Bagni, G.T. (1997), La visualizzazione nella scuola secondaria superiore, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20B, 4, 309-335

Visualizzazione e didattica della matematica nella scuola secondaria superiore

GIORGIO T. BAGNI (*)

Summary. The role of semiotic representation is very important in the learning of mathematics. In this paper some activities of mathematical modelling are related to the status of visualization in classroom practice in Italian High School (pupils aged 14-19 years); in particular, the influence of visualization on some algebraic and analytic methods is studied by three tests. This paper analyzes several didactical implications connected to visualization: for example, the graphic representation (and in particular the graphic representation of a real function) is often tacitly considered the last, main act of the whole study of a mathematical object; it is possible to underline that this procedure may be uneffective for the correct caracterization of a concept and for the developing of the ability to use and to coordinate different registers of representation.

PREMESSA: UNA RICERCA IN DUE FASI

«*Le rappresentazioni visuali, le immagini mentali, le impressioni e le esperienze associate al nome del concetto possono essere tradotte in forme verbali. Ma è importante ricordare che queste forme verbali non sono state le prime cose evocate nella nostra memoria quando abbiamo sentito o visto il nome del concetto... La gente ricorda gli aspetti visuali di un concetto meglio dei suoi aspetti analitici*»

S. Vinner [Vinner, 1992, p. 197 e p. 212]

La visualizzazione è un modo di rappresentare "esternamente" oggetti matematici. Alcuni Autori, recentemente, hanno approfondito le questioni connesse alla rappresentazione in matematica. In particolare, R. Duval osserva che «gli oggetti matematici non sono direttamente accessibili alla percezione... come sono gli oggetti comunemente detti 'reali' o fisici'»; pertanto «le diverse rappresentazioni semiotiche di un oggetto matematico sono assolutamente necessarie»; egli evidenzia tuttavia che «è l'oggetto rappresentato che importa, e non le sue diverse rappresentazioni semiotiche possibili» e che «la distinzione tra un oggetto e la sua rappresentazione è dunque un punto strategico per la compren-

(*) Professore a contratto presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna. Le traduzioni nel presente articolo sono nostre.

sione della matematica» [Duval, 1993, pp. 37 e 38]. Del resto, la varietà dei possibili registri rappresentativi è, per Duval, non solo utile per l'apprendimento, ma addirittura indispensabile: «Il funzionamento cognitivo del pensiero umano si rivela inseparabile dall'esistenza di una diversità di registri semiotici di rappresentazione. Se chiamiamo *sémiosis* l'apprendimento o la produzione di una rappresentazione semiotica e *noésis* l'apprendimento concettuale di un oggetto, dobbiamo affermare che la *sémiosis* è inseparabile dalla *noésis*» [Duval, 1993, pp. 39-40].

Tra le possibili rappresentazioni di un "oggetto" matematico, la rappresentazione grafica è assai importante nella didattica della matematica. Ricorriamo ancora a Duval, il quale sottolinea che «le rappresentazioni grafiche sono delle rappresentazioni semiotiche allo stesso titolo di quanto lo siano le figure geometriche, la scrittura algebrica o la lingua»; tuttavia l'apprendimento mediante le rappresentazioni grafiche «esige un particolare lavoro» e «non è più possibile affidarsi per la loro utilizzazione all'interpretazione spontanea di figure e di immagini» [Duval, 1994b].

Uno studio ben noto di E. Fischbein è dedicato specificamente alla rappresentazione visuale di oggetti matematici ed alla sua importanza nella didattica della matematica [Fischbein, 1993]: illustrando la "teoria dei concetti figurali", Fischbein giunge a concludere che «l'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei contenuti concettuali su quelli figurali, non è un processo naturale. Essa dovrebbe costituire una continua, sistematica, principale attività del docente» [Fischbein, 1993, p. 156]. Se dunque con il termine "concetto figurale" intendiamo una sorta di (indispensabile) «fusione tra concetto e figura» [Fischbein, 1993, p. 143], possiamo osservare, seguendo Fischbein, che «il processo di costruzione dei concetti figurali nella mente dello studente non può essere considerato un effetto spontaneo dei tradizionali corsi di geometria» [Fischbein, 1993, p. 156].

La visualizzazione, in qualità di mezzo per la rappresentazione di oggetti matematici, assume dunque importanza primaria nella didattica della matematica [Vinner, 1992]; in particolare il suo ruolo sembra essere essenziale in alcuni "capitoli" della didattica della matematica nella scuola secondaria superiore. In questa ricerca abbiamo preso in considerazione due argomenti significativi del tradizionale curriculum del Liceo scientifico ed abbiamo esaminato lo stato attuale della didattica riguardante tali argomenti con riferimento alla visualizzazione.

Lo scopo della nostra ricerca, più in generale, è quindi di esaminare il ruolo della visualizzazione nella didattica della matematica del Liceo scientifico, per mostrare che una pratica didattica poco attenta può comportare una sua distorta (e, come vedremo, controproducente) utilizzazione; giungeremo infine a proporre alcune indicazioni per una sua possibile ed auspicabile rivalutazione.

Abbiamo pertanto ripreso un recente studio (1994-1995) di M. Kaldrimidou riguardante la visualizzazione, ed in particolare la possibilità di visualizzare alcuni procedimenti algebrici elementari [Kaldrimidou, 1995]. Un approfondimento delle modalità di impiego delle tecniche di visualizzazione è riconosciuto dalla stessa ricercatrice: in un precedente lavoro, M. Kaldrimidou osservava infatti: «Abbiamo potuto constatare presso gli studenti un'assenza di riflessione sistematica sulla matematica e sui modi di acquisirla, accompagnata da concezioni stereotipate... Le immagini mentali, le questioni del loro legame reciproco e... le strategie utilizzate, ... meritano, a nostro avviso, di essere approfondite» [Kaldrimidou, 1987, pp. 156-157].

Abbiamo inoltre esaminato il ruolo della visualizzazione nella didattica della funzione, uno dei principali concetti del programma di matematica del Liceo scientifico; una funzione può essere assegnata, "descritta" in molti modi: può essere visualizzata, ad esempio, attraverso il suo diagramma cartesiano e tale pratica ha importanti conseguenze didattiche.

