Atti e Memorie dell'Ateneo di Treviso (1998), 15, 51-60

Un'interpretazione categoriale di una misconcezione riguardante gli insiemi infiniti

Giorgio T. Bagni
Ateneo di Treviso

Sommario (Abstract). In this paper an important misconception about infinite sets is described with reference to the categories. Moreover operational and structural conceptions of mathematics are related to the categories.

> "Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le lor radici, e le lor radici sono tutti i numeri: e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati".
>
> Galileo Galilei (1564-1642) *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Giornata I

INTRODUZIONE

Ha scritto A. Sfard, qualche hanno fa:

"In apparenza, un modo puramente operativo di guardare alla matematica potrebbe essere del tutto appropriato. La stessa nozione di 'oggetto matematico' sarebbe superflua: se i processi sembrano i soli ad essere reali in matematica, perché complicare la situazione con queste 'cose' ambigue, filosoficamente problematiche come gli insiemi infiniti?" (Sfard, 1991, p. 23) ([1]).

([1]) Così prosegue l'analisi dell'Autrice: "Teoricamente sarebbe possibile fare quasi tutta la matematica in modo puramente operativo: potremmo muoverci dai processi elementari verso i processi di livello più alto e poi verso processi sempre più complessi senza riferirci mai ad alcun tipo di oggetto astratto... [Tuttavia] le informazioni concepite operativamente, sebbene assolutamente indispensabili ed apparentemente sufficienti per risolvere problemi, non possono essere facilmente elaborate. Questo tipo di informazione può essere immagazzinato solo in schemi cognitivi non strutturati, sequenziali, inadeguati per le dimensioni piuttosto modeste della memoria di lavoro dell'uomo. Dunque le idee puramente operative devono essere elaborate in modo frammentario ed ingombrante, che può condurre ad un grande sforzo cognitivo ed alla spiacevole sensazione di una comprensione solo locale, quindi insufficiente" (Sfard, 1991).

L'Autrice sottolinea che l'approccio operativo (orientato ai processi) e quello strutturale (orientato agli oggetti) sono spesso abbinati, fino ad essere considerati le "diverse facce di una stessa medaglia" (espr essione che compare nel titolo del lavoro citato). In particolare, dal punto di vista didattico, "sembra che l'approccio strutturale possa essere visto come lo stadio più avanzato dello sviluppo concettuale... e che, nel processo di formazione dei concetti, la concezione operativa preceda quella strutturale" (Sfard, 1991, p. 10).

I "PROBLEMATICI" INSIEMI INFINITI

Appare indicativo che la Sfard faccia riferimento proprio agli insiemi infiniti come ad oggetti matematici la cui considerazione richiede particolare cautela: la storia del concetto di infinito in matematica è antica e, in effetti, "filosoficamente problematica"; molti aspetti della sua evoluzione influenzano la moderna didattica ([2]). Numerosi ricercatori si sono occupati, anche recentemente, del concetto di infinito nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica (per una ricca bibliografia indichiamo: D'Amore, 1996 e 1997).

Dalle conclusioni del T.G. 14 dell'ICME 8 (D'Amore, 1996) rileviamo che la nozione di infinito emerge in molti campi (anche se didatticamente è l'Analisi il settore privilegiato): l'idea di infinito è collegata alla ripetizione indefinita di un'operazione, ad esempio l'addizione di un'unità o la divisione ([3]).

([2]) L'opposizione storica tra l'infinito po tenziale e l'infinito attuale è ri flessa nella didattica della matematica; in particolare, l'efficacia intuitiva dell'infinito potenziale, concepito nei termini di una quantità che può essere progressivamente ed indefinitamente incrementata (dunque vicino ad una concezione operativa), può rendere preponderante il ruolo di tale idea nei confronti del concetto, profondo ed impegnativo, di infinito attuale (più orientato ad una concezione strutturale). Alcune difficoltà collegate all'infinito attuale sono ri portate in: Tsamir & Tirosh, 1992 e 1997. Per una breve storia dell'infinito in matematica: Arrigo & D'Amore, 1992.

