 %
3)	Risposta: infinito		allievi: 19	73 %
	Risposta: 'tanti (ma non infinito)"		allievi: 1	4 %
	Non risponde		allievi: 6	23 %
4)	Si		allievi: 9	34 %
	No		allievi: 15	58 %
	Non risponde		allievi: 2	8 %

5)	Risposta: infinito	allievi: 22	85 %
	Risposta: 8	allievi: 4	15 %
6)	Risposta: I_R:	allievi: 11	42 %
	Risposta: I_R e I_Q:	allievi: 12	46 %
	Risposta: I_Q:	allievi: 2	8 %
	Non risponde:	allievi: 1	4 %

3.2. Prime considerazioni sui risultati del test 1

Tutti gli allievi della III classe hanno compreso in modo soddisfacente l'uso della simbologia insiemistica: la risposta al primo quesito viene infatti correttamente data dalla totalità degli allievi (100 %).

Anche la densità di **Q** risulta ben compresa dalla maggioranza degli allievi, come emerge dalle risposte al secondo quesito. La cardinalità infinita di **Q** (terzo quesito, 73 %) e di **R** (quinto quesito, 85 %) sono correttamente comprese dalla maggioranza degli allievi. Naturalmente è necessario esaminare attentamente le risposte degli allievi mediante alcune interviste.

Difficoltà emergono a proposito del concetto di irrazionalità (quarto quesito): solo il 58 % degli allievi afferma che $\sqrt{26} \notin \mathbf{Q}$: analizzeremo ulteriormente ciò sulla base delle interviste. Incertezze ancora più consistenti emergono dalle risposte al sesto quesito: anche per una corretta interpretazione di tali risposte è necessario esaminare le giustificazioni fornite dagli allievi (3).

3.3. Interviste con gli allievi (test 1)

Gli allievi della III classe sono stati invitati a riflettere sulle risposte date ed a giustificarle in alcune interviste. Ci concentreremo principalmente sulle giustificazioni fornite per le risposte date al sesto quesito.

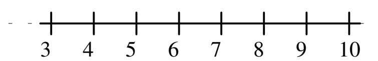
Una parte significativa (7 su 11) degli allievi che hanno affermato che la cardinalità maggiore è quella di I_R si riferisce, in diversi modi, alla motivazione:

$$I_N \subset I_Q \subset I_R \quad \Rightarrow \quad \text{la cardinalità di } I_R \text{ è maggiore di quelle di } I_Q \text{ e di } I_N$$

'La massima cardinalità è quella di I_R: gli altri sono suoi sottoinsiemi [propri]" (Dara).

Gli allievi che hanno risposto che la cardinalità maggiore è quella di I_R e di I_Q si sono giustificati affermando che due insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità. Ad esempio, interessante è l'affermazione seguente:

'I_N occupa solo i punti interi:



e I_Q occupa soltanto le frazioni; I_R occupa tutti gli spazi tra le frazioni. Ma dato che I_Q e I_R sono infiniti la loro cardinalità è per forza la stessa. Del resto con i razionali da 3 a 10 posso coprire tutto il segmento, perché posso disegnare dei punti vicini quanto voglio" (Marco).

3.4. Analisi delle interviste e conclusioni (test 1)

Per quanto riguarda le misconcezioni collegate ai concetti di densità e di continuità e gli insiemi infiniti, interessante è la presenza di due gruppi numericamente equivalenti:

- alcuni allievi, come sopra rilevato, si basano sulla considerazione:

$$I_N \subset I_Q \subset I_R \quad \Rightarrow \quad \text{la cardinalità di } I_R \text{ è maggiore di quelle di } I_Q \text{ e di } I_N$$

____

(3) Naturalmente tali risultati erano prevedibili, in quanto la nozione di cardinalità non era stata introdotta: *il nostro scopo, del resto è di rilevare l'assenza di una corretta introduzione dell'infinito*.

ovvero applicano ad insiemi infiniti considerazioni che potrebbero essere applicate soltanto ad insiemi finiti (Tall, 1980; D'Amore, 1996 e 1997). Questa è un'importante misconcezione: il fatto che un insieme infinito possa essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria (ovvero la definizione stessa di insieme infinito) non viene tenuto presente;

- altri non ritengono possibile confrontare due infiniti ed affermano che un segmento della retta reale contiene tanti razionali (infiniti) quanti reali (infiniti).

La risposta di Marco è molto interessante, in quanto pone esplicitamente l'accento sull'eventuale aspetto grafico della questione proposta (Duval, 1993). Alcuni allievi, dunque, possono essere tentati di ricondurre l'approccio ai concetti di densità e di continuità ad interpretazioni grafiche, probabilmente anche a causa della consuetudine dell'impiego dei metodi grafici nella didattica della matematica nella scuola superiore (Bagni, 1997); ma mentre la differenza tra un insieme discreto ed un insieme continuo è graficamente rilevabile (lo stesso Marco *ha rappresentato* graficamente l'insieme I_N), non così potremmo dire della differenza tra un insieme denso ed un insieme continuo (Marco *immagina*, *descrive* l'eventuale disegno di I_Q e di I_R, ma ovviamente *non* lo realizza, in quanto esso non è realizzabile!). L'approccio grafico, in questo caso particolare, non risulta efficace e si rivela addirittura fuorviante per l'allievo.

4. IL TEST 2 (V *LICEO SCIENTIFICO*)

4.1. Risultati del test 2

I risultati del test 2 sono presentati nella tabella seguente:

1)	Risposta: 8	allievi: 22	100 %
2)	a) Si	allievi: 22	100 %
	b) Si	allievi: 22	100 %
	c) Si	allievi: 22	100 %
3)	Risposta: infinito	allievi: 21	95 %
	Non risponde	allievi: 1	5 %
4)	Si	allievi: 5	23 %
	No	allievi: 16	72 %
	Non risponde	allievi: 1	5 %
5)	Risposta: infinito	allievi: 22	100 %
6)	Risposta: I_R:	allievi: 11	50 %
	Risposta: I_R e I_Q:	allievi: 5	23 %
	Risposta: I_R, I_Q e I_N:	allievi: 2	9 %
	Non risponde:	allievi: 4	18 %

4.2. Prime considerazioni sui risultati del test 2

Confermando il risultato della III classe, gli allievi hanno compreso in modo soddisfacente l'uso della simbologia insiemistica: la risposta al primo quesito è corretta (100 %).

La densità di **Q** è compresa dalla totalità degli allievi, come emerge dalle risposte al secondo quesito. La cardinalità infinita di **Q** (terzo quesito, 95 %) e di **R** (quinto quesito, 100 %) sono correttamente comprese. Naturalmente è necessario un attento esame delle interviste.

Analogamente a quanto rilevato nella III classe, qualche difficoltà emerge a proposito del concetto di irrazionalità (quarto quesito): soltanto il 72 % degli allievi afferma infatti che $\sqrt{26} \notin \mathbf{Q}$. Gli allievi manifestano qualche incertezza nella risposta al sesto quesito: sarà interessante esaminare le giustificazioni fornite alle risposte date.

4.3. Interviste con gli allievi (test 2)

Anche gli allievi della V classe sono stati invitati a riflettere sulle risposte date ed a giustificarle in alcune interviste. Come già fatto per il test proposto nella III classe, ci concentreremo principalmente sulle giustificazioni fornite per le risposte date al sesto quesito.

Quanto osservato nella III classe si ripropone anche nella V classe: la nettissima maggioranza (9 su 11) degli allievi che hanno affermato che la cardinalità maggiore è quella di I_R hanno espresso, in diversi modi, la motivazione:

$$I_N \subset I_Q \subset I_R \quad \Rightarrow \quad \text{la cardinalità di } I_R \text{ è maggiore di quelle di } I_Q \text{ e di } I_N$$

Significativa è però la giustificazione seguente:

"La cardinalità di I_N è di sicuro minore di quella di I_Q e di quella di I_R perché è finita e le altre sono infinite. Bisognerebbe sapere se l'infinito di I_R è maggiore di quello di I_Q: a prima vista gli elementi di I_R sembrerebbero di più di quelli di I_Q, ma un infinito può essere maggiore di un altro infinito?" (Aldo).

Come rilevato nella III classe, i 5 allievi (23 %) che hanno risposto che la cardinalità maggiore è quella di I_R e I_Q si sono giustificati affermando che due insiemi infiniti hanno comunque la stessa cardinalità. Per quanto riguarda i 2 allievi che hanno affermato che la cardinalità maggiore è quella di I_N, I_Q e I_R, l'errore è da loro stessi spiegato con la giustificazione:

"Ho sbagliato perché ho pensato a **N**, **Q**, **R** e non a I_N, I_Q, I_R, e così ho detto che la cardinalità è la stessa, perché sono tutti infiniti" (Anna).

È così confermato che tutti gli insiemi infiniti vengono ad essere intuitivamente considerati di uguale cardinalità.