Possiamo dunque così sintetizzare il progetto della nostra ricerca:

Struttura della ricerca

1. Visualizzazione di alcuni procedimenti algebrici	**2. Visualizzazione del concetto di funzione**
Analisi della ricerca di M. Kaldrimidou (1994-1995)	*Test 2* (la visualizzazione nella didattica del concetto di funzione, classe III)
Test 1 (come controllo) (utilità della visualizzazione nell'opinione degli allievi)	*Test 3* (la visualizzazione nella didattica del concetto di funzione, classe V)

3. Conclusione

La visualizzazione nel curriculum tradizionale del Liceo scientifico: situazione attuale, possibilità, prospettive.

1. PRIMA PARTE: ALGEBRA E GEOMETRIA

1.1. L'ALGEBRA GEOMETRICA GRECA

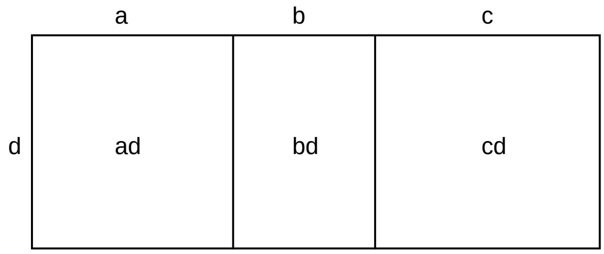
«*Il libro secondo venne giustamente definito dallo Zeuthen come quello dell'algebra geometrica: ciò perché in esso vengono presentate, in veste geometrica, proposizioni che corrispondono a nostre formule fondamentali di algebra elementare*»

A. Frajese [Euclide, 1970, p. 155]

Alcune elementari identità algebriche possono essere utilmente visualizzate ricorrendo all'algebra geometrica greca (termine coniato da H.G. Zeuthen [Van der Waerden, 1983]), illustrata nel II libro degli *Elementi* euclidei; l'idea centrale che caratterizza tale procedimento consiste nella rappresentazione dei numeri reali attraverso grandezze geometriche (ad esempio mediante segmenti). Molte operazioni possono essere visualizzate attraverso figure: se due numeri sono identificati da due segmenti, il loro prodotto corrisponde ad un rettangolo avente tali segmenti per dimensioni; un'uguaglianza di prodotti è così ricondotta all'equiestensione dei corrispondenti rettangoli. Possono così essere enunciate regole di calcolo generali, riferite a numeri reali qualsiasi.

La proposizione 1 del II libro degli *Elementi*, ad esempio, esprime elegantemente la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

Proposizione 1 del II libro degli *Elementi*. Se si danno due segmenti, e si divide uno di essi in quante parti si voglia, il rettangolo compreso dai due segmenti è uguale alla somma dei rettangoli compresi dal segmento indiviso e da ciascuna delle parti dell'altro [Euclide, 1970, p. 159].



La sua moderna espressione simbolica è la seguente:

$$(a+b+c)d =$$
$$= ad+bd+cd$$

La dimostrazione delle proposizioni di algebra geometrica può essere ricavata direttamente dall'osservazione delle figure e ciò rende tali risultati assai intuitivi e quindi utili dal punto di vista didattico [Dieudonné, 1989, p. 43]: l'additività delle aree, sulla quale si basano le dimostrazioni dell'algebra geometrica piana, è immediatamente intuita dall'allievo, che viceversa può trovarsi talvolta in difficoltà nell'applicazione di alcune proprietà delle operazioni (come la proprietà distributiva).

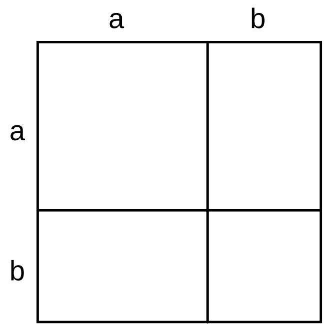
1.2. LA RICERCA DI M. KALDRIMIDOU (1994-1995)

Il ricorso all'immagine offre dunque allo studente la possibilità di accostarsi gradualmente ed efficacemente all'astrazione algebrica; ma, come vedremo, la visualizzazione è spesso considerata con qualche diffidenza, e talvolta addirittura esplicitamente evitata, dagli studenti e dagli insegnanti di matematica. Un recente studio di M. Kaldrimidou ha evidenziato un atteggiamento sostanzialmente negativo nei confronti delle rappresentazioni visuali; è stato proposto un test a studenti (del terzo anno universitario del corso di matematica) e ad insegnanti di matematica, in Grecia [Kaldrimidou, 1995].

Analizziamo uno dei quesiti proposti nel test di M. Kaldrimidou; in esso viene fatto riferimento alla quarta proposizione dell'algebra geometrica euclidea (che afferma: se si divide a caso un segmento, il quadrato di tutto il segmento è uguale alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo compreso dalle parti [stesse] [Euclide, 1970, p. 163]). Il quesito è il seguente:

"**1**. $(a+b)^2 =$
$= (a+b)(a+b) =$
$= a^2+ba+ab+b^2 =$
$= a^2+2ab+b^2$

2.



Tra i due metodi per provare che: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, qual è il più appropriato, dal punto di vista matematico? Giustificate la risposta".

La maggioranza degli studenti e degli insegnanti ha scelto la rappresentazione analitica piuttosto che quella visuale:

Studenti		**Insegnanti**	
Analitica	68.3%	Analitica	61.5%
Visuale	26.7%	Visuale	23.1%
pref. non espressa	5.0%	pref. non espressa	15.4%

Dalle motivazioni espresse da coloro i quali hanno optato per la risoluzione analitica emergono elementi che indicano una qualche diffidenza nei confronti della visualizzazione. Riassumiamo le principali perplessità denunciate:

❶ la rappresentazione visuale viene da alcuni considerata un mezzo non sempre adatto per rappresentare informazioni, in matematica; ciò dipende dalla specificità, dalla particolarità di ogni rappresentazione visuale;

❷ negli insegnanti sono presenti ostacoli di natura epistemologica (nota M. Kaldrimidou: «Si cerca di ottenere metodi generali, si richiede esattezza, si cerca di avere delle teorie complete... E basta talvolta il carattere algebrico del metodo affinché la soluzione sia considerata più 'matematica'. Di conseguenza, poiché le rappresentazioni visuali sono prive di queste caratteristiche, non sono considerate come equivalenti ai metodi algebrici, essendo i due metodi diversi quanto al loro status epistemologico» [Kaldrimidou, 1995]);

❸ negli studenti le rappresentazioni visuali sono frequentemente causa di timore, di incertezza: il *contratto didattico* sembra attribuire notevole importanza all'espressione algebrica a scapito di quella figurale [Kaldrimidou, 1995].

