Bagni, G.T. (2006). Bacchette da calcolo e sistemi di equazioni'. In Giacardi, L., Mosca, M. & Robutti, O. (Eds), *Associazione Subalpina Mathesis. Conferenze e seminari 2005–06* (53–62). Torino: Kim Williams Books.

BACCHETTE DA CALCOLO E SISTEMI DI EQUAZIONI

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica, Università di Udine

Sommario

Il presente lavoro propone lo studio delle possibilità didattiche connesse all'uso di un antico artefatto cinese. Il quadro teorico è basato sui lavori di Vygotskij (1974, 1987), di Wartofsky (1979) e di Bartolini Bussi, Mariotti e Ferri (2005). Abbiamo proposto ad alcuni allievi di 11 anni un problema (tratto dal un'opera cinese intitolata Chiu-Chang, risalente al I sec. a. C.) risolubile mediante un sistema di due equazioni lineari. I risultati sperimentali suggeriscono che l'uso di artefatti primari, abbinato ai considerati artefatti secondari, può essere efficace nella presentazione dei contenuti matematici. È possibile inoltre evidenziare l'importanza dell'approccio percettivo-motorio all'apprendimento, sia dal punto di vista individuale che da quello sociale.

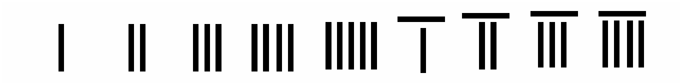
1. Introduzione

Un'impostazione interculturale può essere particolarmente produttiva in ambito didattico: essa non prevede infatti un semplice accostamento di esperienze derivanti dalle diverse culture considerate, bensì si basa su di un'efficace interazione, su di un confronto paritetico che porti alla valorizzazione delle differenze (An, Kulm & Wu, 2004; si veda: Cipollari & Portera, 2004).

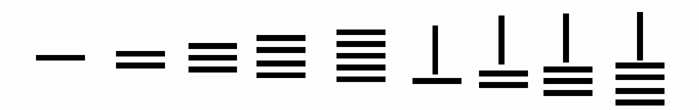
Nel presente lavoro proporremo un'esperienza didattica basata sull'uso di artefatti derivati dall'antica tradizione della matematica cinese (Bagni, in stampa-a). A tale riguardo, osserviamo preliminarmente che la scelta di interpretare la storia della matematica, ad esempio in ambito didattico, coinvolge sempre problemi ermeneutici (Gadamer, 2000). Spesso parliamo di storia, ma dimentichiamo di dare il giusto peso all'aspetto geografico: non esiste, dunque, *un'unica* storia della matematica, quella della matematica occidentale. Non possiamo, tuttavia, pensare di svincolarci dalla nostra tradizione culturale: in un certo senso, come afferma opportunamente G.A. Gargani commentando l'impostazione teorica di Richard Rorty, "non possiamo non essere etnocentrici, e questa non è una forma di arroganza, perché al contrario arrogante è la pretesa del filosofo metafisico o dell'antropologo liberale e progressista che pretende di disporre di un supervocabolario il quale renderebbe commensurabili i vocabolari delle «culture altre»" (Prefazione a: Rorty, 2003, p. XXIII).

2. L'indicazione di numeri mediante le bacchette da calcolo

La tradizionale pratica cinese di indicare i numeri mediante alcuni bastoncini è spontaneamente riferibile alle dita della mano. Secondo tale interpretazione, però, dopo le 5 unità (corrispondenti a 5 dita) è necessario ricorrere all'altra mano, indicando che è stata già considerata una mano completa:



Al momento di raggiungere il 10 dobbiamo affrontare una situazione importante: avendo esaurito le dita delle mani, introdurremo le decine che si potrebbero indicare mediante le stesse disposizioni di bacchette usate per le unità, spostate più a sinistra. I Cinesi utilizzavano per le decine delle disposizioni di bacchette (*Heng*) diverse da quelle adottate per le unità (*Tsung*):



Per le centinaia le disposizioni usate erano *Tsung*, per le migliaia *Heng* etc.

Fino al XII sec. lo zero era indicato da uno spazio vuoto (e proprio questa assenza ha reso opportuno l'uso di due gruppi diversi di simboli). Dal 200 a. C. i Cinesi indicarono anche numeri negativi distinguendo il colore delle bacchette, rosse (per i numeri positivi) e nere (per i negativi).