Tra le giustificazioni riguardanti altre risposte, 8 allievi sui 16 che hanno affermato che $\sqrt{26} \notin \mathbf{Q}$ hanno espresso, in diversi modi, la seguente motivazione:

$$\sqrt{26} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{13} \wedge \sqrt{2} \notin \mathbf{Q} \wedge \sqrt{26} \notin \mathbf{Q} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{26} \notin \mathbf{Q}$$

Ad esempio:

"Per far vedere che $\sqrt{26}$ è irrazionale mi sono riferito a $\sqrt{2}$ ed a $\sqrt{13}$ perché $\sqrt{2}$ è senz'altro irrazionale, è il primo irrazionale che si studia, e $\sqrt{13}$ è irrazionale dato che 13 non è un quadrato" (Dario).

La seguente risposta è interessante:

"Secondo me $\sqrt{26}$ non è razionale, ma non saprei spiegare il perché. Credo che non sia possibile elevare al quadrato un numero di cui non so nemmeno quanti decimali ha. Probabilmente questi decimali hanno anche una fine, ma io non posso saperlo" (Maurizio).

Interessante è questa posizione espressa da Maurizio: essa fa riferimento alla scrittura decimale di un numero irrazionale; l'allievo dichiara di non conoscere il numero di cifre decimali che appaiono in $\sqrt{26}$ (cifre che "probabilmente... hanno anche una fine") e ciò renderebbe operativamente impossibile elevare al quadrato un simile numero. L'allievo però non sa concludere il proprio ragionamento: si limita a prendere atto della difficoltà operativa nell'elevare al quadrato un numero come $\sqrt{26}$ scritto in forma decimale ed ipotizza che tale numero non sia razionale, ma ammette di non sapere "spiegare il perché" (si veda: Romero i Chesa & Azcarte Gimenes, 1994; Fischbein, Jehiam & Cohen, 1995).

4.4. Analisi delle interviste e conclusioni (test 2)

A parte qualche lieve differenza di carattere quantitativo, gli allievi della V classe presentano una situazione del tutto analoga a quella precedentemente evidenziata per gli allievi della III classe. In particolare, la giustificazione:

$$I_N \subset I_Q \subset I_R \quad \Rightarrow \quad \text{la cardinalità di } I_R \text{ è maggiore di quelle di } I_Q \text{ e di } I_N$$

è significativa: gli allievi (in percentuale assai rilevante, l'82 % degli allievi che hanno affermato che la cardinalità maggiore è quella di I_R ed il 41 % del totale) applicano ad insiemi infiniti considerazioni che potrebbero essere applicate soltanto ad insiemi finiti (la parte è maggiore del tutto!). Il fatto che un insieme infinito possa essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria (ovvero la stessa definizione di insieme infinito) non viene in alcun modo considerato.

Resta però la perplessità espressa da Aldo in modo eccezionalmente consapevole: "ma un infinito può essere maggiore di un altro infinito?" E il 23 % degli allievi opta per una risposta negativa, affermando quindi che un segmento della retta reale contiene tanti razionali (infiniti) quanti reali (infiniti).

Sebbene non sia direttamente ricollegabile agli insiemi densi e continui, la giustificazione:

$$\sqrt{26} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{13} \wedge \sqrt{2} \notin \mathbf{Q} \wedge \sqrt{26} \notin \mathbf{Q} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{26} \notin \mathbf{Q}$$

appare interessante: gli allievi che invocano tale giustificazione fanno risalire l'irrazionalità di $\sqrt{26}$ all'irrazionalità di $\sqrt{2}$ (che, per Dario, "è il primo irrazionale che si studia") e all'irrazionalità di $\sqrt{13}$; ma lo stesso Dario ammette che $\sqrt{13}$ è irrazionale in quanto 13 non è un quadrato: allora perché non giustificare direttamente in questo modo l'irrazionalità di $\sqrt{26}$? La citazione di $\sqrt{2}$, evidentemente, viene ad essere più rassicurante per l'allievo: il ricorso ad un irrazionale celebre, al "primo irrazionale che si studia" non può che dare alla risposta una maggiore credibilità (una tipica situazione che rientra nell'àmbito del *contratto didattico*: Brousseau, 1987).

5. CONCLUSIONI (I PARTE)

La presentazione del concetto di continuità della retta reale, nel curriculum tradizionale del *Liceo scientifico*, appare debole ed incompleta; soprattutto la differenza tra densità e continuità non sembra essere compresa dagli allievi. In particolare, dopo la presentazione delle sezioni di Dedekind (II classe, peraltro *mai* esplicitamente citate dagli allievi di III classe e di V classe), lo studio dell'analisi (V classe) non migliora sostanzialmente la situazione: i risultati ottenuti dagli allievi della V classe e le giustificazioni da essi esposte nelle interviste non differiscono in termini significativi dai risultati e dalle giustificazioni degli allievi della III.

Il tentativo di applicare direttamente alcune rappresentazioni grafiche alla comprensione della differenza tra insieme denso ed insieme continuo è destinato a fallire: R. Duval sottolinea che l'apprendimento mediante le rappresentazioni grafiche "esige un particolare lavoro" e "non è più possibile affidarsi per la loro utilizzazione all'interpretazione spontanea di figure e di immagini" (Duval, 1994). La "doppia natura", da un lato ideale, astratta e dall'altro reale, di molti oggetti matematici, secondo la teoria dei concetti figurali di E. Fischbein (Fischbein, 1993), non sembra avere particolare rilevanza nel caso attuale; le implicazioni didattiche collegate a tale doppia natura, come la provata utilità dei diversi registri di rappresentazione per l'apprendimento (Duval, 1993; Kaldrimidou, 1987; Vinner, 1992), devono essere valutate con prudenza, per non risultare inutili o fuorvianti (Bagni, 1997).

Una didattica specifica degli insiemi infiniti (con una rigorosa introduzione del concetto di insieme infinito come insieme che può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria) e dei cardinali transfiniti si rivela dunque indispensabile per un corretto apprendimento dei concetti di densità e di continuità e per la sistemazione teorica dei reali.

II PARTE: L'INTEGRALE E LA MISURA

6. L'INTEGRALE DI RIEMANN E L'INTEGRALE DI LEBESGUE

Un altro momento di buon interesse riguardante le concezioni della densità e della continuità è individuabile nell'introduzione dell'integrale. La stessa definizione dell'integrale e la precisazione delle funzioni Riemann-integrabili portano, come vedremo, gli allievi della scuola secondaria superiore (nel *Liceo scientifico* italiano, gli allievi della V classe) a riflettere sui concetti di insieme denso e di insieme continuo.

Fu Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) a segnalare con forza la necessità di precisare il concetto di integrale in modo moderno; egli mise a punto le condizioni di integrabilità con riferimento alle somme oggi dette somme superiori ed inferiori: l'integrale corrispondente, com'è noto, viene detto integrale secondo Riemann. La questione dell'integrabilità (secondo Riemann) ha una notevole importanza didattica. Com'è noto, infatti, in alcuni casi di discontinuità della funzione integranda, l'integrale di Riemann può non essere applicabile.

Ma l'introduzione della misura di Lebesgue non è il punto centrale del nostro studio. Il procedimento di integrazione secondo Lebesgue può infatti essere riferito alla misura di Lebesgue (e viene così a riguardare le funzioni Lebesgue-integrabili), ma anche alla tradizionale misura di Peano-Jordan di un segmento (secondo la quale la misura di [a; b] è $b-a$): in quest'ultimo caso il procedimento di integrazione riguarda le sole funzioni Riemann-integrabili e, come vedremo, coincide (nel risultato numerico e nel concetto, anche se non nei dettagli della procedura) con l'integrazione secondo Riemann ([4]).

7. METODOLOGIA DELLA RICERCA (II PARTE)

7.1. L'integrazione secondo Lebesgue e la misura di Peano-Jordan

L'introduzione dell'integrale secondo Lebesgue rappresentò, storicamente, una svolta radicale: non solo lo strumento "integrale" (e con esso il concetto di "funzione integrabile") perdeva la sua assoluta unicità; ma soprattutto veniva ad essere chiarito *il ruolo essenziale della misura nell'integrazione*. Il passaggio dall'integrale di Riemann all'integrale di Lebesgue non dipende infatti soltanto dal diverso modo di procedere per la sua definizione (la suddivisione dell'intervallo *immagine* dell'intervallo di integrazione), ma dipende essenzialmente dal passaggio dalla misura di Peano-Jordan alla misura di Lebesgue.

In altri termini: se applicassimo la tecnica suggerita da Lebesgue mantenendo il riferimento alla "vecchia" misura di Peano-Jordan, non supereremmo, sostanzialmente, il "vecchio" integrale di Riemann.

Abbiamo deciso di approfondire una questione metodologica a nostro avviso fondamentale: qual è la differenza (dal punto di vista didattico) tra l'introduzione dell'integrale secondo Riemann e dell'integrale secondo Lebesgue? E più in particolare: quale di questi procedimenti può essere più efficace nella didattica dell'analisi, con riferimento all'ultimo anno della scuola secondaria superiore?

7.2. La nostra ricerca

La nostra ricerca è stata dunque incentrata sulla seguente questione: la tradizionale introduzione dell'integrale secondo Riemann (ovvero mediante la suddivisione dell'intervallo di integrazione) può essere sostituita con qualche vantaggio dall'introduzione dell'integrale secondo Lebesgue (ovvero mediante la suddivisione dell'intervallo *immagine* dell'intervallo di integrazione), pur mantenendo il riferimento alla misura di Peano-Jordan?