1.3. METODOLOGIA E RISULTATI DEL TEST 1

I risultati ottenuti da M. Kaldrimidou sono riferiti a studenti universitari di matematica e ad insegnanti greci. Abbiamo ritenuto opportuno proporre nuovamente il test ad alcuni studenti italiani di scuola secondaria superiore, per verificare l'accettazione della visualizzazione (riferita ad alcuni procedimenti algebrici) in tale livello scolastico nel nostro Paese.

Il quesito presentato nel paragrafo precedente è stato proposto a 105 allievi di quattro classi degli ultimi due anni (IV e V) di un Liceo scientifico di Treviso (i quali avevano seguito, fino al momento del test, un programma di matematica tradizionale). La maggioranza degli studenti che ha espresso una preferenza ha optato per la rappresentazione analitica:

rappresentazione analitica	62 studenti	60%
rappresentazione visuale	30 studenti	29%
pref. non espressa	13 studenti	11%

Dunque i risultati concordano qualitativamente con quelli ottenuti da Kaldrimidou (sebbene dal punto di vista quantitativo la differenza sia meno rilevante).

1.4. MOTIVAZIONI ESPRESSE DAGLI ALLIEVI (TEST 1)

Gli allievi che hanno espresso una preferenza hanno giustificato la propria scelta fornendo alcune motivazioni interessanti. Abbiamo riunito in quattro gruppi le affermazioni degli allievi.

➊ Alcuni studenti (18, pari al 17%) tra coloro i quali hanno optato per la rappresentazione analitica hanno sottolineato positivamente la presenza esplicita di tutti i passaggi (che sembra rendere il metodo convincente ed affidabile); riportiamo alcune giustificazioni: "Il metodo algebrico è preferibile perché mostra tutti i passaggi" (Luisa, cl. IV). "Il primo metodo è più appropriato perché si esegue la scomposizione" (Luca, cl. IV). "La dimostrazione del primo metodo è lo sviluppo di un quadrato svolto correttamente e in ordine; il secondo è una raffigurazione e non sappiamo se le misure sono esatte" (Chiara, cl. IV). È evidente, da quest'ultima affermazione, l'incertezza relativa alla misura dei segmenti, ovvero la differenza tra la considerazione dei reali a, b in àmbito algebrico e come misure di segmenti.

➋ Alcuni studenti (6, pari al 6%) tra coloro i quali hanno optato per la rappresentazione analitica hanno ritenuto che la natura algebrica del problema suggerisse o addirittura richiedesse un'impostazione risolutiva di tipo algebrico; riportiamo alcune giustificazioni espresse: "Il primo è più appropriato in quanto per dimostrare un'espressione algebrica è meglio usare un procedimento algebrico" (Marco F., cl. IV). "Il primo metodo è più appropriato perché dimostra una proprietà algebrica con un procedimento algebrico" (Anna, cl. V). Come vedremo nel prossimo paragrafo, in questo caso, particolarmente interessante, emerge l'ostacolo di una rappresentazione eterogenea rispetto alla richiesta: i due linguaggi ("algebrico" e "geometrico") sono "isomorfi", ma il riconoscimento della loro sostanziale equivalenza viene a costituire un ostacolo per l'allievo.

❸ Alcuni studenti (4, pari al 4%) tra coloro i quali hanno optato per la rappresentazione analitica hanno sottolineato la difficoltà della risoluzione visuale, non comune nella pratica didattica, ed il conseguente timore: "Se dovessi risolvere $(a+b)^2$ lo farei con il metodo algebrico per il fatto che sono abituata a lavorare più con i numeri che con le figure" (Paola, cl. IV). "La prima soluzione è preferibile perché è sicuramente esatta e perché può essere utilizzata anche quando non si riesce a visualizzare facilmente l'operazione" (Cristina, cl. V) ([1]).

❹ Tra gli studenti che hanno scelto la rappresentazione visuale, le giustificazioni riguardano la sua evidenza, la semplicità e l'assenza di calcoli: "Preferisco il secondo metodo: la dimostrazione è evidente, non è necessario eseguire calcoli" (Fabrizio, cl. IV). "Il primo metodo è meno appropriato perché si riduce ad un meccanico procedimento basato su calcoli" (Francesco, cl. V).

1.5. ANALISI DELLE MOTIVAZIONI ESPRESSE DAGLI ALLIEVI E CONCLUSIONI RELATIVE AL TEST 1

Quanto precedentemente annotato, nonostante sia riferito ad un particolare impiego della visualizzazione, è indice di una situazione abbastanza chiara: non pochi tra gli allievi intervistati (il 17% del totale, quasi un terzo di coloro i quali hanno optato per la risoluzione analitica) hanno sottolineato la rassicurante presenza di tutti i passaggi algebrici, contrapposta all'incertezza, alla difficoltà del procedimento visuale (pochi hanno sottolineato l'evidenza e la semplicità della rappresentazione visuale).

Molti studenti sembrano principalmente preoccupati di scegliere il metodo risolutivo più affidabile, tradizionalmente sicuro; nessuno degli allievi intervistati, ad esempio, ha osservato che l'errore che vede $(a+b)^2$ identificato in a^2+b^2 (omettendo il "doppio prodotto") viene ad essere quasi impossibile se si tiene presente la rappresentazione visuale, mentre può non essere infrequente se la risoluzione è ridotta alla mnemonica applicazione della formula:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

([1]) Emerge qui con forza il ruolo primario della figura nella prassi didattica; si veda [D'Amore, 1995].

Interessante è l'affermazione secondo la quale la natura algebrica del problema suggerisce o addirittura richiede un'impostazione risolutiva di tipo algebrico (affermazione riferibile al 6% degli studenti, un decimo di coloro i quali hanno optato per la risoluzione analitica): l'allievo si sente dunque portato da una clausola del *contratto didattico* a risolvere l'esercizio assegnato in modo da incontrare l'approvazione metodologica dell'insegnante. Questa preoccupazione giunge a limitare le possibilità di impostazione della risoluzione del problema.