Le bacchette costituivano un importante ausilio per il calcolo pratico: esse davano infatti la possibilità di formare facilmente i "numerali-bacchette" su di una superficie piana (la tavola da calcolo aritmetica, quadrettata, in cui le diverse operazioni erano eseguite sfruttando le caratteristiche della notazione posizionale) e di cancellare i numeri che non servivano più.

L'uso delle bacchette tramontò nella tarda epoca Ming (1368-1644) quando furono soppiantate dall'abaco.

3. Quadro teorico

Un'applicazione delle bacchette da calcolo nel campo della ricerca in didattica della matematica richiede la precisazione di un quadro teorico.

Come afferma Vygotskij, il "pensiero verbale non esaurisce né tutto le forme di pensiero, né tutte le forme del linguaggio. Vi è una grande area di pensiero che non ha alcuna relazione diretta col pensiero verbale" (Vygotskij, 1990, p. 118). In generale, "i bambini risolvono i problemi pratici con l'aiuto del linguaggio non meno che con quello degli occhi e delle mani. Questa unità di percezione, linguaggio e azione, che in definitiva produce l'interiorizzazione del campo visivo, costituisce il tema centrale di una qualsiasi analisi dell'origine delle forme di comportamento proprie dell'uomo" (Vygotskij, 1987, p. 26). Dunque "per Vygotsky (come per Dewey) il linguaggio è un modo per mettere ordine tra i propri pensieri riguardanti la realtà; e il pensiero è un modo di organizzare la percezione e l'azione" (Bruner, 2005, p. 90).

Ci rifaremo al quadro teorico proposto da Bartolini Bussi, Mariotti e Ferri (2005) che si basa sui lavori di Vygotskij (1974 e 1987), di Bachtin (2000 e 2001), di Engestroem (1990) e di Wartofsky (1979). In particolare, Vygotskij riconosce funzioni di mediazione agli strumenti tecnici e psicologici (segni o strumenti di mediazione semiotica: Vygotskij, 1974). Wartofsky (1979) identifica gli strumenti tecnici come *artefatti primari*; gli *artefatti secondari* sono usati per fissare e trasmettere le modalità di azione (Mariotti, 2002).

Le bacchette da calcolo possono essere considerate, in prima lettura, artefatti primari; regole e convenzioni rappresentative corrispondono ad artefatti secondari; una teoria matematica è un *artefatto terziario* che organizza gli artefatti secondari. Si può supporre (indichiamo ad esempio: Bartolini Bussi, 2002; Bartolini Bussi & Boni, 2003) che gli aspetti pratico, rappresentativo e teorico siano incorporati (almeno potenzialmente) nell'attività che si svolge con l'artefatto che, in tale modo, acquista le caratteristiche di *polisemia* (Engestroem, 1990).

Didatticamente significativo è inoltre che l'uso degli artefatti primari richieda la loro manipolazione (Vygotskij, 1987, p. 45). L'importanza degli aspetti corporei si accorda con la recente posizione della scienza cognitiva basata sui lavori di Lakoff, Johnson e Núñez (Lakoff & Núñez, 2000), secondo la quale la formazione di idee matematiche si basa sull'esperienza sensoriale-motoria (alcune importanti questioni collegate all'apprendimento percettivo-motorio sono discusse in: Arzarello & Robutti, in stampa).

4. Il carattere posizionale dell'algebra cinese

I problemi che noi oggi risolviamo algebricamente sono presenti in alcune tradizioni matematiche a partire dal II millennio a. C., ad esempio presso i Babilonesi. In Cina l'algebra è presente dal II sec. a. C. in forma retorica o sincopata (ideogrammi monosillabici per le quantità e per le operazioni) con un importante "carattere posizionale" (Needham 1959, p. 112; Martzloff, 1987; nella Figura 1 si veda una moltiplicazione "per graticola" tratta dal *Suang Fa Thung Tsung*, opera risalente al 1593).