Mediante il test 3 abbiamo voluto esaminare lo status del concetto di funzione integrabile (Riemann-integrabile) in una classe nella quale era stato introdotto in modo tradizionale l'integrale secondo Riemann. Abbiamo poi ripetuto il test in una classe nella quale era stato introdotto l'integrale secondo Lebesgue (ma con il solo riferimento alla misura di Peano-Jordan: test 4).

L'analisi del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando:

• una V classe del *Liceo scientifico*, a Treviso (allievi di 18-19 anni), per un totale di 25 allievi, nella quale al momento del test 3 erano già stati introdotti il concetto di limite, di funzione continua, di derivata e di integrale secondo Riemann. Era stata introdotta la funzione caratteristica di un insieme. Non era stata proposta l'integrazione secondo Lebesgue.

• una V classe del *Liceo scientifico*, a Treviso (allievi di 18-19 anni), per un totale di 24 allievi; nella quale, al momento del test 4 era già stato introdotto il concetto di limite, di funzione continua, di derivata e di integrale con il procedimento di Lebesgue, ma con riferimento alla misura di Peano-Jordan. Era stata introdotta la funzione caratteristica di un insieme.

____

([4]) Sull'opera di Riemann: Laugwitz, 1995 e: Bottazzini, 1981. Inoltre: Boyer, 1968 e 1969; Kline, 1972; Anglin, 1994; Edwards, 1994; Pier, 1994. Sulla misura e sull'integrale di Lebesgue: Rudin, 1966.

Agli allievi di entrambe le classi sopra presentate è stato sottoposto il seguente test (tempo: 20 minuti; non è stato concesso l'uso di libri di testo o di calcolatrici):

Test 3 e test 4

Dire se le seguenti funzioni $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ sono integrabili in [0; 2]:

(a) $x \to x^2+3x+2$ (b) $\chi_{[0;1[} + 2\chi_{[1;2]}$ (c) $\chi_{[0;1]} + 2\chi_{[1;2]}$ (d) $\chi_{[0;2]}\chi_{\mathbf{Q}}$

Osserviamo che le precedenti funzioni sono state presentate usando scritture di natura diversa; gli allievi, tuttavia, conoscevano entrambe le scritture e le avevano utilizzate spesso nella pratica; ciò rende pertanto confrontabili le funzioni così proposte.

8. IL TEST 3 (V *LICEO SCIENTIFICO*)

8.1. Risultati del test 3

I risultati del test 3 sono presentati nella tabella seguente:

	Integrabile		Non integrabile		Nessuna risposta	
(a)	24	96 %	0	0 %	1	4 %
(b)	15	60 %	4	16 %	6	24 %
(c)	13	52 %	7	28 %	5	20 %
(d)	10	40 %	8	32 %	7	28 %

8.2. Prime considerazioni sui risultati del test 3

Osserviamo che l'integrabilità della funzione polinomiale (a) è affermata dalla quasi totalità degli allievi. Le difficoltà sono più rilevanti nei casi delle funzioni (b) e (c) che presentano una discontinuità (in $x = 1$) interna all'intervallo di integrazione [0; 2].

Assai più deludente appare invece la situazione per quanto riguarda la funzione (d): solo il 32 % degli allievi riconosce che tale funzione non è Riemann-integrabile in [0; 2]. Ben il 40 % reputa erroneamente integrabile tale funzione ed il 28 % non fornisce alcuna risposta.

8.3. Motivazioni espresse dagli allievi (test 3)

Gli allievi sono stati invitati a riflettere sulle risposte date ed a giustificarle.

Una notevole parte degli allievi che hanno reputato non integrabili le funzioni (b) e (c) (rispettivamente 3 allievi su 4 e 4 su 7) hanno collegato tale affermazione alla presenza di una discontinuità all'interno dell'intervallo di integrazione ([5]).

Interessante è la giustificazione seguente (l'allievo ha affermato l'integrabilità della funzione (b), ma ha negato l'integrabilità della funzione (c)):

"La funzione (c) vale 1 da 0 a 1 (escluso), vale 3 nel punto 1 e vale 2 da 1 (escluso) a 2. Mi è sembrato strano ammettere che una funzione di questo genere fosse integrabile: avrebbe avuto lo stesso integrale della precedente (c) pur avendo il punto per $x = 1$ più alto. Adesso capisco di essermi sbagliato: sotto al solo punto (1; 3) della (c) non può essere compresa una superficie vera e propria e l'integrale quindi non cambia rispetto alla funzione (b)" (Marco).

Riprenderemo questa importante considerazione confrontando i risultati dei test 3 e 4.

Per quanto riguarda la funzione (d), la grande maggioranza degli allievi (8 su 10) che ne hanno affermato l'integrabilità ha affermato che l'area sottesa dal suo grafico non è numericamente diversa dall'area del rettangolo di base [0: 2] e di altezza 1. Ad esempio:

"Tra due numeri qualsiasi stanno infiniti razionali. Dunque ho pensato che la parte di piano sotto il grafico della funzione (d) fosse tutto il rettangolo, costituito da un numero infinito di colonnine infinitamente vicine" (Andrea).

____

([5]) Ad esempio: "Una funzione continua può essere integrata, queste funzioni non sono continue in 1, dunque non possono essere integrate" (Umberto).Si tratta di un (non rarissimo) errore logico: una condizione sufficiente viene interpretata come una condizione necessaria.

Ancora una volta, dunque, *la differenza tra denso e continuo appare ben poco chiara nelle concezioni degli allievi*.

Tra gli allievi che hanno riconosciuto come non integrabile la funzione (d), pochi sono stati in grado di motivare la propria scelta; ricordiamo la giustificazione seguente:

"La funzione (d) non delimita una superficie con l'area calcolabile perché il suo grafico non è un segmento intero, ma soltanto un fitto susseguirsi di punti" (Sergio).

Merita infine di essere citata l'osservazione... sconsolata di un'allieva, che conferma la difficoltà nell'affrontare la questione dell'integrabilità di una funzione, legata alla possibilità di eseguire un procedimento (la suddivisione dell'intervallo di integrazione e la considerazione delle somme superiori ed inferiori, le quali devono tendere ad uno stesso valore) e non ad una definizione immediatamente applicabile, come ad esempio la tradizionale definizione didattica di funzione continua:

"Ho avuto problemi con l'integrabilità. Dire se una funzione è continua e se una funzione è derivabile è più facile: ci sono delle regole chiare, basta calcolare dei limiti, ci sono poche eccezioni facili da ricordare, come i punti angolosi. Per l'integrabilità invece non so mai che cosa devo guardare..." (Francesca).

8.4. Analisi delle interviste e conclusioni (test 3)

La valutazione dell'integrabilità (secondo Riemann) di una funzione è un problema delicato per gli allievi della scuola secondaria superiore (certamente più difficoltoso della valutazione della continuità e della derivabilità). Gli allievi spesso cercano una regola semplice, immediatamente applicabile negli esercizi pratici ed alcuni di loro finiscono per identificare l'integrabilità con la continuità, tramutando così in condizione necessaria una condizione soltanto sufficiente.

Ancora una volta la differenza tra denso e continuo non appare ben compresa da una significativa parte degli allievi, nonostante essi abbiano ormai alle spalle alcuni mesi di studio dell'analisi matematica (limiti, continuità, derivate). Il problema dell'integrabilità (secondo Riemann) della funzione di Dirichlet (d) conferma che la differenza tra gli insiemi di numeri reali $\{x \in \mathbf{Q}: 0 \leq x \leq 2\}$ (denso e non misurabile con la misura di Peano-Jordan) e $\{x \in \mathbf{R}: 0 \leq x \leq 2\}$ (continuo, misurabile con la misura di Peano-Jordan) è avvertita da pochi allievi.

Con il test seguente potremo verificare che l'impostazione dell'integrale secondo lo schema di Lebesgue (mantenendo il riferimento alla misura di Peano-Jordan, dunque considerando sempre le funzioni Riemann-integrabili) migliora la comprensione dell'integrabilità di alcune funzioni, mentre non porta sostanziali vantaggi per altre.

9. IL TEST 4 (V *LICEO SCIENTIFICO*)

9.1. Risultati del test 4

I risultati del test 4 sono presentati nella tabella seguente:

	Integrabile		Non integrabile		Nessuna risposta	
(a)	22	92 %	1	4 %	1	4 %
(b)	20	83 %	3	13 %	1	4 %
(c)	18	75 %	2	8 %	4	17 %
(d)	7	29 %	9	37 %	8	33 %

9.2. Prime considerazioni sui risultati (test 4)

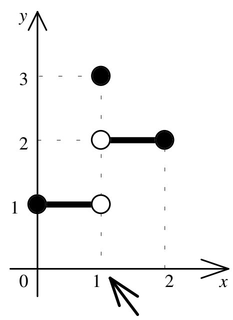
Come nel caso del test 3, osserviamo che l'integrabilità della funzione polinomiale (a) è compresa dalla quasi totalità degli allievi.