Possiamo concludere che la visualizzazione dei procedimenti algebrici non gode di una reputazione particolarmente prestigiosa tra gli allievi della scuola secondaria superiore (e tra i loro insegnanti). Ma sarebbe forse inesatto estendere questa situazione a *tutti* i procedimenti collegati alla visualizzazione: come potremo constatare, ad esempio, la didattica delle funzioni è saldamente basata su tecniche di visualizzazione: un legame che talvolta giunge ad identificare lo studio di una funzione con il tracciamento del suo diagramma cartesiano. Da questo punto di vista, dunque, l'esaminata ricerca di M. Kaldrimidou richiede una più dettagliata analisi.

2. SECONDA PARTE: LE FUNZIONI

2.1. FUNZIONI E DIAGRAMMA CARTESIANO

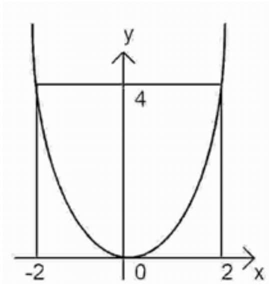
«*Definite le funzioni in un modo così generale, finché non si pongano altre condizioni, non si avranno per esse proprietà generali che includano delle relazioni fra i valori che esse hanno in punti differenti qualunque (cioè per valori differenti di x) quand'anche questi punti si suppongano arbitrariamente vicini l'uno all'altro, perché i valori che esse avranno potranno essere tutt'affatto qualunque e indipendenti del tutto gli uni dagli altri*»

U. Dini
[Dini, 1878, p. 36]

Nella didattica delle funzioni, assai frequente è il ricorso ad un'immagine in grado di rendere immediatamente accessibile la corrispondenza tra gli elementi del dominio e quelli del codominio; ad esempio, per visualizzare la corrispondenza che ad ogni reale associa il proprio quadrato si può ricorrere alla rappresentazione sagittale.

...	$\rightarrow$	...
-2	$\rightarrow$	4
$-\sqrt{3}$	$\rightarrow$	3
0	$\rightarrow$	0
1	$\rightarrow$	1
$5/4$	$\rightarrow$	$25/16$
6	$\rightarrow$	36
...	$\rightarrow$	...

Un'altra rappresentazione grafica di una funzione è data dal diagramma cartesiano; la corrispondenza sopra esaminata è indicata in un piano cartesiano mediante una parabola di equazione $y = x^2$, con il vertice coincidente con l'origine degli assi.



Esamineremo in particolare quest'ultimo metodo di rappresentazione, per la vastissima importanza che esso viene ad assumere nel corso del curriculum scolastico tradizionale del Liceo scientifico.

Osserviamo infatti che molto spesso, nei manuali scolastici per le scuole secondarie superiori, con la sola equazione $y = f(x)$ viene fatto riferimento ai punti del piano cartesiano aventi coordinate appartenenti all'insieme:

$$\{(x; y) \in \mathrm{D} \times \mathbf{R} : y = f(x)\} \qquad \text{(dove } \mathrm{D} \subseteq \mathbf{R} \text{ è il dominio della funzione } f\text{)}$$

Talvolta, dunque, con l'equazione $y = f(x)$ viene addirittura indicata la stessa funzione f, (cioè si scrive: "*data la funzione* $y = f(x)$..."), oppure, il suo grafico cartesiano (cioè si scrive: "*data la curva* $y = f(x)$..."). Quelli ora citati sono *abusi di linguaggio* (seppure la loro gravità sia smorzata dall'uso, improprio, ma frequente): parlando di una *funzione* f di dominio D a valori in **R** si fa riferimento ad una particolare *relazione*, ovvero ad un *sottoinsieme di* D×**R** (e, pertanto, non ad *equazioni*, né a *grafici*...); l'equazione $y = f(x)$, invece, è necessaria solamente per la rappresentazione grafica della funzione f. Infine, il diagramma cartesiano di $y = f(x)$ (o della funzione f) altro non è che un *insieme di punti*, legati a $\{(x; y) \in \mathrm{D} \times \mathbf{R} : y = f(x)\}$ da una corrispondenza biunivoca.

Il ricorso alla visualizzazione è inoltre spesso collegato intuitivamente alle funzioni *continue* e la stessa nozione di continuità di una funzione viene fatta risalire a caratteristiche grafiche. Una funzione viene cioè detta *continua* in un punto del proprio dominio quando essa ha il diagramma cartesiano che, in corrispondenza di quel punto, può essere tracciato... *senza staccare la matita dal foglio*: nel manuale universitario di S.M. Nikolskij [Nikolskij, 1985, p. 88] è citata esplicitamente questa immagine. Una funzione continua in tutto il proprio dominio viene ad essere, quindi, una funzione il cui diagramma è disegnabile *continuamente*, ovvero senza obbligatorie "interruzioni", senza "strappi" o "salti", in tutto il dominio fissato (anche T.M. Apostol fa riferimento a "irregolarità" grafiche collegate alle funzioni discontinue [Apostol, 1977, p. 158]; naturalmente, una simile descrizione della continuità non dovrebbe omettere un riferimento alla connessione del dominio).

Non vogliamo certamente negare l'importanza e l'utilità della visualizzazione nella didattica delle funzioni. Ma un uso esagerato, acritico e non controllato delle tecniche di visualizzazione può portare a situazioni sostanzialmente scorrette e didatticamente controproducenti.

Non sempre, infatti, nella scuola secondaria superiore, l'allievo sa adeguatamente svincolare il concetto di funzione dalla sua visualizzazione grafica. Può ad esempio accadere che la considerazione di funzioni il cui grafico cartesiano non è... disegnabile venga a costituire un arduo ostacolo da superare. Inoltre, l'ampia consuetudine che, negli esempi e negli esercizi affrontati, l'allievo instaura con alcune funzioni continue (aventi per grafico, ad esempio, rette, parabole, curve logaritmiche...) può essere causa del consolidarsi dell'impressione secondo cui la continuità sia da considerarsi alla stregua di regola, mentre la discontinuità come eccezione. In altri termini, l'allievo sembra associare implicitamente e direttamente al concetto di *"funzione"* il suo grafico e quindi una *"curva"* con le immancabili, consuete caratteristiche di *"continuità"*, senza rendersi conto che una *funzione continua* dovrebbe invece essere considerata come un caso (molto) particolare di funzione generalmente intesa [Bagni, 1994].

