Progetto Alice, 25, 5–20 (2008)

Tableaux semantici e ragionamento diagrammatico a cento anni dalla nascita di Evert W. Beth

Giorgio T. Bagni

Riassunto E.W. Beth (1908–1964) fu un filosofo e logico olandese che si occupò principalmente dei fondamenti della matematica. Per quanto riguarda la didattica della matematica, Beth fu tra i fondatori della Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM) e fu membro del Central Committee della International Commission on the Teaching of Mathematics (ICMI). Nel presente lavoro esamineremo alcune caratteristiche del metodo dei tableaux di Beth evidenziando il ruolo del ragionamento diagrammatico (Peirce).

Abstract E.W. Beth (1908–1964) was a Dutch philosopher and logician, whose work mainly concerned the foundations of mathematics. With regard to mathematics education, Beth was among the founders of the Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM) and was a member of the Central Committee of the International Commission on the Teaching of Mathematics (ICMI). In this paper se shall discuss some features of Beth's method of tableaux in order to point out the role of diagrammatic reasoning (Peirce).

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

Nel 2008 ricorre il centenario della nascita di Evert W. Beth (1908–1964), il matematico e logico olandese al quale è ricondotta l'introduzione del metodo dei *tableaux semantici*. Dopo aver proposto un breve cenno biografico, ricorderemo alcune caratteristiche dell'importante metodo ed evidenzieremo in particolare in esso il ruolo (anche didattico) della componente iconica.

Evert Willem Beth

Beth nacque ad Almelo (Olanda) il 7 luglio 1908. Studiò matematica e fisica presso l'Università di Utrecht; studiò inoltre filosofia e psicologia. Nel 1935 conseguì il dottorato in filosofia e nel 1946 divenne professore di Logica e Fondamenti della Matematica ad Amsterdam. A parte due brevi interruzioni (nel 1952 lavorò presso l'Università della California a Berkeley, con A. Tarski, e nel 1957–1958 alla Johns Hopkins University a Baltimore), Beth insegnò sempre ad Amsterdam (Heyting, 1966; Bagni, 2008).

L'opera di Beth riguarda principalmente i fondamenti della matematica. Il suo nome è spesso ricordato in relazione ai tableaux semantici, un metodo logico messo a punto indipendentemente da Beth (1955), Hintikka (1955), Schütte (1956), e più tardi sviluppato da Smullyan (1968). Si tratta di un procedimento duale rispetto alla deduzione naturale di Gentzen (1934): dato un enunciato composto, infatti, il metodo di Gentzen consiste nella ricerca sistematica di una dimostrazione, secondo uno schema ad albero; il metodo dei tableaux consiste nell'analoga ricerca di una confutazione, e risulta intuitivo e semplice, anche per gli studenti non sorretti dallo studio approfondito della logica.

In generale, i principali contributi di Beth alla logica furono il teorema di definibilità, i tableaux semantici e i modelli di Beth (Destouches, 1964; Franchella, 2002). Nell'ultimo periodo della sua vita Beth si dedicò a settori collegati alla logica, come lo studio del linguaggio, la dimostrazione di teoremi, la matematica euristica e i metodi per la traduzione nei linguaggi naturali (van Ulsen, 2000; un elenco completo delle opere di Beth è stato pubblicato da J.F. Staal, 1965).

Beth fu il principale fondatore della Società Olandese per la Logica e la Filosofia della Scienza e fu molto attivo nell'organizzazione della International Association for Logic and Philosophy of Science (Heyting, 1966). Dal punto di vista didattico va ricordato il volume *L'enseignement des mathématiques* di Beth, Choquet, Dieudonné, Lichnerowicz, Gattegno e Piaget (1955): tali autori furono i fondatori nel 1950 della Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM), organismo che organizzò molti importanti convegni internazionali. Beth fu membro del

Central Committee della International Commission on the Teaching of Mathematics (ICMI) dal 1952 al 1954. Fu nominato nel 1953 membro dell'Accademia Reale Olandese delle Scienze ed ebbe un dottorato honoris causa dall'Università di Gent nel 1964. Morì il 12 aprile 1964.