La situazione per quanto riguarda le funzioni (b) e (c) (che presentano una discontinuità interna all'intervallo di integrazione) appare migliorata rispetto al precedente test 3: le risposte corrette sono passate dal 60 % all'83 % (b) e dal 52 % al 75 % (c).

Ancora piuttosto deludente appare invece la situazione per quanto riguarda la funzione (d): solo il 37 % degli allievi riconosce che tale funzione non è Riemann-integrabile in [0; 2] e tale risultato migliora di poco il 32 % del test 3. Il 29 % reputa erroneamente integrabile tale funzione (era il 40 % nel test 3) ed aumenta la percentuale degli indecisi: il 33 % non dà alcuna risposta (era il 28 % nel test 3).

9.3. Motivazioni espresse dagli allievi (test 4)

Tra gli allievi che hanno reputato non integrabili le funzioni (b) e (c) alcuni hanno fatto riferimento alle discontinuità; presentiamo quanto afferma Stefano, che schizza il grafico sotto riportato (corrispondente al corretto diagramma cartesiano della funzione (c)):



"Avevo pensato che le discontinuità delle funzioni (b) e (c) mi dessero dei problemi nell'integrare, ma ho proprio sbagliato. Ad esempio, la funzione (c) ha il grafico che può essere pensato diviso in tre parti, con le immagini 1, 2, 3. La parte con immagine 1 viene dall'intervallo [0; 1[, che misura 1; la parte con immagine 2 viene dall'intervallo]1; 2], che misura 2; la parte con immagine 3 viene dal solo punto $x = 1$, che ha la misura nulla, perché è: 1 −1. L'area dunque si può calcolare senza problemi, sommando le tre parti; ottengo: $1\cdot1+2\cdot1+3\cdot0$, cioè 3" (Stefano).

Per quanto riguarda l'integrabilità della funzione (d), molti allievi che non negano la sua integrabilità (9 su 15) manifestano esplicitamente incertezze sulla misurabilità (con la misura di Peano-Jordan) di $\{x\in\mathbf{R}: 0\le x\le 2 \wedge x\in\mathbf{Q}\}$:

"All'ordinata 1 si arriva dai numeri razionali comp resi tra 0 e 2. La loro misura è $2-0 = 2$, dunque l'area è $2\cdot1 = 2$" (Tullio).

Denso e continuo, dunque, vengono nuovamente identificati.

Tra gli allievi che negano l'integrabilità della funzione (d) una giusti ficazione interessante è:

"Non ho una superficie da misurare perché è sempre intervallata da striscioline che dovrei escludere. Del resto i numeri razionali e gli irrazionali sono mischiati tra di loro e non possono essere divisi. Per cui credo che l'area non possa essere calcolata e quindi che la funzione (d) non possa essere integrata" (Antonella).

9.4. Analisi delle interviste e conclusioni (test 4)

L'introduzione dell'integrale secondo il procedimento di Lebesgue (ma con riferimento alla misura di Peano-Jordan) sembra dunque migliorare la comprensione della nozione di funzione Riemann-integrabile (6). I dati statistici sopra presentati per le funzioni (b) e (c) sono chiari e la giustificazione di Stefano (che fa esplicitamente riferimento alla misura dell'insieme delle controimmagini di $y = 3$) appare più convincente e consapevole di quella fornita da Marco (riferita genericamente all'assenza di una "superficie vera e propria" in corrispondenza dell'ascissa $x = 1$).

____

(6) La relativamente piccola differenza tra i risultati dei test 3 e 4 non sembra sufficiente a privilegiare l'integrale secondo Lebesgue. Si noti inoltre che le funzioni (b), (c), (d) assumono soltanto alcuni valori distinti, dunque l'integrabilità secondo Lebesgue viene ad essere semplice da essere rilevata. In casi diversi questo vantaggio potrebbe non presentarsi.

Per quanto riguarda la funzione di Dirichlet, invece, la situazione non è significativamente migliorata rispetto al test 3. I dubbi sulla distinzione tra densità e continuità restano e dunque la mancanza di una specifica didattica dell'infinito e dei cardinali transfiniti impedisce agli allievi di inquadrare chiaramente alcune funzioni Riemann-integrabili.

10. CONCLUSIONI (II PARTE)

> "Devo pagare una certa somma; mi frugo nelle tasche e ne estraggo monete e biglietti di diverso valore. Li verso al mio creditore nell'ordine in cui mi si presentano fino a raggiungere il totale del mio debito. È l'integrale di Riemann. Ma posso operare anche altrimenti. Avendo tratto tutto il mio denaro dalla tasca, riunisco insieme biglietti e monete che hanno lo stesso valore ed effettuo il pagamento versando insieme pezzi dello stesso valore. È il mio integrale".
>
> Henri Lebesgue

A nostro avviso un ruolo didattico per l'integrazione secondo Lebesgue non solo non è improponibile, ma risulta addirittura auspicabile. L'introduzione tradizionale dell'integrale secondo Riemann (ovvero mediante la suddivisione dell'intervallo di integrazione) può essere, infatti, proficuamente sostituita dall'introduzione dell'integrale secondo Lebesgue (ovvero mediante la suddivisione dell'intervallo *immagine* dell'intervallo di integrazione). Tale opzione non appare concettualmente difficoltosa e può essere messa in atto mantenendo il consueto riferimento alla misura di Peano-Jordan, ovvero senza obbligatoriamente introdurre la misura di Lebesgue ([7]).

Concettualmente, dunque, l'allievo inizierebbe a distinguere il ruolo dell'integrale da quello della misura; egli potrebbe dunque rendersi conto che la potenza dello strumento "integrale" (strumento che, come già sopra rilevato, non varia passando dall'integrazione eseguita tecnicamente secondo Riemann a quella secondo Lebesgue) dipende essenzialmente dal tipo di misura impiegata ([8]).

Le considerazioni precedenti, tuttavia, *assumerebbero rilievo ben maggiore se la scelta suggerita fosse abbinata ad una didattica specifica dell'infinito e dei cardinali transfiniti*. Infatti alcuni esempi di funzioni non Riemann-integrabili (che assumono valori non nulli soltanto su insiemi non misurabili con la misura di Peano-Jordan) coinvolgono direttamente questioni connesse ai concetti di densità e di continuità. Le incertezze su tali argomenti, quindi, si ripercuotono nettamente sulla comprensione da parte degli allievi del concetto di funzione Riemann-integrabile.

CONCLUSIONI GENERALI

Il tradizionale curriculum matematico della scuola secondaria superiore, e ci riferiamo in particolare quello del *Liceo scientifico* italiano, appare suscettibile di alcuni significativi miglioramenti.

La mancanza di una didattica specifica della problematica connessa al concetto di infinito (ed in particolare dei cardinali transfiniti) toglie incisività e chiarezza ad alcuni argomenti di notevole importanza, tra i quali la concezione della continuità dell'insieme dei numeri reali. Alcuni tentativi ingenui di visualizzare insiemi densi ed insiemi continui appaiono inefficaci ed addirittura fuorvianti in assenza di un'attenta introduzione didattica dei corrispondenti concetti: pensiamo all'osservazione di Andrea, riportata in 8.3, e non possiamo non citare ancora R. Duval, secondo il quale "non è più possibile affidarsi... all'interpretazione spontanea di figure e di immagini" (Duval, 1994).

____

([7]) L'introduzione della misura di Lebesgue, come possibile secondo passo, permetterebbe l'analisi di alcune funzioni non integrabili secondo Riemann.

([8]) Sulla teoria della misura indichiamo gli impegnativi lavori: Halmos, 1994; Doob, 1994.

L'assenza di una corretta trattazione dell'infinito e dei cardi nali transfiniti rende inoltre difficoltoso l'inserimento nel curriculum di una più moderna, completa ed efficace introduzione del concetto di integrale. Abbiamo potuto constatare che l'impostazione dell'integrazione secondo Lebesgue (seppure riferito alla misura di Peano-Jordan), basata sulla suddivisione in intervalli dell'immagine dell'intervallo di integrazione, consente un più efficace approccio degli allievi alla nozione di funzione Riemann-integrabile; essa richiede però una buona, sicura conoscenza dei concetti di densità e di continuità. Carenze didattiche a tale riguardo finiscono quindi per limitare pesantemente (o addirittura per escludere) una concreta possibilità di miglioramento della didattica del concetto di integrale.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Anglin, W.S. (1994), *Mathematics. A concise history and philosophy*, Springer, Berlin.

Bagni, G.T. (1997), La visualizzazione nella scuola secondaria superiore: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20B, 4, 309-335.

Bottazzini, U. (1981), *Il calcolo sublime*, Boringhieri, Torino.

Boyer, C.B. (1968), *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, Inc.

Boyer, C. (1969), The History of the Calculus: Hallerberg et. al. (1969), *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, National Council of Teachers of Mathematics, Washington.

Brousseau, G. (1987), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques: *Études en didactique des Mathématiques*, Université de Bordeaux I, IREM de Bordeaux.

Cornu, B. (1980), Interference des modeles spontanes dans l'apprentissage de la notion de limite: *Cahier du Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique*, 8, 57-83.

Cornu, B. (1981), Grandes lignes de l'evolution historique de la notion de limite: *Cahier du Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique*, 26, 305-326.