Al fine di esaminare l'introduzione della nozione di funzione, ed in particolare di funzione continua, può essere utile il ricorso ad alcuni classici esempi dell'Analisi matematica [Van Rooj-Schikhof, 1982]. Una funzione il cui esame riveste una sicura importanza didattica è la *funzione di Dirichlet*, introdotta, per ogni x reale, dalla definizione seguente [Bagni, 1993, p. 468]:

DEFINIZIONE 1. Si dice funzione di Dirichlet la funzione $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ caratteristica dell'insieme dei reali irrazionali: $x \to \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)$.

(Alcuni Autori [Prodi, 1970, p. 308] preferiscono definire tale funzione nel solo [0; 1], o riferirne la definizione alla funzione caratteristica dell'insieme dei reali razionali; la valenza didattica dell'esempio, tuttavia, resta immutata).

La funzione di Dirichlet assume valore 1 in corrispondenza di ogni x reale irrazionale e 0 in corrispondenza di ogni x reale razionale; è possibile provare che essa è discontinua per ogni x reale (la dimostrazione è assai semplice, e può essere proposta, con pieno profitto degli allievi, a livello di scuola secondaria superiore [Bagni, 1994]). *Si noti che la valutazione intuitiva della discontinuità della funzione di Dirichlet non è direttamente ed esclusivamente ricollegabile all'esame qualitativo del suo grafico cartesiano*: il grafico della funzione di Dirichlet, infatti, a causa delle sue "frequentissime" discontinuità, non può essere disegnato, se non per un numero finito di punti (approssimativamente, esso potrebbe essere immaginato come un "fittissimo susseguirsi di punti", collocati sia sull'asse delle x, sia sulla retta di equazione $y = 1$).

Faremo inoltre riferimento alla funzione definita, per ogni x reale, nel modo seguente [Gelbaum, 1961, p. 124] [Gelbaum-Olmsted, 1979, pp. 34-35]:

DEFINIZIONE 2. Sia $x \to f(x)$ la funzione $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ così definita:

- se il reale x *è razionale*, con $x = m/n$, essendo m intero, n intero positivo, con la frazione m/n ridotta ai minimi termini, allora: $f(x) = 1/n$;
- se il reale x *è irrazionale*, allora: $f(x) = 0$.

Indicheremo tale funzione con la denominazione di *funzione di Gelbaum*. (Osserviamo che essa è ben definita: infatti se x è un razionale, con $x = m/n$, con m intero, n intero positivo, in modo che la frazione m/n sia ridotta ai minimi termini, allora m, n sono univocamente determinati [Gelbaum, 1962, p. 53]).

Lo studio della funzione di Gelbaum elude ogni interpretazione basata sull'esame del diagramma cartesiano. È infatti impossibile visualizzare con qualche precisione l'andamento del grafico di una funzione come quella sopra descritta (non può neppure essere immaginata un'approssimata rappresentazione grafica come quella indicata per la funzione di Dirichlet). È inoltre possibile provare che la funzione di Gelbaum è continua per ogni x reale irrazionale e discontinua per ogni x reale razionale ([2]): ma anche la verifica di tale continuità per x irrazionale non può in alcun modo essere collegata all'esame del diagramma cartesiano.

2.2. METODOLOGIA E RISULTATI DEL TEST 2

Il test seguente è stato proposto agli allievi di tre classi di III Liceo scientifico a Treviso, per un totale di 75 studenti (i quali avevano seguito, fino al momento del test, un programma di matematica tradizionale; in particolare, avevano da poco tempo trattato il concetto di funzione e le varie possibilità di esprimere una funzione; il piano cartesiano era stato da poco introdotto).

A) Sono assegnate le seguenti relazioni tra numeri reali; per ciascuna di esse disegnare (se possibile) il grafico cartesiano e dire, giustificando la risposta, se si tratta di una funzione:

1) R_1 è la relazione tra numeri reali che ad ogni $x\in\mathbf{R}$ associa il reale $2x$.

2) R_2 è la relazione tra numeri reali che ad ogni $x\in\mathbf{R}$ associa il reale 1.

([2]) La dimostrazione di ciò è notevolmente più impegnativa della dimostrazione della discontinuità della funzione di Dirichlet; una traccia di tale dimostrazione, che può essere affrontata dagli allievi della scuola secondaria superiore, è proposta in [Bagni, 1994, pp. 30-31].

3) R_3 è la relazione tra numeri reali che:

- se il reale *x è razionale*, allora a *x* associa il reale 0;
- se il reale *x è irrazionale*, allora a *x* associa il reale 1.

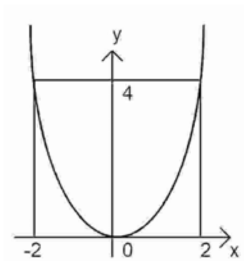
4) R_4 è la relazione tra numeri reali che:

- se il reale *x è razionale*, con $x = m/n$, essendo *m* intero, *n* intero positivo, in modo che la frazione *m/n* sia ridotta ai minimi termini, allora a *x* associa $1/n$;
- se il reale *x è irrazionale*, allora a *x* associa il reale 0.

B) Tra i modi seguenti per esprimere la relazione che ad ogni numero reale associa il proprio quadrato, qual è il più appropriato dal punto di vista matematico? Giustificare la risposta.

1) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$x \to x^2$

2) $x \to y$



3) $\ldots \to \ldots$
$-2 \to 4$
$-\sqrt{3} \to 3$
$0 \to 0$
$1 \to 1$
$5/4 \to 25/16$
$6 \to 36$
$\ldots \to \ldots$

Osserviamo che il punto 2 della domanda B del test proposto prevedeva l'indicazione di una curva... *simile* ad una parabola, con precisati i *soli* punti (–2; 4), (0; 0) e (2; 4); tale rappresentazione è dunque pesantemente incompleta, in rapporto alla relazione che ad *ogni* numero reale associa il proprio quadrato. Eppure, come vedremo, non pochi allievi hanno ugualmente optato per questo modo di rappresentare la relazione in questione.