L'approccio di Beth alla ricerca in didattica della matematica fu interessante e profondo; citiamo Jean Piaget (1970, p. 1, traduzione nostra):

> "Un mio amico logico, Evert W. Beth […] per molto tempo […] avversò la psicologia in generale e l'introduzione di osservazioni filosofiche nel campo dell'epistemologia, e per tale ragione era ritenuto un avversario del mio stesso lavoro, essendo questo basato sulla psicologia. Tuttavia, nell'interesse di un confronto intellettuale, Beth ci fece l'onore di venire ad uno dei nostri simposi di epistemologia genetica e di esaminare più da vicino le questioni che ci interessavano. Alla fine del convegno egli accettò di scrivere, con me, nonostante il suo timore degli psicologi, un'opera che abbiamo chiamato *Mathematical and Psychological Epistemology*. […] Nella sua conclusione a questo volume, Beth scrisse: *Il problema dell'epistemologia è di spiegare in che modo la mente umana è davvero in grado di produrre conoscenza scientifica. Per fare ciò dobbiamo stabilire un certo coordinamento tra la logica e la psicologia.* Questa dichiarazione non indica che la psicologia possa interferire nella logica – cosa che ovviamente non è vera – ma afferma che in epistemologia sia la logica che la psicologia devono essere tenute presenti, dato che è importante considerare sia gli aspetti formali che gli aspetti empirici della conoscenza umana".

Beth e Piaget diedero un importante contributo alla ricerca sullo sviluppo cognitivo; nel loro libro (Beth & Piaget, 1961; indichiamo inoltre: Beth, Mays & Piaget, 1957; Piaget, 1966) affermano che i problemi posti dalla formalizzazione possono in qualche modo corrispondere ai meccanismi mentali. Dunque per gli Autori le strutture logico–matematiche che portano alla formalizzazione possono essere considerate il punto di arrivo di un lungo processo genetico.

Nella prefazione del volume *Formal Methods: an Introduction to Symbolic Logic and to the Study of Effective Operations in Arithmetic and Logic*, Beth afferma (Beth, 1962, p. X, traduzione nostra):

> "Molti filosofi hanno considerato il ragionamento logico come una capacità innata dell'essere umano e come una caratteristica specifica della mente; ma tutti noi sappiamo che la distribuzione di questa capacità, ovvero il suo sviluppo, è pesantemente disuguale. Poche persone sono in grado di organizzare un'argomentazione efficace; altri sono al più capaci di seguire un

ragionamento logico o di identificare errori logici. Anche tra le persone istruite ci sono molti che non raggiungono neppure questo livello relativamente modesto. Per quanto ho potuto personalmente osservare, la deficienza di capacità logiche può essere dovuta a varie circostanze. Al primo posto collocherei una carenza di intelligenza generale, insufficienti capacità di concentrazione e assenza di educazione all'aspetto formale. Secondariamente, comunque, ho rilevato che molte persone sono incapaci di argomentare *ex hypothesi*, ovvero non vogliono farlo; queste persone non possono o non vogliono partire da premesse che sanno essere false o che credono lo siano, o addirittura da premesse la cui verità non è sufficientemente garantita, nella loro opinione. E se anche accettano di partire da tali ipotesi, essi presto o tardi abbandonano il ragionamento cercando prima di stabilire la verità o la falsità delle premesse. Presumibilmente questa abitudine deriva sia da una carenza di immaginazione sia da una malintesa rettitudine morale. D'altro canto, l'abilità nel ragionamento logico non è in se stessa una garanzia di idee chiare a proposito dei principi e dei fondamenti della logica. L'abilità nell'argomentazione logica è il prodotto di capacità congenite combinate con la pratica; la chiarezza teorica, invece, può soltanto svilupparsi dalla riflessione e dall'analisi".

L'importanza degli aspetti storici è stata spesso sottolineata da Beth; ad esempio (Beth, 1950, traduzione nostra):

> "La recente discussione sui fondamenti delle scienze matematiche e fisiche non possono essere completamente comprese senza un riferimento ai loro background storici e filosofici. Tale discussioni, per la maggior parte, traggono origine non semplicemente dai risultati della ricerca scientifica considerati in se stessi, bensì dall'incompatibilità di tali risultati con certe dottrine filosofiche precedentemente concepite".