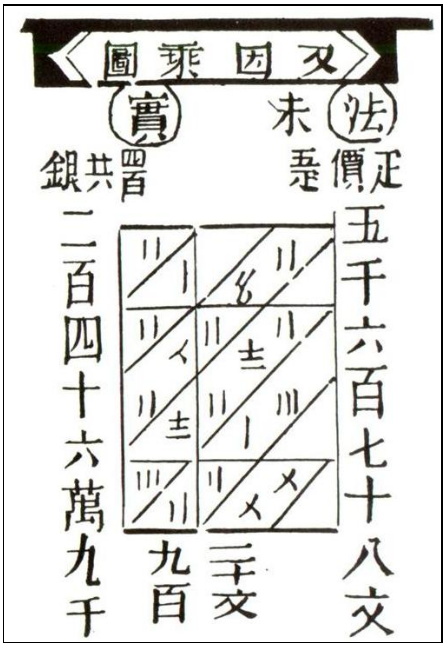


Figura 1 – Una moltiplicazione cinese "per graticola" (1593)

La tavola di calcolo cinese in versione algebrica era impostata in modo che determinate posizioni fossero occupate sempre da particolari tipi di grandezze (incognite, potenze etc.) e tale convenzione può considerarsi un artefatto secondario (Wartofsky, 1979). Venne introdotto così un sistema che implicò la “registrazione di modelli matematici” (come notato in: Needham, 1959, p. 113).

Storicamente, il carattere posizionale dell’algebra cinese ha avuto conseguenze diverse: da un lato, pose implicitamente l’accento sull’importanza dell’impostazione matriciale (ma il concetto di determinante fu sviluppato, in oriente, piuttosto tardi, nel 1683, dal giapponese Seki Kowa); parallelamente, però, determinò l’inibizione dello sviluppo di un simbolismo algebrico per la matematica cinese.

Nel presente lavoro si esamina il problema seguente che riprende, con alcune minime variazioni numeriche, un problema del capitolo VIII (*Fang Cheng*) del *Chiu Chang* (opera precedente al I sec.):

> *Cinque covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 19 sheng. Tre covoni di grano di tipo A aggiunti a due covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 12 sheng. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?*

Esso porta al sistema di equazioni lineari che, nella nostra notazione moderna, sarebbe scritto:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Secondo il procedimento cinese, i coefficienti ed i termini noti sono invece collocati, come vedremo, in una tabella a due righe e tre colonne (sebbene la versione originale prevedesse una disposizione verticale per ogni equazione, dunque una tabella a tre righe e due colonne) che può essere modificata secondo le regole seguenti:

(1) si possono variare in proporzione i termini delle righe;
(2) a una riga si può sostituire la riga ottenuta sommando o sottraendo i termini corrispondenti di due righe.

Riportiamo una possibile soluzione del sistema (ma, come vedremo, non l’unica), ottenuta con in metodo ora indicato (inizialmente utilizzando i numeri indo-arabi):