I risultati ottenuti sono riportati nelle tabelle seguenti:

Quesito A:

	Disegnano correttamente il grafico	Rispondono che si tratta di funzione	Rispondono che *non* si tratta di funzione	Non rispondono
A1	69 (92%)	71 (95%)	1 (1%)	3 (4%)
A2	61 (81%)	54 (72%)	19 (25%)	2 (3%)
A3	0 (0%)	34 (46%)	31 (41%)	10 (13%)
A4	0 (0%)	21 (28%)	40 (53%)	14 (19%)

Quesito B:

Scelgono 1	Scelgono 2	Scelgono 3	Non rispondono
27 (37%)	26 (34%)	14 (19%)	8 (10%)

Per quanto riguarda il quesito A, osserviamo che la consueta presenza del grafico di $y = 2x$ (A1, una familiare retta, correttamente tracciata dal 92% degli allievi) è associata alla qualifica di funzione attribuita alla corrispondenza $x \to 2x$ (95%). Qualche allievo ha trovato difficoltà ad identificare la funzione costante (A2, il diagramma è tracciato correttamente dall'81% degli allievi; solo il 72% identifica la corrispondenza come una funzione). L'incertezza aumenta sensibilmente nel caso delle funzioni di Dirichlet (A3) e di Gelbaum (A4), delle quali non è possibile tracciare il grafico cartesiano.

Per quanto riguarda il quesito B, indicativa è la sostanziale parità tra la rappresentazione della corrispondenza in forma simbolica (B1) e la rappresentazione grafica (B2). Gioverà rammentare che gli allievi, in questa fase del corso, avevano appreso da appena un paio di mesi la tecnica di rappresentazione grafica di una relazione nel piano cartesiano; la rappresentazione sagittale, spesso utilizzata per introdurre didatticamente il concetto di funzione, è indicata come metodo preferito dal 19% degli allievi.

2.3. MOTIVAZIONI ESPRESSE DAGLI ALLIEVI (TEST 2)

Alcuni allievi hanno giustificato per iscritto le proprie scelte in base a considerazioni legate al concetto di funzione; in particolare, abbastanza frequente (quesito A2) è l'errore che nega la qualifica di funzione alla corrispondenza che ad ogni $x \in \mathbf{R}$ associa il reale 1 a causa della sua non iniettività: a questo errore sono ricollegate le risposte di 12 studenti sui 19 che hanno risposto in modo scorretto al quesito A2.

Le incertezze relative ai quesiti A3 e A4 sono spesso collegate alla obiettiva difficoltà (o all'impossibilità) di tracciare il grafico cartesiano delle corrispondenze proposte: alcuni allievi hanno espresso disagio nei confronti di esempi di relazioni inusuali nella pratica didattica ("Non ho capito l'esercizio", Chiara; oppure: "Non avevo mai incontrato una funzione del genere, non sapevo neanche se era possibile farla", Carlo), soprattutto con riferimento alla funzione di Gelbaum (A4); ma la netta maggioranza di coloro i quali hanno negato alle funzioni di Dirichlet e di Gelbaum la qualifica di funzione ha evidenziato l'impossibilità di tracciare il loro diagramma cartesiano: questa giustificazione è presente nelle risposte di ben 19 studenti tra i 31 che non hanno considerato funzione la funzione di Dirichlet (A3) e di 22 studenti (spesso gli stessi) tra i 40 che non hanno considerato funzione la funzione di Gelbaum (A4).

2.4. ANALISI DELLE MOTIVAZIONI ESPRESSE DAGLI ALLIEVI E CONCLUSIONI RELATIVE AL TEST 2

Possiamo concludere che il concetto di funzione appare frequentemente collegato al diagramma cartesiano della relazione esaminata; negli allievi, questa stretta connessione viene ad essere talvolta preponderante sulla stessa valutazione delle caratteristiche proprie di una funzione, addirittura a determinare la caratteristica discriminante principale che consente di accettare una relazione come una funzione. Alla stessa corrispondenza in esame, dunque, è sovrapposta per importanza la possibilità della pratica realizzazione del suo diagramma: una relazione è una funzione quando ammette come grafico cartesiano una curva con alcune ben determinate caratteristiche (ad esempio, una retta parallela all'asse delle ordinate deve incontrare la curva in uno ed in un solo punto...).

Questa situazione, particolarmente intuitiva e quindi in sé didatticamente efficace ed importante, dovrebbe però essere adeguatamente tenuta sotto controllo dall'insegnante ([3]): un'esagerata, totalizzante importanza attribuita alla visualizzazione grafica di una funzione rischia infatti di portare l'allievo ad una comprensione distorta del carattere di alcune relazioni (quali la funzione di Dirichlet e la funzione di Gelbaum) che, non essendo direttamente riconducibili ad una curva continua, possono essere addirittura escluse dal novero delle funzioni.

2.5. METODOLOGIA E RISULTATI DEL TEST 3

Abbiamo ritenuto importante verificare l'evoluzione della situazione rilevata nella III classe del Liceo scientifico e sopra presentata: lo stesso test riportato nel paragrafo 2.2 è stato proposto agli allievi di tre classi di V Liceo scientifico a Treviso, per un totale di 66 allievi (i quali avevano seguito, fino al momento del test, un programma di matematica tradizionale).

I risultati ottenuti sono riportati nelle tabelle seguenti:

Quesito A:

	Disegnano correttamente il grafico	Rispondono che si tratta di funzione	Rispondono che *non* si tratta di funzione	Non rispondono
A1	66 (100%)	65 (98%)	0 (0%)	1 (2%)
A2	65 (98%)	58 (88%)	5 (7%)	3 (5%)
A3	0 (0%)	39 (59%)	18 (27%)	9 (14%)
A4	0 (0%)	19 (29%)	22 (33%)	25 (38%)

([3]) Impossibile non andare col pensiero all'osservazione di Fischbein, precedentemente citata, sulla responsabilità degli insegnanti [Fischbein, 1993, p. 156].

Quesito B:

Scelgono 1	Scelgono 2	Scelgono 3	Non rispondono
22 (33%)	38 (58%)	4 (6%)	2 (3%)

Un primo raffronto dei risultati del test relativamente al quesito A rivela che i due anni di studio che separano gli allievi di V Liceo scientifico dagli allievi di III **non** sembrano avere migliorato in termini radicali la comprensione del concetto di funzione relativamente alle funzioni di Dirichlet (A3) e di Gelbaum (A4): esse sono state infatti riconosciute come funzioni rispettivamente dal 59% (in III la percentuale era del 46%) e dal 29% (in III la percentuale era del 28%) degli studenti di V.