Il metodo dei tableaux

Ricordiamo ora brevemente il metodo dei tableaux facendo riferimento al calcolo degli enunciati. Si tratta, come sopra accennato, di un procedimento per confutare un enunciato composto, cioè per provare che esso è insoddisfacibile, che è falso qualsiasi siano i valori di verità degli enunciati componenti.

Ad esempio, confutare

$$A\wedge(\neg A)$$

è immediato: tale enunciato risulta sempre falso, sia che il componente A sia vero, sia che A sia falso (riprenderemo questo primo esempio). Ovviamente il metodo dei tableaux può essere utilizzato anche per provare che un enunciato è logicamente valido, cioè che è una tautologia: per fare ciò si confuta la negazione dell'enunciato in esame.

I tableaux semantici sono grafi ad albero costituiti da una disposizione piana di nodi ciascuno dei quali contenente uno o più enunciati; il primo nodo contiene l'enunciato che deve essere confutato. A partire da questo si costruisce una tabella ramificata, con enunciati sempre meno complicati: tale costruzione ha un termine, ad esempio quando tutti gli ultimi nodi dei rami contengono soltanto enunciati atomici.

A un ramo possono essere aggiunti nodi in base a regole che si riconducono alle seguenti:

Regola α

$$\begin{array}{c} X\wedge Y \\ \downarrow \\ | \\ X \\ Y \end{array}$$

Regola β

$$\begin{array}{c} X\vee Y \\ \downarrow \\ \begin{array}{cc} | & | \\ X & Y \end{array} \end{array}$$

Giustifichiamo informalmente il procedimento che andiamo a proporre (che peraltro si basa su dimostrazioni rigorose: il metodo dei tableaux semantici si conclude dopo un numero finito di passi; si prova inoltre che tale metodo è sia corretto che completo: detto T un tableau completo per P, l'enunciato P è insoddisfacibile se e soltanto se il tableau T è chiuso).

Si noti che l'enunciato $A\wedge(\neg A)$, come sopra osservato, è sempre falso; per rappresentare tale enunciato in un tableau collocheremo i suoi enunciati componenti (A e $\neg$A) in uno stesso nodo (come indicato dalla regola α); la presenza nello stesso nodo di un enunciato e della sua negazione si collega dunque a un'inevitabile situazione di falsità. Quindi la contemporanea presenza di A e di $\neg$A in uno stesso nodo rende inutile procedere nell'analisi e il ramo al quale il nodo appartiene viene detto *chiuso*.

Consideriamo ora dettagliatamente le regole precedenti relative ai connettivi $\wedge$, $\vee$:

- in quale caso si può dire che $X\wedge Y$ è falso? Basta che (almeno) uno degli enunciati X e Y sia falso. Dunque nel caso di $X\wedge Y$, come appena visto, possiamo effettivamente collocare entrambi gli enunciati componenti X, Y nello stesso nodo (regola α); ma nel caso di $X \vee Y$ le cose cambiano…

- in quale caso, si può dire che $X \vee Y$ è falso? Se e solo se X è falso e contemporaneamente anche Y è falso. Il metodo propone allora creare una *biforcazione del grafo* (si veda la regola β): infatti non è sufficiente che sia falso uno solo tra X e Y per determinare la falsità di $X \vee Y$, ma è necessario che siano falsi entrambi.

Dunque tutte le regole (di tipo α) che si riferiranno al connettivo $\wedge$ determineranno l'aggiunta di *un singolo nodo* al tableau; le regole (di tipo β) che si riferiranno a $\vee$ determineranno una biforcazione del tableau e dunque l'aggiunta di *due nuovi nodi*.

Come anticipato, se all'ultimo nodo di un ramo appartengono contemporaneamente un enunciato A e la sua negazione $\neg A$, allora il ramo in questione si dice chiuso; quando *tutti* i rami sono chiusi, il tableau è chiuso e la confutazione dell'enunciato di partenza è completata.

Naturalmente i vari connettivi devono essere interpretati mediante opportune regole di tipo α o di tipo β. Ad esempio sappiamo che la formula $X \rightarrow Y$ equivale a $(\neg X) \vee Y$; dunque la presenza di un enunciato del tipo $X \rightarrow Y$ porta all'uso di una regola β:

$$\begin{array}{c} X \rightarrow Y \\ \downarrow \\ \begin{array}{cc} | & | \\ \neg X & Y \end{array} \end{array}$$

Illustriamo con un esempio quanto ora introdotto. Si desideri provare la validità logica dell'enunciato composto:

$$[(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C)$$

Dovremo allora confutare la negazione di tale enunciato:

$$\neg\{[(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C)\}$$

e ciò, come sappiamo, può essere ottenuto applicando il metodo dei tableaux.