([3]) Spesso l'infinito è collegato alla possibilità di misurare un ente matematico (geometrico): "Nel senso di misura [l'infinito] appare in molti protocolli di studenti di qualsiasi età: un segmento, per quanto lungo, si può sempre misurare e dunque non è infinito; una retta non si può misurare ed è dunque infinita. Ciò porta di conseguenza anche ad affermazioni sul numero di punti contenuti rispettivamente in una retta ed in un segmento... Così, paragonando due segmenti di lunghezza diversa, verrà poi spontaneo dire che il segmento più corto contiene meno punti" (D'Amore, 1996; si veda inoltre: Fischbein, Tirosh & Hess, 1979; Tall, 1980). Rileviamo inoltre che possono sorgere difficoltà proprio in relazione agli oggetti matematici coinvolti ed alle operazioni in questione; in particolare devono essere attentamente considerati i conflitti tra i concetti e le loro espressioni linguistiche (esaminati in: Cornu, 1980; Monaghan, 1991). Per quanto riguarda l'Analisi, ricordiamo ad esempio: Schwarzenberger, 1980; Tall, 1985; Davis & Vinner, 1986; Sierpinska, 1987, 1990 e 1994; Dimarakis & Gagatsis, 1996 e 1997.

Lo studio del concetto di infinito e delle nozioni ad esso collegate può essere condotto a diversi livelli scolastici (per la scuola primaria si veda ad esempio: Gimenez, 1990). Il confronto di insiemi infiniti è esaminato in Waldegg (1993) e le difficoltà sull'espressione di tale confronto sono evidenziate da R. Duval, il quale osserva che un ostacolo a proposito del riconoscimento della biiezione tra l'insieme dei naturali quello dei naturali quadrati è uno "scivolamento" (*glissement*) dall'uso del verbo Avere all'uso del verbo Essere: "chaque entier a un carré - tout les entiers ne sont pas des carrés d'entiers" (Duval, 1983, p. 403; osservazioni in: D'Amore 1996).

L'annotazione di Duval si riferisce ad un'importante misconcezione che chiameremo *misconcezione dei sottoinsiemi infiniti*. Per presentarla faremo riferimento ad un recente lavoro (Bagni, 1998) nel quale ad alcuni allievi della scuola secondaria superiore (Liceo scientifico, 16-19 anni) è stato proposto un test incentrato su alcuni insiemi infiniti, tra i quali:

$$I_N = \{x \in \mathbf{N}: 3 \le x \le 10\}$$

$$I_Q = \{x \in \mathbf{Q}: 3 \le x \le 10\}$$

$$I_R = \{x \in \mathbf{R}: 3 \le x \le 10\}$$

Pur senza entrare nei dettagli del test citato (per i quali rinviamo a: Bagni, 1998), riportiamo che il 46% degli allievi esaminati ha (correttamente) affermato che la cardinalità di I_R è maggiore di quella di I_Q e di I_N, ma una rilevante percentuale di questi allievi (73%, il 33% del totale) ha erroneamente giustificato tale conclusione nel modo seguente:

"Per quanto riguarda... gli insiemi infiniti, alcuni allievi si basano sulla considerazione:

$$I_N \subset I_Q \subset I_R \quad \Rightarrow \quad \text{la cardinalità di } I_R \text{ è maggiore di quelle di } I_Q \text{ e di } I_N$$

ovvero applicano ad insiemi infiniti considerazioni che potrebbero essere applicate soltanto ad insiemi finiti. Il fatto che un insieme infinito possa essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria (la definizione stessa di insieme infinito) non viene tenuto presente" (Bagni, 1998).

La radice storica di tale misconcezione è antichissima: essa può essere fatta risalire agli *Elementi* di Euclide, dove troviamo la nozione comune:

"Il tutto è maggiore della parte" (Euclide, 1970, p. 74).

applicabile, evidentemente, ai soli insiemi finiti; Galileo Galilei fece riferimento alla corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei naturali ed il suo sottoinsieme dei naturali quadrati in *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (Galilei, 1958, pp. 44-45; Galilei, 1990, pp. 42-43;

A. Frajese ricorda che forse già nel *Carmide* platonico venne forse implicitamente menzionata la questione: Euclide, 1970, pp. 74-75).

La sistemazione teorica del concetto di insieme infinito è stata storicamente condotta attraverso ricerche classiche, dovute ad alcuni tra i massimi matematici di ogni tempo (Bourbaki, 1960); in particolare, fondamentali sono stati, nel XIX secolo, gli studî di Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) e di Georg Cantor (1845-1918; per alcune pagine originali: Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992).

Lo scopo del nostro lavoro è duplice: innanzitutto desideriamo riprendere, con riferimento all'àmbito categoriale, alcune indicazioni fornite da A. Sfard; quindi daremo una descrizione della misconcezione sopra ricordata sulla base di alcune considerazioni riguardanti le categorie.