D'Amore, B. (1996), L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi, Opening Relation to Topic Group XIV, *Infinite processes throughout the curriculum*, 8th ICME, Sevilla, 14-21 July 1996 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 322-335).

D'Amore, B. (1997), Bibliografia in progress sul tema: "l'infinito in didattica della matematica": *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-305.

Davis, P. & Vinner, S. (1986), The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages: *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.

Dimarakis, I. (1996), *The Limit Concept: Difficulties-Obstacles of Pupils' Understanding*, unpublished MA dissertation, Roehampton Institute, Surrey University.

Dimarakis, I. & Gagatsis, A. (1996), The limit concept; Difficulties-obstacles of Pupils' Understanding: Gagatsis, A. & Rogers, L., *Didactics and History of Mathematics*, Erasmus, Thessaloniki.

Doob, J.L. (1994), *Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlin.

Duval, R. (1983), L'ostacle du dedoublement des objects mathématiques: *Educational Studies in Mathematics*, 14, 385-414.

Duval, R. (1993), Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.

Duval, R. (1994), Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage: *Actes de la 46me Rencountre Internat. de la CIEAEM*, preprint.

Edwards, C.H. Jr. (1994), *The historical development of the Calculus*, Springer, Berlin.

Fischbein, E. (1993), The theory of figural concepts: *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.

Fischbein, E.; Jehiam, R. & Cohen, D. (1995), The concept of irrational number in pupils of High School and in future teachers: *Educational Studies in Mathematics*, 29, 29-44.

Furinghetti, F. & Paola, D. (1987), *Wrong beliefs and misunderstanding about basic concepts of Calculus*: presented at the 39th meeting of CIEAEM, Sherbrooke, Canada.

Furinghetti, F. (1993), Insegnare matematica in una prospettiva storica: *L'educazione matematica*, III, IV, 123-134.

Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997), Storia della matematica in classe, *L'educazione matematica*, XVIII, V, 2, 1.

Gimenez, J. (1990), About intuitional knowledge of density in elementary school: *Proceedings Fourteenth PME Conference*, III, Mexico, 19-26.

Grugnetti, L. (1992), L'histoire des mathématiques: une expérience interdisciplinaire fondée sur l'histoire des mathématiques: *Plot*, 60, 17-21.

Halmos, P.R. (1994), *Measure theory*, Springer, Berlin.

Kaldrimidou, M. (1987), *Images mentales et représentations en mathématiques chez les mathématiciens et les étudiants en mathématiques*, Thèse 3éme cycle, Université Paris 7.

Kline, M. (1972), *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York.

Laugwitz, B. (1995), *Bernhard Riemann 1826-1866, Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik*, Birkhäuser, Basel.

Mamona, J. (1987), *Pupils' Interpretations of Some Concepts of Mathematical Analysis*, unpublished Ph. D. thesis, University of Southampton.

Mamona-Downs, J. (1990), Calculus-Analysis: A review of recent educational research: *II Simposio Internacional Investigacion en Educacion Matematica*, 11-36, Cuernavaca, Mexico.

Monaghan, J. (1991), Problems with the language of Limits: *For the Learning of Mathematics*, 11, 3, 20-24.

Orton, A. (1983), Pupils' Understanding of Differentiation: *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.

Pier, J.-P. (1994), *Development of Mathematics 1900-1950*, Birkhäuser, Basel.

Romero i Chesa, C. & Azcarate Gimenes, C. (1994), An inquiry into the concept images of the continuum. Trying a research tool: *XVIII PME*, 185-192, Lisboa.

Rudin, W. (1966), *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York.

Schwarzenberger, R. (1980), Why Calculus cannot be made easy: *Mathematical Gazette*, 64, 158-166.

Sierpinska, A. (1987), Humanities Pupils and Epistemological Obstacles related to limits: Educational Studies in Mathematics, 18, 371-397.

Tall, F. (1980), The notion of infinity mesauring number and its relevance in the intuition of the infinity: *Educational Studies in Mathematics*, 11, 271-284.

Tall, D. & Vinner, S. (1981), Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity: *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.

Tall, D. (1985), Understanding the Calculus: *Mathematical Teaching*, 110, 49-53.

Tall, D. (1990), Inconsistencies in the learning of Calculus and Analysis*: Focus on Learning Problems in Mahematics*, 12, 49-64.

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1992), Pupils' awarenes s of inconsistent ideas about actual infinity: *PME XVI*, 90-97, Durham (NH).

Vinner, S. (1992), Function concept as prototype for problems in mathematics: Harel, G. & Dubinsky, E. (eds.), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, 195-213.

Waldegg, G. (1993), La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction: *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 5, 19-36.

INFINITE SETS OF REAL NUMBERS

Students' conceptions before and after the study of the Calculus and the introduction of real numbers in classroom practice

GIORGIO TOMASO BAGNI *
NUCLEO DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA, BOLOGNA

1. INTRODUCTION

> "Quantities AB, CD, for example, are incommensurable because of a part FD lower than every given quantity; as a matter of fact, if we consider AE submultiple of AB and small as we want, an if we subtract it from CD all the times it is possible, we have the remaining part FD, that caused incommensurability; and it happens whatever AE is chosen: so FD is lower than every given quantity".
>
> Girolamo Saladini, 1761

In this paper we want to analyse the role and the importance of the concepts of discrete set, dense set and connected set in the didactics of mathematics (High School, pupils aged 16-19 years): in the first part of our work, the idea of connected set, referred to the set of the real numbers, is investigated; in the second part, the concept of integral is investigated, with reference to dense and connected sets.

Many Authors have written about these concepts, in Antiquity too (let us quote, for instance, Aristotle and S. Boethius) ([1]), and important researches were devoted to pupils' approach to infinity. For example, pupils' notions of infinity were often referred to two different outlinings: *measuring* and *counting* (Tall, 1980; about consistency in pupils' answers, see: Tsamir & Tirosh, 1992).

The analysis of pupils' conceptions of connected set was applied to every school-level (for example, about Primary School, see: Gimenez, 1990); "conceptual images" linked to connected sets were studied (pupils aged 16-17 years; see: Romero i Chesa & Azcarte Gimenes, 1994). The comparison among infinite sets was examined by Waldegg (1993) and difficulties about it were underlined by R. Duval (for example, Duval noted that an obstacle for the correspondence between the set of positive integers and the set of square integers is a "sliding", *glissement*, from *having* to *being*: "chaque entier a un carré - tous les entiers ne sont pas des carrés d'entiers": Duval, 1983, 403) ([2]).

PART 1: RATIONAL NUMBERS AND REAL NUMBERS

2. METHODS OF OUR RESEARCH (1st PART)

In our work, the analysis of pupils' behaviour was based upon:

• A 3rd class of *Liceo scientifico* (pupils aged 16-17 years), in Treviso, Italy, total 26 pupils (test 1); they knew the concepts of set and of cardinality of a finite set (the number of elements of the set); real numbers were presented in the previous 2nd class by Dedekind sections. A specific preparation of infinite sets (definition of infinite set, cardinal numbers) was not assumed (according to the current traditional curriculum).

(*) In this paper translations are ours.

([1]) In our opinion, the History of Mathematics (and of Logics) is really fundamental in educational research; let us quote: Grugnetti (1992), Furinghetti (1993), Furinghetti & Somaglia (1997).

([2]) See moreover: Fischbein; Jehiam & Cohen, 1995, in which some difficulties about irrational numbers are studied, and: Tsamir & Tirosh, 1992, with some important notes about actual infinity. About epistemological obstacles related to limits, see: Sierpinska, 1987. About didactics of Analysis, see moreover: Schwarzenberger, 1980; Cornu, 1980 and 1981; Tall & Vinner, 1981; Orton, 1983; Tall, 1985; Davis & Vinner, 1986; Furinghetti & Paola, 1987; Mamona, 1987; Tall, 1990; Mamona-Downs, 1990; Monaghan, 1991; Dimarakis, 1996; Dimarakis & Gagatsis, 1996.

• A 5th class of *Liceo scientifico* (pupils aged 18-19 years), in Treviso, Italy, total 22 pupils (test 2); they knew the concepts of limit and of continuous function. They knew the concepts of set and of cardinality of a finite set (as the number of elements of the considered set); a specific preparation of infinite sets (definition of infinite set, cardinal numbers) was not assumed.

With the results of tests 1 and 2 (placed *before* and *after* the introduction of the main concepts of Calculus) we wanted to estimate the role of the introduction of Calculus referred to the learning of the concepts of dense and connected set.

Pupils of both classes were asked to answer the questions of the following test (time: 30 minutes; no textbooks or calculators were allowed):

Test 1 and test 2

1) Indicate the number of the elements (the cardinality) of the set:

$I_N = \{x \in \mathbf{N}: 3 \leq x \leq 10\}$

2) Say if it is true or false that there is (at least) a rational number between the following pairs of rational numbers:

(a) $\frac{19}{29}$, $\frac{11}{16}$

(b) 2,610497, 2,310518

(c) $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ $a \in \mathbf{N} \backslash \{0\}$, $b \in \mathbf{N} \backslash \{0\}$, $c \in \mathbf{N} \backslash \{0\}$, $d \in \mathbf{N} \backslash \{0\}$, $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$

3) Indicate the number of the elements (the cardinality) of the set:

$I_Q = \{x \in \mathbf{Q}: 3 \leq x \leq 10\}$

4) Does the element $\sqrt{26}$ belong to the set I_Q? Why?