Facciamo innanzitutto ricorso alla regola α, in quanto è noto che:

$$\neg(X \rightarrow Y) \quad \text{equivale a} \quad X \wedge (\neg Y).$$

Scriviamo dunque:

$$\begin{array}{c} \neg\{[(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)]\rightarrow(A\rightarrow C)\} \\ | \\ (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C) \\ \neg(A\rightarrow C) \end{array}$$

Applichiamo ancora la regola α al primo degli enunciati così ottenuti:

$$\begin{array}{c} \neg\{[(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)]\rightarrow(A\rightarrow C)\} \\ | \\ (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C) \\ \neg(A\rightarrow C) \\ | \\ A\rightarrow B \\ B\rightarrow C \\ \neg(A\rightarrow C) \end{array}$$

nonché all'enunciato ¬(A→C):

$$\begin{array}{c} \neg\{[(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)]\rightarrow(A\rightarrow C)\} \\ | \\ (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C) \\ \neg(A\rightarrow C) \\ | \\ A\rightarrow B \\ B\rightarrow C \\ \neg(A\rightarrow C) \\ | \\ A\rightarrow B \\ B\rightarrow C \\ A \\ \neg C \end{array}$$

Applichiamo quindi la regola β al primo enunciato dell'ultimo nodo (introducendo così una biforcazione nel tableau – proprio questo elemento risulterà praticamente significativo):

$$\begin{array}{c}
\neg\{[(A\to B)\wedge(B\to C)]\to(A\to C)\} \\
| \\
(A\to B)\wedge(B\to C) \\
\neg(A\to C) \\
| \\
A\to B \\
B\to C \\
\neg(A\to C) \\
| \\
A\to B \\
B\to C \\
A \\
\neg C \\
\begin{array}{cc}
| & | \\
B\to C & B\to C \\
A & A \\
\neg C & \neg C \\
\neg A & B \\
\blacklozenge &
\end{array}
\end{array}$$

Il ramo che termina con ¬A (quello a sinistra) è chiuso, in quanto nell'ultimo nodo troviamo sia A che ¬A.

Dopo aver contrassegnato con un apposito simbolo (ad esempio "♦") il ramo chiuso, è necessario proseguire la formazione del tableau con il solo ramo a destra.

Applichiamo la regola β a B→C (ulteriore biforcazione!):

$$\begin{array}{c}
\neg\{[(A\to B)\wedge(B\to C)]\to(A\to C)\} \\
| \\
(A\to B)\wedge(B\to C) \\
\neg(A\to C) \\
| \\
A\to B \\
B\to C \\
\neg(A\to C) \\
|
\end{array}$$

```
        A→B
        B→C
         A
        ¬C
     |       |
  B→C     B→C
   A        A
  ¬C       ¬C
  ¬A        B
   ♦        |        |
            A        A
           ¬C       ¬C
            B        B
           ¬B        C
            ♦        ♦
```

I rami formati sono entrambi chiusi: quello a sinistra per la presenza contemporanea di B e ¬B nell'ultimo nodo, quello a destra per la presenza di C e ¬C nell'ultimo nodo. L'enunciato di partenza risulta dunque confutato e ciò significa che la sua negazione, $[(A\to B)\wedge(B\to C)]\to(A\to C)$, è una tautologia.

Tableaux e "ragionamento diagrammatico"

Una lunga citazione ci consentirà di accostarci alla fondamentale nozione di ragionamento diagrammatico. Scrive Charles Sanders Peirce (1839–1914) in *Pensiero e scrittura* (MS 956, riportato in: Marietti, 2005):