Per quanto riguarda il quesito B, la sostanziale parità che caratterizzava le scelte B1 e B2 nei risultati del test somministrato agli allievi di III Liceo scientifico lascia il posto ad una netta preferenza accordata dagli allievi di V alla rap presentazione grafica nel piano cartesiano (il 58% per la rappresentazione grafica contro il 33% per la rappresentazione analitica). La rappresentazione sagittale, che in III godeva di un 19% di preferenze, ma che viene pressoché accantonata nella pratica del triennio superiore del Liceo scientifico, sembra relegata ad un ruolo del tutto secondario (è ricordata soltanto dal 6% degli studenti di V).

2.6. MOTIVAZIONI ESPRESSE DAGLI ALLIEVI (TEST 3)

L'errore che nega la qualifica di funzione alla corrispondenza che ad ogni $x \in \mathbf{R}$ associa il reale 1 (A2) a causa della sua non iniettività, non infrequente tra gli allievi di III, viene ad essere sensibilmente ridotto tra gli allievi di V (soltanto 3 studenti fanno riferimento a tale scorretta giustificazione).

Una rilevante percentuale di allievi di V ha ancora tentato un'interpretazione della funzione di Dirichlet (A3) e della funzione di Gelbaum (A4) con riferimento al loro grafico cartesiano. In particolare, ben 15 studenti tra i 18 che non hanno considerato una funzione la funzione di Dirichlet e 16 studenti (spesso gli stessi) tra i 22 che non hanno considerato una funzione la funzione di Gelbaum hanno sottolineato l'impossibilità di tracciare i rispettivi diagrammi cartesiani.

La giustificazione di Claudio appare significativa; egli afferma: "Il grafico della quarta relazione non esiste, dunque non ho potuto applicare la regola secondo la quale una funzione ha un grafico che può essere intersecato in un solo punto da una retta verticale. Il professore ci ha insegnato a fare sempre questo controllo". Il *contratto didattico* comprende clausole esplicite che riservano dunque uno spazio anche ai procedimenti visuali...

2.7. ANALISI DELLE MOTIVAZIONI ESPRESSE DAGLI ALLIEVI E CONCLUSIONI RELATIVE AL TEST 3

Come osservato interpretando i risultati del test proposto agli allievi di III Liceo scientifico, il concetto di funzione appare chiaramente collegato al grafico cartesiano della relazione esaminata. Le considerazioni espresse nel paragrafo 2.4 mantengono dunque la propria validità e la propria attualità anche nel caso del test proposto agli allievi di V Liceo scientifico.

Possiamo concludere che la pratica didattica tradizionale, saldamente incentrata sulla visualizzazione di una funzione mediante il diagramma cartesiano, non agevola l'affrancamento dell'allievo da tale pratica, didatticamente importante ma non concettualmente esclusiva. L'allievo sembra identificare una corrispondenza con la sua visualizzazione nel piano cartesiano e ciò non contribuisce ad eliminare le difficoltà collegate alla considerazione di funzioni "non disegnabili" (ma teoricamente importanti) come le funzioni di Dirichlet e di Gelbaum.

3. CONCLUSIONI GENERALI

3.1. LA VISUALIZZAZIONE COME PUNTO DI ARRIVO...

Da quanto rilevato emergono alcune tendenze di fondo sul ruolo attribuito alla visualizzazione della didattica della matematica nel Liceo scientifico.

Sembra infatti che la realizzazione di un modello visuale di un concetto o di un procedimento sia considerato come il *punto di arrivo* dell'intero percorso di apprendimento proposto all'allievo dalla classe III alla V: l'intero studio della geometria analitica e dell'analisi matematica del triennio del Liceo scientifico porta lo studente, giunto in V, a tracciare finalmente il diagramma cartesiano di una funzione qualsiasi. L'enfasi che accompagna questo tradizionale esercizio proposto agli allievi dell'ultimo anno di corso sembra essere il naturale coronamento di un intero triennio costantemente dedicato al progressivo sviluppo delle capacità di visualizzare graficamente una funzione reale di variabile reale.

Abbiamo però potuto constatare che un'eccessiva importanza implicitamente o esplicitamente attribuita alla visualizzazione grafica di una funzione può essere causa di inconvenienti notevoli, quali le gravi incertezze provocate dall'esame di corrispondenze come la funzione di Dirichlet e la funzione di Gelbaum.

Non dimentichiamo, inoltre, che l'identificazione di una funzione con la sua rappresentazione nel piano cartesiano porta ad una drastica limitazione delle relazioni da considerare: l'allievo potrebbe ad esempio incontrare notevoli difficoltà a trattare corrispondenze diverse dalle funzioni reali di variabile reale.

Inoltre, non è difficile osservare che una didattica che prevede la visualizzazione come principale o addirittura unico punto di arrivo del processo di apprendimento può comportare altri inconvenienti: la visualizzazione potrebbe restare esclusa dalle attività di deduzione e l'allievo finirebbe così per sfruttare in minima parte, se non per perdere, una possibilità di apprendimento altrimenti efficacissima (ad esempio mediante attività di *problem solving*) [Duval, 1994a].

Ci associamo dunque a quanto affermato da A.H. Schoenfeld, che segnala con forza il pericolo ora individuato: «Gli studenti sono competenti quando si tratta di dedurre e sono competenti quando si tratta di costruire, ma settorializzano spesso le loro conoscenze... Una gran parte delle loro conoscenze resta quindi inutilizzata ed i loro risultati nella risoluzione di problemi sono di molto inferiori di quelli che potrebbero (e che dovrebbero) essere. La settorializzazione inappropriata delle attività di deduzione e delle attività di costruzione è una conseguenza diretta dell'insegnamento» [Schoenfeld, 1986, p. 226].

3.2. ...O LA VISUALIZZAZIONE COME POSSIBILE REGISTRO RAPPRESENTATIVO DA AFFIANCARE AGLI ALTRI?