Per citare brevemente le principali nozioni sulle categorie, nel paragrafo seguente faremo riferimento in particolare ai primi capitoli di Mac Lane (1977), uno dei lavori classici sull'argomento (indichiamo inoltre: Ehresmann, 1965 e Bucur & Deleanu, 1968).

METACATEGORIE, CATEGORIE, FUNTORI

Una *metacategoria* è costituita da un grafo (o da un "metagrafo", come suggerito in: Mac Lane, 1977, p. 19) con oggetti a, b, c, ... e con frecce f, g, h, ... in modo che ad ogni freccia siano assegnati un *dominio* ed un *codominio*; se la freccia f ha come dominio l'oggetto a e come codominio l'oggetto b, si scrive $a = \mathrm{dom} f$, $b = \mathrm{cod} f$.

Una metacategoria ha le due operazioni: l'*identità*, che ad ogni oggetto a associa la freccia 1_a: $a \to a$ e la *composizione*, che ad ogni coppia ordinata di frecce $(g; f)$ tale che $\mathrm{dom} g = \mathrm{cod} f$ associa la freccia gf (composta) che possiamo così indicare:

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[dr, "g"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "gf"'] & & c
\end{tikzcd}$$

Per tali operazioni sono dati i due assiomi seguenti:

Legge di associatività. Per tutte le frecce tali che: $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$, si ha: $h(gf) = (hg)f$.

Legge di unità. Per tutte le frecce tali che: $a \xrightarrow{f} b$ e $b \xrightarrow{g} c$, si ha: $1_b f = f$ e $g 1_b = g$.

Dunque la definizione di metacategoria non fa direttamente riferimento alla teoria degli insiemi: come esempio, possiamo segnalare la metacategoria di tutti gli insiemi, avente per oggetti tutti gli insiemi e per frecce le funzioni con dominio e codominio specificati tra tali insiemi (Mac Lane, 1977, p. 21).

Se la precedente definizione viene interpretata nell'ambito della teoria degli insiemi, la metacategoria è detta *categoria*. Ciò comporta innanzitutto che la metacategoria di *tutti* gli insiemi non può essere considerata una categoria (giacché essa stessa *non* è un insieme!). Sempre seguendo Mac Lane (1977, p. 25), possiamo allora considerare un insieme "sufficientemente grande" U (detto "universo") ed affermare che un insieme x è "piccolo" se è un elemento di U. Possiamo allora parlare della categoria avente quali oggetti tutti gli insiemi piccoli e come frecce le funzioni aventi per dominio e per codominio insiemi piccoli. Tale categoria è indicata da **Ins**.

Osserviamo che il termine "piccolo" non deve trarre in inganno il lettore a proposito della cardinalità degli oggetti di **Ins**: a tale categoria, infatti, possono appartenere oggetti di cardinalità infinita, purché essi appartengano all'insieme U. La categoria che ha per oggetti tutti gli insiemi finiti (e per frecce tutte le funzioni tra di essi) si indica con $\mathbf{Ins}_f$.

Nel seguito faremo inoltre riferimento alla categoria **Ord**, avente per oggetti gli ordinali (come insiemi linearmente ordinati di tutti gli ordinali precedenti) e per frecce tutte le funzioni tra di essi. La categoria **Ordfin** ha per oggetti tutti gli ordinali finiti (come insiemi linearmente ordinati di tutti gli ordinali precedenti, ad esempio: $n = \{0; 1; ...; n-1\}$) e per frecce tutte le funzioni tra di essi.

Consideriamo ora due categorie C e B; un *funtore* T: C$\rightarrow$B è un morfismo, ovvero una coppia di funzioni una delle quali ad ogni oggetto di C fa corrispondere un oggetto di B e l'altra ad ogni freccia di C fa corrispondere una freccia di B in modo che: $T(1_c) = 1_{Tc}$ e $T(gf) = TgTf$.

Un semplice esempio di funtore è l'inclusione. Una *sottocategoria* S di una categoria C è costituita da alcuni oggetti di C e da alcune frecce di C tali che S sia a sua volta una categoria. L'applicazione S$\rightarrow$C che manda ogni oggetto ed ogni freccia di S nei corrispondenti oggetti e frecce in C è un funtore, detto *funtore di inclusione*. Ad esempio, $\mathbf{Ins}_f$ è una sottocategoria di **Ins**; il funtore di inclusione fa corrispondere ogni insieme finito (come oggetto di $\mathbf{Ins}_f$) in se stesso (ma come oggetto di **Ins**).