> "Le due parole *logica* e *ragione* hanno origine da due opposte concezioni della natura del pensiero. Logica, da *lògos*, che significa *parola*, mentre *ragione*, incorpora l'idea greca che il ragionamento non possa venir portato avanti senza il linguaggio. Ragione, dal latino *ratio*, che in origine indica un conto, implica che il ragionamento sia una questione di computazione, che richiede non parole bensì qualche tipo di diagramma o abaco o figure. La logica formale moderna, specialmente la logica dei relativi, mostra che la concezione greca è sostanzialmente erronea, e che quella romana è sostanzialmente corretta. Le parole, sebbene indubitabilmente necessarie al pensiero già sviluppato, giocano un ruolo solo secondario nel processo; mentre il diagramma, o icona, che può venire manipolato e sul quale si possono fare esperimenti, è importantissimo. I diagrammi sono stati

sempre usati in logica, fin dal tempo di Aristotele; e nessun ragionamento complicato può venir eseguito senza di loro. L'algebra ha le sue formule, che sono un tipo di diagramma. E a cosa servono questi diagrammi? Servono per compierci sopra esperimenti. I risultati di questi esperimenti sono spesso assolutamente sorprendenti. […] Tutto il ragionamento è sperimentazione, e tutta la sperimentazione è ragionamento. Se le cose stanno così, la conclusione per la filosofia è importantissima, vale a dire che davvero non esiste ragionamento che non abbia la natura del ragionamento diagrammatico, o matematico; e dunque non dobbiamo ammettere alcun concetto che non sia suscettibile di venire rappresentato in forma diagrammatica. Idee troppo pompose per essere espresse in diagrammi non sono altro che spazzatura per gli scopi della filosofia. […] Il buon ragionamento ha a che fare con forti immagini visive. Le idee auditive sono la fonte della maggior parte del pensiero scorretto".

Per valutare le conseguenze della posizione peirceana (seguiremo in particolare: Marietti, 2001), dobbiamo ricordare che il simbolo, per Peirce, è un segno che denota l'oggetto in virtù di una relazione di carattere mentale, convenzionale: in ciò esso si collega al contesto culturale in cui è elaborato e possiede una significazione cognitiva di cui le icone e gli indici sono privi (Peirce, 1980). Queste considerazioni sembrano sufficienti a sottolineare l'importanza della rappresentazione simbolica nella matematica e nella sua didattica: un "contenuto matematico" (qualsiasi cosa si intenda con tale termine) sarebbe rappresentato da un "segno" simbolico. Eppure il simbolo viene così a basarsi essenzialmente sull'aspetto convenzionale, aspetto che non può garantire l'universalità e la certezza della matematica (Bagni, 2007 e in via di pubblicazione).

È invece iconica la relazione che collega il diagramma alla relazione matematica: l'icona costituita dal diagramma dovrebbe trasmettere insomma una caratteristica generale, pur essendo un soggetto individuale e osservabile, un elemento sul quale i matematici (ovvero gli studenti) possono operare per elaborare e ottenere ulteriori caratteristiche del diagramma stesso (il ragionamento diagrammatico ha trovato applicazioni interessanti in didattica della matematica; indichiamo ad esempio: Dörfler, 2005 e 2006).

Possiamo ora domandarci: qual è il ruolo dell'aspetto grafico (con Peirce "diagrammatico") nel metodo dei tableaux? Prima di rispondere si noti che:

- per dimostrare la validità logica di un enunciato composto è possibile ricorrere anche ad altri procedimenti, il più noto dei quali è il metodo delle *tavole di verità*. Esso consiste nell'esame, caso per caso, di *tutte* le combinazioni dei valori di verità attribuibili ai componenti, stabilendo

in ciascun caso il valore di verità dell'enunciato composto. Il procedimento può però risultare lungo: per un enunciato con n enunciati componenti la costruzione delle tavole di verità richiede l'esame di 2^n casi;
- la costruzione di un tableau semantico, in generale, non è unica: essa richiede la scelta di alcune "strategie" da parte dell'operatore (ad esempio, la scelta di considerare i connettivi presenti secondo un ordine particolare, dunque di applicare una regola prima di un'altra), strategie dalle quali può dipendere l'efficacia del metodo. Con ciò non intendiamo dire che la stessa possibilità di ottenere la prova della validità logica di un enunciato mediante il metodo dei tableaux richieda l'adozione di specifiche strategie risolutive; tuttavia alcune scelte consentono talvolta all'operatore di costruire un tableau in termini più veloci e dunque più efficaci di altre (pensiamo ad esempio all'opportunità di usare una regola di tipo α, che non comporta una biforcazione, *prima* di una regola di tipo β che la prevede, opzione che può rendere più veloce la costruzione del tableau). Considerazioni analoghe a queste possono essere proposte per i tableaux semantici applicati al calcolo dei predicati (non ci occuperemo di ciò; rimandiamo ad esempio a: Ben–Ari, 1998).