Quanto ora osservato non deve far ritenere opportuna una qualche limitazione del ruolo della visualizzazione nella didattica della matematica, particolarmente nel Liceo scientifico; riteniamo invece auspicabile una piena valorizzazione della visualizzazione, accompagnata da una sua adeguata, consapevole riqualificazione. Le considerazioni sulla visualizzazione esposte nella parte introduttiva del presente articolo mantengono infatti la loro validità: i procedimenti visuali hanno senza dubbio importanza primaria nella didattica della matematica [Vinner, 1992] [Duval, 1993] [Fischbein, 1993].

Il ruolo della visualizzazione nella didattica della matematica del Liceo scientifico appare però sbilanciato, distorto: da un lato essa è guardata con sospetto, addirittura talvolta con aperta ostilità, quando potrebbe invece essere utilmente impiegata per rendere intuitivi alcuni procedimenti (ad esempio le tecniche algebriche elementari); al contrario, la visualizzazione diviene oggetto primario e totalizzante dell'apprendimento nel caso di alcune rappresentazioni tradizionalmente ritenute fondamentali, come il diagramma cartesiano delle funzioni.

La teoria dei concetti figurali di E. Fischbein, precedentemente ricordata, illustra invece con chiarezza la "doppia natura", da un lato ideale, astratta e dall'altro reale, di molti oggetti matematici [Fischbein, 1993]; e questa doppia natura dovrebbe avere primarie implicazioni didattiche, anche considerando la provata utilità dei diversi registri di rappresentazione semiotica per l'apprendimento [Duval, 1993].

La nostra posizione può dunque così essere riassunta: la visualizzazione potrebbe essere considerata come un versatile, preziosissimo *punto di partenza* e come un indispensabile *compagno di strada*, nel rispetto dell'auspicabile varietà dei registri rappresentativi, per l'apprendimento graduale ed efficace di procedimenti, di concetti, di "oggetti matematici". Il ruolo della visualizzazione potrebbe così trasformarsi da quello di scopo finale (oggi talvolta suggerito ai nostri allievi, a volte, forse, addirittura ad essi implicitamente imposto, tanto da rientrare apertamente in alcune clausole del *contratto didattico*), a quello di mezzo didattico potente [Schoenfeld, 1986] [Duval, 1994a], dalla straordinaria efficacia intuitiva. Un elemento centrale di quella fase dell'apprendimento che viene ad essere propedeutica rispetto all'astrazione che caratterizza la matematica.

Bibliografia

[Apostol, 1977] **T.M. Apostol**, *Calcolo*, v. I, Boringhieri, Torino 1977.

[Bagni, 1993] **G.T. Bagni**, *Funzioni naturali di variabile reale*, in: "La matematica e la sua didattica", a. 1993, n. 4, pp. 466-475, Pitagora, Bologna 1993.

[Bagni, 1994] **G.T. Bagni**, *Continuità e discontinuità nella didattica dell’Analisi matematica*, in: B. Piochi (a cura di), "Atti del IV Incontro dei Nuclei di Ricerca Didattica nella Scuola Superiore", IRRSAE Toscana, Siena 1994.

[D'Amore, 1995] **B. D'Amore**, *Lingue e linguaggi nella pratica didattica*, in: B Jannamorelli (a cura di), "Atti del II Seminario internazionale di Didattica della Matematica di Sulmona, 'Lingue e linguaggi nella pratica didattica', 30 marzo-1 aprile 1995", Sulmona 1995.

[Dieudonné, 1989] **J. Dieudonné**, *L'arte dei numeri*, Mondadori, Milano (*Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, Paris 1987).

[Dini, 1878] **U. Dini**, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabile reale*, Nistri, Pisa 1978 (rist. anast.: Unione Matematica Italiana, Firenze 1990).

[Duval, 1993] **R. Duval**, *Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, in: "Annales de Didactique et de Sciences Cognitives", v. 5, IREM, Strasbourg 1993.

[Duval, 1994a] **R. Duval**, *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique*, in: "Repres IREM" n. 17, ottobre 1994.

[Duval, 1994b] **R. Duval**, *Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage*, in "Actes de la Quarantesixieme Rencountre Internationale de la CIEAEM", 1994 (in corso di stampa).

[Euclide, 1970] **Euclide**, *Elementi*, A. Frajese-L. Maccioni (a cura di), UTET, Torino 1970.

[Fischbein, 1993] **E. Fischbein**, *The theory of figural concepts*, in: "Educational Studies in Mathematics", 24, 139-162, 1993.

[Gelbaum, 1961] **B.R. Gelbaum**, *Advanced calculus*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York 1961.

[Gelbaum, 1962] **B.R. Gelbaum**, *The real number system*, Appleton-Century Crofts, Inc., New York 1962.

[Gelbaum-Olmsted, 1979] **B.R. Gelbaum-J.M.H. Olmsted**, *Controesempi in analisi matematica*, Mursia, Milano 1979.

[Kaldrimidou, 1987] **M. Kaldrimidou**, *Images mentales et représentations en mathématiques chez les mathématiciens et les étudiants en mathématiques*, Thèse 3éme cycle, Université Paris 7, Paris 1987.

[Kaldrimidou, 1995] **M. Kaldrimidou**, *Lo status della visualizzazione presso gli studenti e gli insegnanti di matematica*, in: "La matematica e la sua didattica", 1995/2, pp. 181-194, Bologna 1995.

[Nikolskij, 1985] **S.M. Nikolskij**, *Corso di analisi matematica*, v. I, Mir, Mosca 1985.

[Prodi, 1970] **G. Prodi**, Analisi matematica, Boringhieri, Torino 1970.

[Schoenfeld, 1986]. **A.H. Schoenfeld**, *On having and using Geometric knowledge*, in: J. Hiebert (a cura di), "Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics", pp. 225-263, Erlbaum, Hillsdale 1986.

[Van der Waerden, 1983] **B.L. Van der Waerden**, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer Verlag, Berlin 1983.

[Van Rooj-Schikhof, 1982] **A.C.M. Van Rooj-W.H. Schikhof**, *Second course on real functions*, Cambridge University Press, Cambridge 1982.

[Vinner, 1992] **S. Vinner**, *Function concept as prototype for problems in mathematics,* in: G. Harel-E. Dubinsky (a cura di), "The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy", MAA Notes, 25, pp. 195-213, 1992.