LE CATEGORIE *SOLO-FRECCE* E LA CONCEZIONE PURAMENTE OPERATIVA DELLA MATEMATICA

Abbiamo finora ricordato l'introduzione delle metacategorie e delle categorie sulla base *dei loro oggetti e delle loro frecce*. Osserviamo che, dal punto di vista squisitamente teorico, tale introduzione può essere modificata; segnala infatti Mac Lane:

"Poiché gli oggetti di una metacategoria corrispondono esattamente alla sue frecce identità, è tecnicamente possibile fare a meno degli oggetti e trattare con le sole frecce, [ottenendo così] una *metacategoria solo-frecce*" (Mac Lane, 1977, p. 21).

In modo del tutto analogo a quanto precedentemente illustrato, da una metacategoria solo-frecce e dal suo opportuno sistema di assiomi (per il quale rimandiamo a: Mac Lane, 1977, p. 22), è possibile sviluppare l'intero impianto teorico mantenendo l'impostazione solo-frecce.

La situazione ora segnalata è matematicamente corretta e significativa, sebbene forse praticamente non del tutto conveniente (lo stesso Mac Lane non opta per questa introduzione solo-frecce delle categorie); dobbiamo del resto notare che la considerazione delle categorie si riferisce, inizialmente, proprio allo studio dei morfismi:

"La teoria delle categorie si chiede per ogni tipo di oggetti matematici: 'quali sono i morfismi?'; essa suggerisce che questi morfismi debbano essere descritti contemporaneamente agli oggetti. I categoristi, comunque, di solito chiamano le loro categorie... con i numi comuni degli oggetti... Solo Ehresmann (1965) e la sua scuola hanno il coraggio di nominare ogni categoria con il nome comune delle sue frecce "(Mac Lane, 1977, p. 46).

Possiamo quindi rilevare che la segnalazione di A. Sfard citata nell'introduzione al presente lavoro su di un possibile "modo puramente operativo di guardare alla matematica" (Sfard, 1991, p. 23) può essere associata agli studî dei categoristi: ma una scelta radicale in tal senso, ovvero l'opzione per una matematica concepita in termini esclusivamente operativi, non riflette le condizioni di chiarezza e di efficacia (anche didattica) che la considerazione degli oggetti, a fianco delle frecce, sembra evidentemente garantire.

LE SOTTOCATEGORIE: UN ESEMPIO SIGNIFICATIVO

Un semplice ma significativo esempio tratto da Mac Lane (1977, p. 32) ci sarà utile per introdurre un oggetto molto utile per lo sviluppo del nostro lavoro.

Consideriamo le categorie **Ordfin** e $\mathbf{Ins}_f$; ogni ordinale $n = \{0; 1; ...; n-1\}$ è un insieme finito e dunque **Ordfin** è una sottocategoria di $\mathbf{Ins}_f$, essendo S: $\mathbf{Ordfin} \rightarrow \mathbf{Ins}_f$ il funtore inclusione. Inoltre ad ogni insieme finito a possiamo associare l'ordinale $n = \mathrm{ord}a$; scriviamo: θ_a: $a \rightarrow \mathrm{ord}a$.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\theta a"'] \arrow[d, "f"] & \mathrm{ord}\, a \arrow[d, "\mathrm{ord}\, f"] \\
b \arrow[r, "\theta b"'] & \mathrm{ord}\, b
\end{tikzcd}
$$

Per ogni funzione f tra insiemi f: $a\rightarrow b$ possiamo definire una corrispondente funzione ord$f$ fra ordinali ord$f$: ord$a\rightarrow$ord$b$ in modo che: ord: $\mathbf{Ins}_f\rightarrow\mathbf{Ordfin}$ sia un funtore; dunque nel diagramma poniamo che sia: ord$f = \theta_b f \theta_a^{-1}$. Ciò si esprime dicendo che il diagramma *commuta* (o è *commutativo*; ciò accade se, per ogni coppia di vertici, ogni coppia di percorsi che congiungono tali vertici danno, per composizione di frecce, frecce uguali).