Dunque il ricorso al metodo dei tableaux consente di stabilire la validità logica di un enunciato, anche in presenza di numerosi enunciati componenti, in termini efficaci *soprattutto se si operano alcune scelte "strategiche" durante l'esecuzione*. Queste scelte dipendono da aspetti che si collegano alla visualizzazione (ad esempio alla possibilità di evitare o di ritardare le biforcazioni del grafo), ad aspetti che Peirce chiamerebbe diagrammatici.

Sottolineiamo un'osservazione: non è qui in gioco la possibilità di giungere al risultato. In linea teorica, perfino il metodo delle tavole di verità garantisce la possibilità di stabilire se un enunciato composto è o non è una tautologia. Eppure la caratteristica ora in discussione non è meno importante: si tratta di garantire *l'efficacia di un procedimento* che, in caso di scelte poco avvedute da parte dell'operatore, può risultare lunghissimo, tale da non condurre alle conclusioni in tempi ragionevoli.

Ma c'è di più. Consideriamo una confutazione "fallita". Si voglia ad esempio tentare di provare l'insoddisfacibilità di:

$$P\wedge[(\neg Q)\vee(\neg P)]$$

Il metodo delle tavole di verità consente, dopo qualche passaggio, di stabilire che tale enunciato *non* è insoddisfacibile:

P	Q	¬P	¬Q	(¬Q)∨(¬P)	P∧[(¬Q)∨(¬P)]
V	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*
V	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*
F	*V*	*V*	*F*	*V*	*F*
F	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*

Si noti che questo metodo, nonostante la sua lunghezza (nel caso in esame accettabilissima, ma che per formule più complicate può rivelarsi problematica), non solo ci permette di affermare che la confutazione ipotizzata è impossibile, ma consente di stabilire anche il perché. Infatti è l'interpretazione esaminata nella seconda riga (con P vero, Q falso) a portarci a un enunciato composto, P∧[(¬Q)∨(¬P)], vero. Ci chiediamo ora: quest'ultima importante informazione può essere ottenuta anche operando con il metodo dei tableaux?

Proviamo a costruire il tableau di tale enunciato (lasciamo al lettore il compito di motivare i passaggi, peraltro chiari):

```
P∧[(¬Q)∨(¬P)]
      |
      P
  (¬Q)∨(¬P)
   |      |
   P      P
  ¬Q     ¬P
          ♦
```

Non abbiamo, come previsto, ottenuto un tableau chiuso in quanto tale non risulta il ramo a sinistra. Consideriamo però l'ultimo nodo di questo ramo non chiuso, contenente P e ¬Q. L'informazione veicolata da ciò è preziosa: se P e ¬Q sono entrambi veri, cioè se P è vero e Q è falso, l'enunciato di partenza è vero; abbiamo trovato un'attribuzione di valori di verità che impedisce di considerare insoddisfacibile l'enunciato assegnato.

Pertanto la scelta del metodo dei tableaux rispetto a quello delle tavole di verità non ci ha fatto perdere informazioni importanti. Possiamo piuttosto dire che l'analisi dei *due* rami (al posto delle *quattro* righe) ci ha consentito di "accorpare" alcune interpretazioni il cui esame singolo sarebbe risultato ben poco utile, nella prospettiva di valutare l'insoddisfacibilità dell'enunciato composto.

Ad esempio, il ramo a destra riassume le ultime due righe della tavola:

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$(\neg Q)\vee(\neg P)$	$P\wedge[(\neg Q)\vee(\neg P)]$
V	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*
V	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*
F	*V*	*V*	*F*	*V*	*F*
F	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*

Per stabilire il valore di verità di $P\wedge[(\neg Q)\vee(\neg P)]$ quando P è falso non è necessario analizzare i valori di verità assunti dall'espressione tra le parentesi quadre al variare delle interpretazioni: la congiunzione di un enunciato falso e di un *qualsiasi* altro enunciato risulta infatti sempre falsa. È proprio la scelta di procedere per via grafica che si rivela decisiva per accorpare i casi non "singolarmente significativi" e per ottenere una concreta semplificazione del procedimento.