5) Indicate the number of the elements (the cardinality) of the set:

$I_R = \{x \in \mathbf{R}: 3 \leq x \leq 10\}$

6) Referring to the sets I_N, I_Q, I_R, above given, what is the set having the highest number of elements (the highest cardinality)?

3. TEST 1 (3rd CLASS OF *LICEO SCIENTIFICO*)

3.1. Results of test 1

Results of test 1 are given in the following table:

1)	Answer: 8		pupils: 26	100%
2)	a)	Yes	pupils: 21	81%
		No	pupils: 4	15%
		No answer	pupils: 1	4%
	b)	Yes	pupils: 25	96%
		No	pupils: 1	4%
		No answer	pupils: 0	0%
	c)	Yes	pupils: 22	85%
		No	pupils: 0	0%
		No answer	pupils: 4	15%
3)	Answer: infinite		pupils: 19	73%
	Answer: ‘many (not infinite)”		pupils: 1	4%
	No answer		pupils: 6	23%
4)	Yes		pupils: 9	34%
	No		pupils: 15	58%
	No answer		pupils: 2	8%
5)	Answer: infinite		pupils: 22	85%

	Answer: 8	pupils: 4	15%
6)	Answer: I_R:	pupils: 11	42%
	Answer: I_R and I_Q:	pupils: 12	46%
	Answer: I_Q:	pupils: 2	8%
	No answer:	pupils: 1	4%

3.2. Test 1: early remarks

All the pupils of 3rd class learnt the main terms and symbols: all the pupils (100%) correctly give the first answer.

The density of **Q** seems to be understood by many pupils (2nd question). The infinitude of **Q** (3rd question, 73%) and of **R** (5th question, 85%) seem to be correctly understood by the greater part of the pupils. Of course it is necessary to examine closely the pupils' answers by means of some interviews.

Difficulties arose about irrationality (4th question): only 58% of the pupils stated that $\sqrt{26} \notin$ **Q**: the following interviews will help us to analyse many answers. Further difficulties arose from answers to the 6th question (3): to interpret such answers, let us consider the justifications given by the pupils.

3.3. Justifications given by pupils (test 1)

Pupils of the 3rd class justified their answers in some interviews. Let us see justifications about answers to the 6th question.

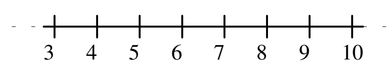
The greater part (7 out of 11) of the pupils that stated that the set I_R has the highest cardinality refers, in several ways, to:

$I_N \subset I_Q \subset I_R \quad \Rightarrow$ the cardinality of I_R is higher than the cardinality of I_Q and of I_N

"The set I_R has the highest cardinality because the other sets are (proper) subsets of I_R" (Dara).

Pupils that stated that I_R and I_Q have the highest cardinality stated that (all) infinite sets have the same cardinality. For example, the following answer is interesting:

"I_N regards only integer points:



and I_Q regards only fractions; I_R regards all the spaces between the fractions. But the sets I_Q and I_R are infinite, so their numbers of elements cannot be different. Moreover by rational from 3 to 10 I can cover all the segment, because I can draw a point as close to any other as I want" (Marco).

3.4. Analysis of justifications given by pupils and conclusions about test 1

About the misconceptions related to dense and connected sets, and about infinite sets, there are two equivalent groups:

- some pupils, as seen above, believed that:

$I_N \subset I_Q \subset I_R \quad \Rightarrow$ the cardinality of I_R is higher than the cardinality of I_Q and of I_N

so they applied to infinite sets concepts that would be applied only to finite sets (see: Tall, 1980; D'Amore, 1996 and 1997). This is an important misconception: they did not consider that an infinite set can be put in a one-to-one correspondence with its proper part (it is the definition of infinite set).

---

(3) Of course, these results are to be expected, because the notion of cardinality was not treated: *our aim was to underline the absence of a correct introduction of infinity*.

• other pupils considered that it is impossible to compare two infinite sets and they stated that a segment contains as many rationals as reals (infinite).

Marco's answer is very interesting, because it explicitly underlines the eventual graphic aspect of the matter (Duval, 1993). So some pupils would lead the concepts of dense set and connected set to graphic considerations, probably because of the frequent use of visual methods in the didactics of mathematics in High School (Bagni, 1997); but the difference between a discrete set and a connected set is clear, from the graphic point of view (Marco *drew* the set I_N); that is not true for the difference between a dense set and a connected set (Marco *imagined*, *described* a picture of I_Q and of I_R, but did *not* realize it: in fact it is impossible to do it!). The graphic approach, now, is inefficacious and can be dangerous.

4. TEST 2 (5^{th} CLASS OF *LICEO SCIENTIFICO*)

4.1. Results of test 2

Results of test 2 are given in the following table:

1)	Answer: 8		pupils: 22	100%
2)	a)	Yes	pupils: 22	100%
	b)	Yes	pupils: 22	100%
	c)	Yes	pupils: 22	100%
3)	Answer: infinite		pupils: 21	95%
	No answer		pupils: 1	5%
4)	Yes		pupils: 5	23%
	No		pupils: 16	72%
	No answer		pupils: 1	5%
5)	Answer: infinite		pupils: 22	100%
6)	Answer: I_R:		pupils: 11	50%
	Answer: I_R and I_Q:		pupils: 5	23%
	Answer: I_R, I_Q and I_N:		pupils: 2	9%
	No answer:		pupils: 4	18%

4.2. Test 2: early remarks

As in the 3^{rd} class, the pupils had learnt the main terms and symbols: all the pupils (100%) correctly give the first answer.

Density of **Q** seems to be understood by many pupils (2^{nd} question). The infinity of **Q** (3^{rd} question, 95%) and of **R** (5^{th} question, 100%) seems to be correctly understood. Of course, it is necessary to examine closely the pupils' answers by means of some interviews.

As in the 3^{rd} class, difficulties arose with regards to irrational numbers (4^{th} question): only 72% of the pupils stated that $\sqrt{26} \notin \mathbf{Q}$. Several pupils showed difficulties in the answers to the 6^{th} question: to interpret such answers, let us consider the justifications given by the pupils.

4.3. Justifications given by pupils (test 2)

Pupils of 5^{th} class justified their answers in some interviews. Let us see justifications about answers to 6^{th} question.

As it happened in 3^{rd} class, the greater part (9 out of 11) of the pupils that stated that the I_R has the highest cardinality, refers in several ways, to:

$I_N \subset I_Q \subset I_R \quad \Rightarrow$ the cardinality of I_R is higher than the cardinality of I_Q and of I_N

The following justification is very interesting:

'The cardinality of I_N is clearly lower than the cardinality of I_Q and than the cardinality of I_R because I_N is finite and I_Q and I_R are infinite. I don't know if the infinity of I_R is greater than the infinity of I_Q: at first sight, elements of I_R seem in greater number than elements of I_Q, but can an infinity be greater than another infinity?" (Aldo).

As in 3rd class, the 5 pupils (23%) that stated that I_R and I_Q have the highest cardinality stated that (all) infinite sets have the same cardinality (the same number of elements). The two pupils that stated that I_N, I_Q and I_R have the highest cardinality gave the following justification:

"I made a mistake because I thought if **N**, **Q**, **R** and not of I_N, I_Q, I_R, so I wrote that the number of their elements is always the same, because they (all of them) are infinite sets" (Anna).

So once more all infinite sets are considered having the same cardinality (the same number of elements).

About other answers, 8 pupils out of 16 that stated that $\sqrt{26} \notin \mathbf{Q}$ gave, in several ways, the following justification:

$$\sqrt{26} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{13} \wedge \sqrt{2} \notin \mathbf{Q} \wedge \sqrt{26} \notin \mathbf{Q} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{26} \notin \mathbf{Q}$$

For example:

"To show that $\sqrt{26}$ is irrational, I thought of $\sqrt{2}$ and of $\sqrt{13}$, because $\sqrt{2}$ is clearly irrational, it is the first irrational number I studied, and $\sqrt{13}$ is irrational because 13 is not a square" (Dario).

The following answer is interesting:

"In my opinion, $\sqrt{26}$ is not rational, but I do not know the reason. I think that it is not possible to square a number when I do not know the number of its decimal figures. Probably the sequence of such figures will stop, but I cannot know it" (Maurizio).

Maurizio's answer is really interesting: it refers to the decimal writing of an irrational number; he stated he did not know the number of decimal figures of $\sqrt{26}$ (whose sequence "probably... will stop") and this would make it impossible to square that number in practice. But he did not come to a correct conclusion: he underlined that it is difficult to square a number like $\sqrt{26}$, written in decimal way, and he guessed about its irrationality, but he admited he did not know "the reason" (see: Romero i Chesa & Azcarte Gimenes, 1994; Fischbein, Jehiam & Cohen, 1995).