Sottolineiamo che le considerazioni ora illustrate sono collegate alle categorie degli insiemi finiti e degli ordinali finiti (categorie che sono collegate da un isomorfismo naturale: esse sono dunque essenzialmente la stessa categoria, se identifichiamo un ordinale finito mediante un solo insieme finito: Mac Lane, 1977, pp. 25 e 32). In particolare, con riferimento alle categorie $\mathbf{Ins}_f$ e **Ordfin**, possiamo scrivere:

$$a \subseteq b \;\Leftrightarrow\; \#a \leq \#b$$

$$(a \subseteq b \wedge a \neq b) \;\Leftrightarrow\; \#a < \#b$$

Constatazioni inizialmente analoghe potrebbero essere svolte con riferimento alle categorie **Ins** e **Ord**, giacché, ad esempio, ogni ordinale è un insieme: **Ord** è dunque una sottocategoria di **Ins**, essendo S: $\mathbf{Ord}\rightarrow\mathbf{Ins}$ il funtore inclusione.

Consideriamo il caso in cui a e b, oggetti di **Ins**, siano insiemi infiniti entrambi corrispondenti all'ordinale ω (ricordando il celebre esempio galileiano, a può essere l'insieme dei numeri naturali quadrati e b l'insieme dei numeri naturali, per cui $a \subseteq b$). Torniamo a quanto sopra scritto con riferimento alle categorie $\mathbf{Ins}_f$ e **Ordfin**; la prima affermazione:

$$a \subseteq b \;\Leftrightarrow\; \#a \leq \#b$$

risulta verificata anche nell'àmbito delle categorie **Ins** e **Ord** (si vedano ad esempio le proprietà dei preordini: Mac Lane, 1977, p. 25), ma la seconda affermazione:

$$(a \subseteq b \wedge a \neq b) \;\Leftrightarrow\; \#a < \#b$$

non è evidentemente corretta.

LA MISCONCEZIONE DEI SOTTOINSIEMI INFINITI

Il semplice esempio presentato nel precedente paragrafo, considerato in àmbito didattico, illustra l'importante misconcezione dei sottoinsiemi infiniti.

Riprendiamo l'esempio proposto da R. Duval e sopra ricordato, nel quale l'ostacolo a proposito del riconoscimento della biiezione tra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri naturali quadrati viene identificato in uno "scivolamento" (*glissement*) dall'uso del verbo Avere all'uso del verbo Essere: ("chaque entier a un carré - tout les entiers ne sont pas des carrés d'entiers": Duval, 1983, p. 403).

Nell'àmbito categoriale ora proposto, la causa della misconcezione dei sottoinsiemi infiniti è ancora riferibile ad uno "scivolamento", ma non prettamente di carattere linguistico: possiamo dire che si è verificato uno "scivolamento" dalle categorie (collegate da un isomorfismo naturale) $\mathbf{Ins}_f$ e **Ordfin** (con il funtore inclusione: S: $\mathbf{Ordfin}\to\mathbf{Ins}_f$) alle categorie **Ins** e **Ord** (con il funtore inclusione: S: $\mathbf{Ord}\to\mathbf{Ins}$).

Nonostante il punto di vista, nel presente lavoro, sia essenzialmente introduttivo e terminologico, può essere interessante approfondire lo studio di questa misconcezione e di altre questioni didattiche attraverso l'impostazione teorica connessa alle categorie. Osserva S. Lerman in un recente lavoro:

"Ci si potrebbe attendere che le epistemologie connesse alle origini della conoscenza –ovvero le epistemologie genetiche– si accostino alla conoscenza in didattica della matematica ed alla conoscenza in matematica in uno stesso modo... L'epistemologia, come l'azione degli epistemologisti, pone domande su come la conoscenza è giustificata e scoperta. Nella ricerca didattica tali domande riguardano la metodologia ed il metodo, nonché le cornici teoriche che implicitamente o esplicitamente, vengono premesse alle varie ricerche" (Lerman, 1997, pp. 47 e 50; si veda inoltre: Speranza, 1997a; interessante è la raccolta: Speranza, 1997b)

Concludiamo dunque osservando che, anche con riferimento alle ricerche sulla didattica della matematica in senso epistemologico, la scelta di descrivere e di studiare alcune misconcezioni in termini categoriali può contribuire ad una più ampia definizione dello statuto epistemologico della didattica della matematica.

Bibliografia

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1992), *Infiniti*, Angeli, Milano.

Bagni, G.T. (1998), Infinite sets of real numbers, Students' conceptions before and after the study of the Calculus and the introduction of real numbers in classroom practice: in via di pubblicazione.

Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Bourbaki, N. (1960), *Eléments d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris.

Bucur, I. & Deleanu, A. (1968), *Introduction to the Theory of Categories and Functors*, Wiley, London-New York.

Cornu, B. (1980), Interference des modeles spontanes dans l'apprentissage de la notion de limite: *Cahier du Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique*, 8, 57-83.

D'Amore, B. (1996), *L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi*, Opening Relation to T.G. XIV, 8th ICME, Sevilla (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 322-335).

D'Amore, B. (1997), Bibliografia in progress sul tema: "l'infinito in didattica della matematica": *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-305.

Davis, P. & Vinner, S. (1986), The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages: *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.

Dimarakis, I. & Gagatsis, A. (1996), The limit concept; Difficulties-obstacles of Students' Undestanding: Gagatsis, A. & Rogers, L. (eds.) (1996), *Didactics and History of Mathematics*, Erasmus, Thessaloniki.

Dimarakis, I. & Gagatsis, A. (1997), Alcune difficoltà nella comprensione del concetto di limite: *La matematica e la sua didattica*, 2, 132-149.

Duval, R. (1983), L'ostacle du dedoublement des objects mathématiques, *Educational Studies in Mathematics*, 14, pp. 385-414.

Ehresmann, C. (1965), *Catégories ed structures*, Dunod, Paris.

Euclide (1970), *Elementi*, Frajese, A. & Maccioni. L. (a cura di), UTET, Torino.

Fischbein, E.; Tirosh, D. & Hess, P. (1979), The intuition of infinity: *Educational Studies in Mathematics*, 10, 3-10.

Galilei, G. (1958), *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Carugo, A. & Geymonat, L. (a cura di), Boringhieri, Torino.

Galilei, G. (1990), *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Giusti, E. (a cura di), Einaudi, Torino.

Gimenez, J. (1990), About intuitional knowledge of density in elementary school: *Proceedings Fourteenth PME Conference*, III, Mexico, 19-26.

Lerman, S. (1997), Epistemologies of Mathematics and Mathematics Education: Malara, N.A. (ed.), *An international view on Didactics of Mathematics as a scientific discipline*, Working Group 25, ICME 8, Seville, 43-51.

Mac Lane, S. (1977), *Categorie nella pratica matematica*, Boringhieri, Torino (*Categories for the Working Mathematician*, Springer, New York-Heidelberg-Berlin 1971).

Mamona-Downs, J. (1990), Calculus-Analysis: A review of recent educational research: *Proceedings of II Simposio Internacional Investigacion en Educacion Matematica*, 11-36, Cuernavaca, Mexico.

Monaghan, J. (1991), Problems with the language of Limits: *For the Learning of Mathematics*, 11, 3, 20-24.

Schwarzenberger, R. (1980), Why Calculus cannot be made easy: *Mathematical Gazette*, 64, 158-166.

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins: *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sierpinska, A. (1987), Humanities Students and Epistemological Obstacles related to limits: *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397.

Sierpinska, A. (1990), Some remarks on Understanding Mathematics: *For the Learning of Mathematics*, 10, 24-36.

Sierpinska, A. (1994), *Understanding in Mathematics*, The Falmer Press, London.

Speranza, F. (1997a), Mathematics Education as a scientific discipline: the role of Epistemology: Malara, N.A. (ed.), *An international view on Didactics of Mathematics as a scientific discipline*, Working Group 25, ICME 8, Seville, 77-83.

Speranza, F. (1997b), *Scritti di epistemologia della matematica*, Pitagora, Bologna.

Tall, D. & Vinner, S. (1981), Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity: *Educational studies in Mathematics* 12, 151-169.

Tall, D. (1980), The notion of infinity mesauring number and its relevance in the intuition of the infinity: *Educational Studies in Mathematics*, 11, 271-284.

Tall, D. (1985), Understanding the Calculus: *Mathematical Teaching*, 110, 49-53.

Tall, D. (1990), Inconsistencies in the learning of calculus and analysis*: Focus on Learning Problems in Mahematics*, 12, 49-64.

Tirosh, D. (1990), Inconsistencies in students' mathematical constructs: *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 111-129.

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1992), Students' awareness of inconsistent ideas about actual infi nity: *PME* XVI, 90-97, Durham.

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1997), Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito: *La matematica e la sua didattica*, 2, 122-131.

Waldegg, G. (1993), La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruc tion: *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 5, 19-36.