5	3	19
3	2	12

15	9	57
3	2	12

15	9	57
15	10	60

15	9	57
0	1	3

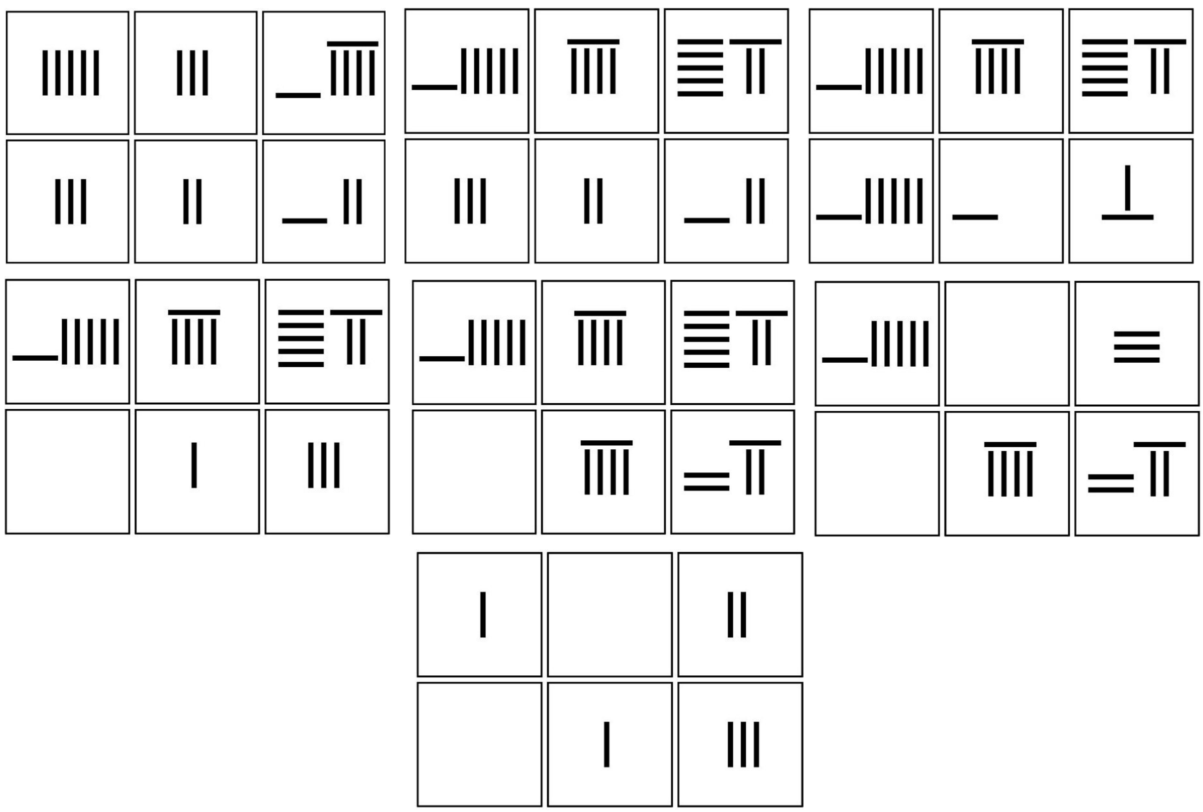
15	9	57
0	9	27

15	0	30
0	9	27

1	0	2
0	1	3

corrispondente alla soluzione: $x = 2$ e $y = 3$.

Il procedimento ora indicato può essere riprodotto con le bacchette e questa scelta è didatticamente significativa: si mantiene infatti aderente alla tradizione storica anche dal punto di vista pratico e la manipolazione delle bacchette da parte degli allievi può determinare situazioni piuttosto interessanti. Come vedremo, infatti, gli allievi possono accostarsi ad alcune proprietà di invarianza delle equazioni in modo intuitivo; i coefficienti nulli, ad esempio, corrispondono all'assenza fisica di "disturbo".



corrispondente alla soluzione: $x = 2$ e $y = 3$.

Naturalmente quella ora riportata è soltanto una delle (molte) possibili soluzioni derivanti dall'applicazione del procedimento precedentemente illustrato. Mediante l'esame di una situazione sperimentale verificheremo quale sarà la risoluzione individuata degli allievi.

Osserviamo che l'insegnante ha un ruolo importante per la presentazione delle modalità di uso (artefatto secondario) dell'artefatto primario: il rapporto degli artefatti è essenziale in quanto non esiste un solo "modo di usare" lo strumento considerato. L'insegnante dunque suggerisce scopi e strategie: l'elemento cruciale è ottenere la "sparizione" di una delle incognite, e proprio l'assenza fisica di bacchette nella casella corrispondente al coefficiente nullo potrà essere notevolmente importante.

5. Metodologia della ricerca sperimentale

Una prima verifica sperimentale è stata condotta in una scuola secondaria inferiore (a Treviso, I classe di una Scuola Media, allievi di 11-12 anni) ed ha consentito di notare che l'uso degli artefatti primari, bacchette e tavola da calcolo (strumenti tecnici), collegato a quello di artefatti secondari (convenzioni e modalità per variare le righe della tabella: dunque strumenti psicologici) può significativamente agevolare lo studente nell'accostamento alla risoluzione di sistemi lineari con metodi di eliminazione.

Al momento dell'esperienza gli allievi coinvolti non avevano trattato i numeri negativi né le equazioni. Soltanto alcuni di essi avevano avuto a che fare (nel corso della scuola primaria) con semplici esercizi del tipo: "indovina un numero sapendo che…" L'esperienza si è svolta in aula, durante un'ora di lezione, alla presenza dell'insegnante di matematica della classe e dello sperimentatore (che non è mai intervenuto).

Era stata precedentemente introdotta alla classe la rappresentazione dei numeri mediante le bacchette da calcolo; gli allievi hanno avuto occasione di esercitarsi.

In una tabella corredata con etichette, realizzata su di un banco, era stato poi rappresentato il problema: "due pacchetti uguali contengono, in tutto, quattro biscotti. Quanti biscotti ci sono in ciascun pacchetto?" Era stato poi mostrato che dividendo per 2 i numeri in tutte le caselle della tabella si ottiene la soluzione.