4.4. Analysis of justifications given by pupils and conclusions about test 2

Apart from some quantitative differences, the situation of the pupils of the 5th class is similar to the situation of the pupils of the 3rd class. In particular, the justification:

$$I_N \subset I_Q \subset I_R \quad \Rightarrow \quad \text{the cardinality of } I_R \text{ is higher than the cardinality of } I_Q \text{ and of } I_N$$

is important: many pupils (82% of the pupils that stated that I_R has the highest cardinality, 41% of all the pupils) applied to infinite sets concepts that would be applied only to finite sets (the whole is greater than the part). As in the 3rd class, they did not consider that an infinite set can be put in a one-to-one correspondence with its proper part (definition of infinite set).

Aldo's remark is really important: "but can an infinity be greater than another infinity?" 23% of the pupils gave a negative answer; so they stated that a segment contains as many rational points (infinite) as real points (infinite).

Although it is not related to dense and connected set, the justification:

$$\sqrt{26} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{13} \wedge \sqrt{2} \notin \mathbf{Q} \wedge \sqrt{26} \notin \mathbf{Q} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{26} \notin \mathbf{Q}$$

is very interesting: several pupils stated that $\sqrt{26}$ is irrational because $\sqrt{2}$ is irrational (in Dario's words, it is "the first irrational number I studied") and because $\sqrt{13}$ is irrational; but Dario himself admited that $\sqrt{13}$ is irrational because 13 is not a square: why did he refuse to justify by that the irrationality of $\sqrt{26}$? Clearly $\sqrt{2}$ is reassuring: it is a well known irrational number, "the first irrational number I studied" so it makes the answer credible... (this can be related to the *didactical contract*: Brousseau, 1987).

5. CONCLUSIONS (1st PART)

The introduction of the concepts of dense set and of connected set in the traditional mathematical curriculum of the Italian *Liceo scientifico* is incomplete; the difference between dense and connected sets is not understood by many pupils. After the study of Dedekind's sections (in the 2nd class, but *never* remembered by pupils of the 3rd and of the 5th class), the study of Calculus does not improve the situation: results and justifications of pupils of the 5th class are similar to results and justifications of pupils of the 3rd class.

The difference between dense sets and connected sets cannot be correctly visualised: R. Duval underlines that learning by graphic representations "needs a particular work" and "it is impossible to rely their use on spontaneous interpretation of pictures and of images" (Duval, 1994). The "double nature", ideal, abstract and on the other hand real, of several mathematical objects (according to the theory of figural concepts: Fischbein, 1993), does not seem relevant in this case; the didactical implications of this double nature must be carefully considered, as well as the utility of different registers of semiotic representation for the learning (Duval, 1993; Kaldrimidou, 1987; Vinner, 1992; Bagni, 1997).

So a correct introduction of infinite sets (with the definition of infinite set that can be put in correspondence one-to-one with its proper part and, perhaps, with the introductions of cardinal numbers) seems indispensable for the correct learning of the concepts of dense and connected set and for the settlement of the set of real numbers.

2nd PART: INTEGRAL AND MEASURE

6. RIEMANN'S INTEGRAL, LEBESGUE'S INTEGRAL

The introduction of the notion of integral is an interesting moment in reference to the concepts of dense and connected sets. The definition of integral and the study of functions that can be integrated according to Riemann make, as we shall see, the pupils of High School (in *Liceo scientifico*, pupils of the 5th class) to reflect on the fundamental concepts of dense set and of connected set.

Bernhard Riemann (1826-1866) gave the conditions so that a function can be integrated with reference of sums today named integral sums: such integral is named Riemann's integral. Functions that can be integrated and functions that cannot be integrated (according to Riemann) are important in the didactics of mathematics: it is well known that in some particular cases of discontinuity of the integrand, Riemann's integral can be inapplicable.

The introduction of Lebesgue's measure is not the crucial point of our study. The integral according to Lebesgue can be referred to Lebesgue's measure (and it is referred to the functions that can be integrated according to Lebesgue), but to the traditional Peano-Jordan's measure of a segment, too (by that, the measure of the whole segment $[a; b]\subseteq\mathbf{R}$ is $b-a$): of course, in this case, the integral is referred only to the functions that can be integrated according to Riemann and it coincides (with regard to its result and to the concept) with the integral according to Riemann (4).

7. METHOD OF OUR RESEARCH (2nd PART)

7.1. Lebesgue's integral and Peano-Jordan's measure

The introduction of Lebesgue's integral was historically very important: the integral (and the concept of function that can be integrated) missed its absolute uniqueness and *the fundamental role of the measure* was clearly underlined. The growth from Riemann's integral to Lebesgue's integral does not depend only upon the different way of going about its definition (the partition of the interval *of the range* into correspondence with the interval in which the integral is considered), but it is based upon the fundamental evolution from Peano-Jordan's measure to Lebesgue's measure. In short, if we apply Lebesgue's method with reference to the "old" Peano-Jordan's measure, we get the "old" Riemann's integral.

(4) About Riemann's work, see: Laugwitz, 1995 and: Bottazzini, 1981. Moreover: Boyer, 1968 and 1969; Kline, 1972; Anglin, 1994; Edwards, 1994; Pier, 1994. About Lebesgue measure: Rudin, 1966.

We wanted to analyse an important matter: what is the difference (from the didactic point of view) between the introduction of Riemann's integral and the introduction of Lebesgue's integral? And in particular: which of these methods is advantageous in the didactics of mathematics in High School?

7.2. Our research

Our research was based upon the following question: is it useful to replace the traditional introduction of the Riemann's integral (by the partition of the interval in which the integral is considered) with the introduction of Lebesgue's integral (by the partition of the interval of the range into correspondence with the interval in which the integral is considered), with reference to Peano-Jordan's measu re?

By test 3, we examined the status of the concept of function that can be integrated (according to Riemann) in a class in which Riemann's integral was introduced in the traditional way; then we repeated the previous test in a class in which Lebesgue's i ntegral was introduced (referred to Peano-Jordan's measure: test 4). The analysis of pupils' behaviour, particularly referred to the Italian *Liceo scientifico*, was based upon:

- A 5th class of *Liceo scientifico* (pupils aged 18-19 years), in Treviso, Italy, total 25 pupils; they knew the concepts of limit, of continuous function, of derivative and Riemann's integral. They knew the χ_A function of a set A. They did not know Lebesgue's integral.
- A 5th class of *Liceo scientifico* (pupils aged 18-19 years), in Treviso, Italy, total 24 pupils; they knew the concepts of limit, of continuous function, of derivative and the integral according to Lebesgue's introduction, but with reference to Peano-Jordan's measure (applied only to the functions that can be integrated according to Riemann). They knew the χ_A function of a set A.

Pupils of both classes were asked to answer to the questions of the following test (time: 20 minutes; no textbooks or calculators were allowed):

Test 3 and test 4

Say if the following functions $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ can be integrated in [0; 2]:

(a) $x \to x^2+3x+2$ (b) $\chi_{[0;1[}+2\chi_{[1;2]}$ (c) $\chi_{[0;1]}+2\chi_{[1;2]}$ (d) $\chi_{[0;2]}\chi_{\mathbf{Q}}$

Let us underline that functions were given by writings of different kinds; however pupils knew and frequently used both kinds of writings, so functions so given can be compared.

8. TEST 3 (5th CLASS OF *LICEO SCIENTIFICO*)

8.1. Results of test 3

Results of test 3 are given in the following table:

	The function can be integrated		The function cannot be integrated		No answer	
(a)	24	96%	0	0%	1	4%
(b)	15	60%	4	16%	6	24%
(c)	13	52%	7	28%	5	20%
(d)	10	40%	8	32%	7	28%

8.2. Test 3: early remarks

Almost all the pupils stated that the function (a) can be integrated. Some difficulties arose about functions (b) and (c) that are not continuous at $x = 1$. We shall analyse them through the following interviews.

Several answers about the function (d) are disappointing: only 32% of the pupils stated that this function cannot be integrated according to Riemann in [0; 2]; 40% stated that this function can be integrated according to Riemann and 28% did not answer.

8.3. Justification given by pupils (test 3)

Pupils justified their answers in some interviews.

A remarkable part of the pupils that stated that the function (b) and (c) cannot be integrated (function (b): 3 out of 4; function (c): 4 out of 7) stated that because of the presence of a point ($x = 1$) at which these functions are not continuous ([5]).

The following justification is interesting (the pupil stated that the function (b) can be integrated and that the function (c) cannot be integrated):

"Function (c) is 1 from 0 to 1 (except the point 1 itself), it is 3 at $x = 1$ and it is 2 from 1 (except the point 1 itself) to 2. I thought that it is strange that this function can be integrated: its integral would be equal to the integral of the function (c), but the point at $x = 1$ is... higher! Now I understand that I was wrong: the point (1; 3) of the function (c) does not bound a surface so the integral cannot be different with respect to the function (b)" (Marco).

We shall consider again this important justification later.

As regards the function (d), the greater part of the pupils (8 out of 10) that stated that it can be integrated wrote that the area bounded by its Cartesian graph is not different from the area of the rectangle whose base is 2 (from [0; 2]) and whose altitude is 1. For example:

"Between two numbers there are infinitely many rational numbers. So I thought that the part of the plane underneath the graph of the function (d) is all the rectangle, made by an infinite number of small columns infinitely thick" (Andrea).