Se dunque la costruzione di un tableau semantico, almeno al semplice livello di calcolo delle proposizioni, non sembra essere l'elemento indispensabile che porta al salto di qualità tale da consentire, in assoluto, il raggiungimento di un risultato, la stessa possibilità di semplificare il procedimento può rivelarsi (didatticamente e non solo) importante, decisiva.

Riferimenti bibliografici

Bagni, G.T., 2007, *Rappresentare la matematica: simboli, parole, artefatti, figure*, Aracne, Roma

Bagni, G.T., 2008, Evert W. Beth. In: Furinghetti, F. & Giacardi, L. (Eds.). *The First Century of International Commission on Mathematical Instruction (1908–2008). History of ICMI. Portrait Gallery.* www.icmihistory.unito.it/portrait/beth.php

Bagni, G.T., in via di pubblicazione, *Interpretazione e didattica della matematica. Una prospettiva ermeneutica*

Ben–Ari, M., 1998, *Logica matematica per l'informatica*. A. Labella (Ed.), UTET Università, Roma

Beth, E.W. & Piaget, J., 1961, *Epistémologie mathematique et psychologie*. Presses Universitaires de France, Paris

Beth, E.W., 1950, Critical epochs in the development of the theory of Science. *The British Journal for the Philosophy of Science* 1, 1, 27

Beth, E.W., 1955, Remarks on natural deduction, *Indagationes Mathematicae* 17, 322–325

Beth, E.W., 1962, *Formal methods. An introduction to symbolic logic and to the study of effective operations in arithmetic and logic*. Reidel, Dordrecht

Beth, E.W., Mays, W. & Piaget, J., 1957, *Epistémologie génétique et recherche psychologique*. Presses Universitaires de France, Paris

Destouches, J.L. (Ed.), 1964, *E.W. Beth Memorial Colloquium: logic and foundations of science*. Paris, Institut Henri Poincaré, May 19–21, Reidel, Dordrecht

Dörfler, W., 2005, Diagrammatic Thinking: Affordance and Constraints. In M.H.G. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign–Grounding Mathematics Education* (pp. 57–66), Springer, New York

Dörfler, W., 2006, Inscriptions as objects of mathematical activities. In J. Maasz & W. Schloeglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 97–111). Sense Publishers, Rotterdam/Taipei

Franchella, M., 2002, Evert Willem Beth's contributions to the philosophy of logic, *Philosophical Writings* 21, 1–23

Gentzen, G., 1934, Untersuchungen über das Logische Schliessen, *Math Z.* 39, 176–210, 405–431 (trad. in: M.E. Szabó, Ed., *The collected papers of Gerhard Gentzen*, North–Holland, Amsterdam 1969)

Heyting, A., 1966, Evert Willem Beth: in memoriam, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, VII, 4, 289–295

Hintikka, J., 1955, Form and content in quantification theory, *Acta Philosophica Fennica* 8, 7–55

Marietti, S., 2001, *Icona e diagramma. Il segno matematico in Charles Sanders Peirce*, LED, Milano

Marietti, S., 2005, Charles Peirce. Pensiero e scrittura. *Rivista di filologia cognitiva*, febbraio. w3.uniroma1.it/cogfil/peircei.html

Peirce, Ch.S., 1980, *Semiotica*, Einaudi, Torino

Piaget, J., 1966, In memory of E.W. Beth (1908–1964). *Mathematical epistemology and psychology*, XI–XII, Reidel, Dordrecht

Piaget, J., 1970, *Genetic epistemology*, Columbia University Press, New York

Piaget, J., Beth, E.W., Dieudonné, J., Lichnerowicz, A., Choquet, V., & Gattegno, C., 1955, *L'enseignement des mathématiques.* Delachaux et Niestlé, Paris

Schütte, K., 1956, Ein System des verknüpfenden Schliessens, *Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung* 2, 56–67

Smullyan, R.M., 1968, *First–order Logic*, Springer, Berlin

Staal, J.F., 1965, E.W. Beth, 1908–1964, *Dialectica* 19, 158–179

van Ulsen, P., 2000, *E.W. Beth als logicus*, Proefschrift Universiteit van Amsterdam

Giorgio T. Bagni