So once more *the difference between dense and connected sets is not clear in the pupils' conceptions*.

Several pupils that stated that the function (d) cannot be integrated did not give any justification; for example:

"The function (d) does not bound a surface whose area can be computed because its graph is not a full segment, but it is just a thick succession of points" (Sergio).

A pupil underlined that it is difficult to decide if a function can be integrated because of the necessity of a long procedure (the partition of the considered interval, the computation of the integral sums...) and not just to a definition, as the definition of continuous function:

"I had several problems with the functions that can be integrated and the functions that cannot be integrated. For instance, it is easy to say if a function is continuous and to say if its derivative exists: I have clear rules, I must calculate some limits, few exceptions. While about the functions to be integrated, I do not know what I must look for..." (Francesca).

8.4. Analysis of justifications given by pupils and conclusions about test 3

It is well known that the identification of the functions that can be integrated (according to Riemann) is a remarkable problem for many pupils (surely harder than the identification of continuous functions, for example). Frequently pupils are looking for an easy rule, that can be directly applied in exercises, and several of them thought that the functions that can be integrated are (only!) the continuous functions.

Once more the difference between dense and connected sets is not well comprehended by many pupils, even though they know many fundamental topics of Calculus. Results of Dirichlet's function (d) underline that the difference between the sets $\{x\in \mathbf{Q}: 0\le x\le 2\}$ (dense, that cannot be measured by Peano-Jordan's measure) and $\{x\in \mathbf{R}: 0\le x\le 2\}$ (connected, measurable by Peano-Jordan's measure) is felt by few pupils.

Through the following test we shall verify that the approach of the integral according to Lebesgue (with reference to Peano-Jordan's measure, so referred to the functions that can be integrated according to Riemann) improves the comprehension of the characteristics of some functions, while it does not change the situation of other functions.

([5]) For example: "A continuous function can be integrated; these functions are not continuous at 1, so they cannot be integrated" (Umberto). This is a (common) logical mistake: a sufficient condition is interpreted as a necessary condition.

9. TEST 4 (5^{th} CLASS OF *LICEO SCIENTIFICO*)

9.1. Results of test 4

Results of test 4 are given in the following table:

	The function can be integrated		The function cannot be integrated		No answer	
(a)	22	92%	1	4%	1	4%
(b)	20	83%	3	13%	1	4%
(c)	18	75%	2	8%	4	17%
(d)	7	29%	9	37%	8	33%

9.2. Test 4: early remarks

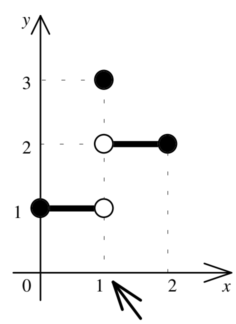
As for test 3, almost all pupils stated that the function (a) can be integrated.

As regards functions (b), (c) (that are not continuous at $x = 1$), the results of test 4 are better than the results of test 3: correct answers are 83% (b, test 3: 60%) and 75% (c, test 3: 52%).

As regards function (d), the situation is still rather bad: only 37% of the pupils stated that it cannot be integrated according to Riemann in [0; 2] and this is not much better than 32% (test 3); 29% of the pupils stated that this function can be integrated (test 3: 40%) and 33% gave no answers (test 3: 28%).

9.3. Justifications given by pupils (test 4)

Some of the pupils that stated that the functions (b) and (c) cannot be integrated gave this answer because of the presence of a point ($x = 1$) at which these functions are not continuous. Let us see the justification given by Stefano, who draws the following picture (the correct Cartesian graph of the function (c)):



"I thought that the points of the functions (b) and (c) at which they are not continuous could cause some problems, but I was wrong. For example, the graph of the function (c) can be divided into three parts, referred to $y = 1$, to $y = 2$ and to $y = 3$. The part referred to 1 comes from [0; 1[, that is 1; the part referred to 2 comes from]1; 2], that is 2; the part referred to 3 comes from $x = 1$, so from a single point, whose measure is 0, because it is: $1-1$. So I can find the total area: $1\cdot1+2\cdot1+3\cdot0$, so I have 3" (Stefano).

About the function (d), many pupils that stated that it can be integrated (9 out of 15) showed difficulties with the Peano-Jordan's measure of $\{x\in\mathbf{R}: 0\le x\le 2 \wedge x\in\mathbf{Q}\}$:

"I reach $y = 1$ from the rational numbers between 0 and 2. Their measure is $2-0 = 2$, so the area is $2\cdot1 = 2$" (Tullio).

So dense and connected sets are once more confused. About the pupils that stated that the function (d) cannot be integrated, let us see the following justification:

"I had not a real surface to be measured, it is always interrupted b y a lot of little stripes that I should remove. Rational and irrational numbers are mixed ant they cannot be divided. I think that the area cannot be computed, so the function (d) cannot be integrated" (Antonella).

9.4. Analysis of justifications given by pupils and conclusions about test 4

The introduction of the integral according to Lebesgue's method (with reference to Peano-Jordan's measure) seems to improve the comprehension of the notion of the functions that can be integrated according to Riemann (6). Data above given about functions (b) and (c) are clear and Stefano's justification (referred to the measure of the set whose elements x are such that $f(x) = 3$) is convincing, better than Marco's one (which only referred to the absence of a "real surface" in correspondence with $x = 1$).

As regards Dirichlet's function, the results of test 3 and of test 4 are very similar: doubts and difficulties about the distinction between dense and connected sets remain, so the absence of a specific introduction of infinity leads to the impossibility to characterise clearly the functions that can be integrated according to Riemann.

10. CONCLUSIONS (2nd PART)

> "I must pay a sum; I look for money in my pockets and I find some coins and bank-notes having various values. I give them to my creditor, as I found them, until I reach the total of my debt. This is Riemann's integral. But I can do it differently. I take all my money from my pocket, I collect up bank notes and coins having the same value and I pay pouring together pieces of same value. This is my integral".
>
> Henri Lebesgue

In our opinion a didactic role for the integral according to Lebesgue is important and it is to be hoped for. In fact, the traditional introduction of Riemann's integral (that is by partition of the interval belonging to axis x) can be replaced by the introduction of Lebesgue's integral (that is by partition of the interval belonging to axis y). This choice is not very hard and it can be considered with reference to Peano-Jordan's measure (7).

So the pupils would distinguish the integral's role from the measure's role; they would realize that the integral itself (that, as above noted, does not change if we consider Riemann's integral and Lebesgue's integral with reference to Peano-Jordan's measure) strictly depends upon the chosen measure (8).

Previous remarks *would be particularly important in presence of a specific introduction of infinity*: some examples of functions that can be integrated according to Riemann (with $f(x)$ different from 0 only at x belonging to sets that cannot be measured by Peano-Jordan's measure) are related to the concepts of dense set and of connected set.

GENERAL CONCLUSIONS

The traditional mathematical curriculum of High School, and particularly the mathematical curriculum of Italian *Liceo scientifico*, can be strongly improved.

The absence of a specific introduction of infinity affects some important matters, such as the set of the real numbers. Some ingenuous attempts to visualise dense sets and connected sets are inefficacious without a strong and careful introduction of the concepts of dense set and of connected set, and they can cause dangerous misconceptions: let us remember Andrea's note (8.3) and let us quote again R. Duval (about visual methods), who states that "it is impossible to rely their use on spontaneous interpretation of pictures and of images" (Duval, 1994).

---

(6) The relatively small difference in the results of tests 3 and 4 does not seem sufficient to give privilege to the integral according to Lebesgue. Note moreover that the considered functions (b), (c), (d) assume only some values, so the integrability according to Lebesgue is of course easy to be found. In the case of other functions this advantage possibly will not exist.

(7) The introduction of Lebesgue's measure, as a possible second step, would make it possible to analyse some functions that cannot be integrated according to Riemann.

(8) About measure's theory, see the (exacting) works: Halmos, 1994; Doob, 1994.

Moreover, the absence of a correct introduction of infinity and of cardinal numbers makes it difficult to insert in the curriculum a full introduction of the concept of integral. We could note that Lebesgue' integral (although referred to Peano-Jordan's measure), based upon the partition of the interval belonging to axis *y*, brings the pupils to characterise easier functions that can be integrated according to Riemann; but it would require the knowledge of the concepts of dense set and of connected set. So what is lacking didactically strongly limits a real improvement of the didactics of the concept of integral.

Summary. In the first part of this paper, the idea of continuity of the set of the real numbers in the learning of mathematics is investigated, referred to Italian High School (*Liceo scientifico*, pupils aged 16-19 years). The status of these concepts is studied by two tests, before (3rd class, pupils aged 16-17 years) and after the study of the main concepts of the Calculus (5th class, pupils aged 18-19 years). In the second part of this paper, the idea of integral in the learning of mathematics is investigated, referred to Italian High School (*Liceo scientifico*, 5th class). The status of these concepts is studied by two tests, in which Dirichlet's function, Riemann's integral and Lebesgue's integral, referred to Peano-Jordan measure, are proposed.