Gli allievi sono stati poi suddivisi in sei gruppi di tre. È stato quindi proposto a tutti i partecipanti il problema precedentemente esaminato: con le bacchette da calcolo è stata realizzata la disposizione iniziale affermando che essa "rappresentava i dati". Sono state poi illustrate (anche con alcuni esempi) le due regole che permettono di modificare tale disposizione.

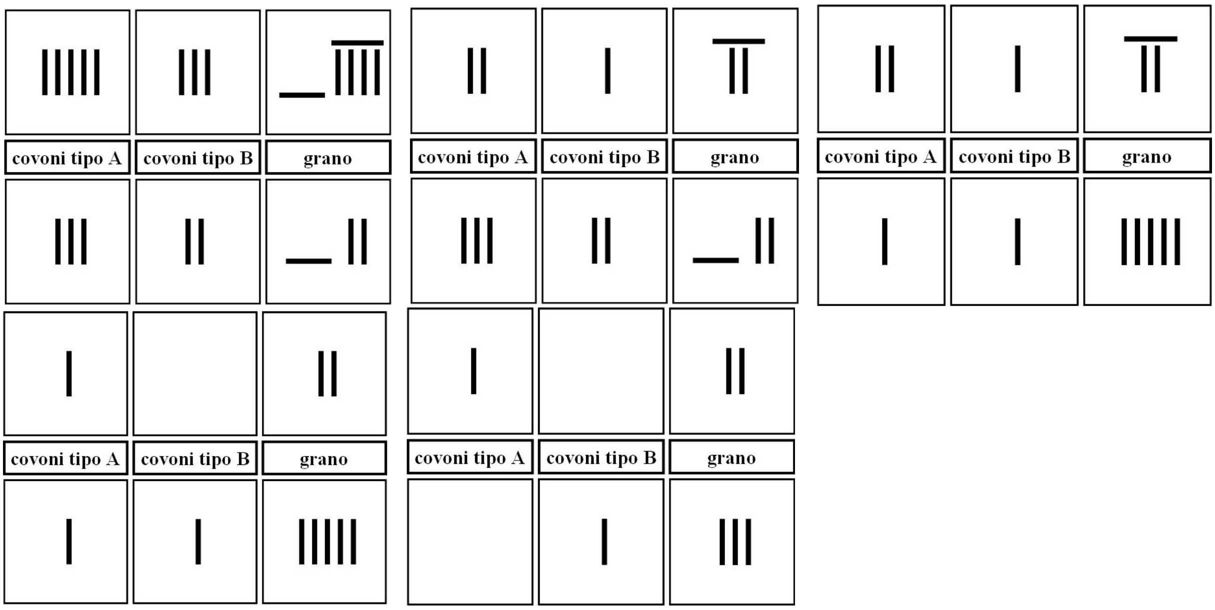
Durante la risoluzione, il ruolo dell'insegnante è stato di controllo (passando tra i vari gruppi): ha segnalato eventuali errori, ma non ha dato suggerimenti.

6. Descrizione dell'esperienza

Come notato, il problema tratto dal *Chiu Chang* descritto precedentemente porta al sistema di equazioni lineari che, nella nostra moderna scrittura algebrica, viene così espresso:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Dopo alcuni tentativi, l'allieva S., in collaborazione con l'allieva F. (il terzo componente del gruppo non ha svolto un ruolo significativo) ha impostato la seguente risoluzione.



dunque: $x = 2$ e $y = 3$.

Molto interessanti sono stati alcuni ampi gesti con le mani mediante i quali le allieve hanno indicato le varie righe dicendo:

"Adesso posso fare questi meno quelli".

Indicativa, inoltre, deve essere considerata una frase pronunciata da F. (l'allieva che ha più attivamente collaborato con S.):

"Si riesce quando due diventano uguali".

Possiamo notare che S. e F. hanno utilizzato solamente la regola che consente di sottrarre una riga dall'altra. Ma tale modo di procedere, ovviamente, non è sempre applicabile (ricordiamo che gli allievi, al momento dell'esperienza, non avevano trattato i numeri negativi).

Un secondo problema è stato allora proposto allo stesso gruppo:

Quattro covoni di grano di tipo A aggiunti a un covone di grano di tipo B hanno il rendimento di 6 sheng. Due covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 8 sheng. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?

Dopo una fase di perplessità, caratterizzata da osservazioni del tipo:

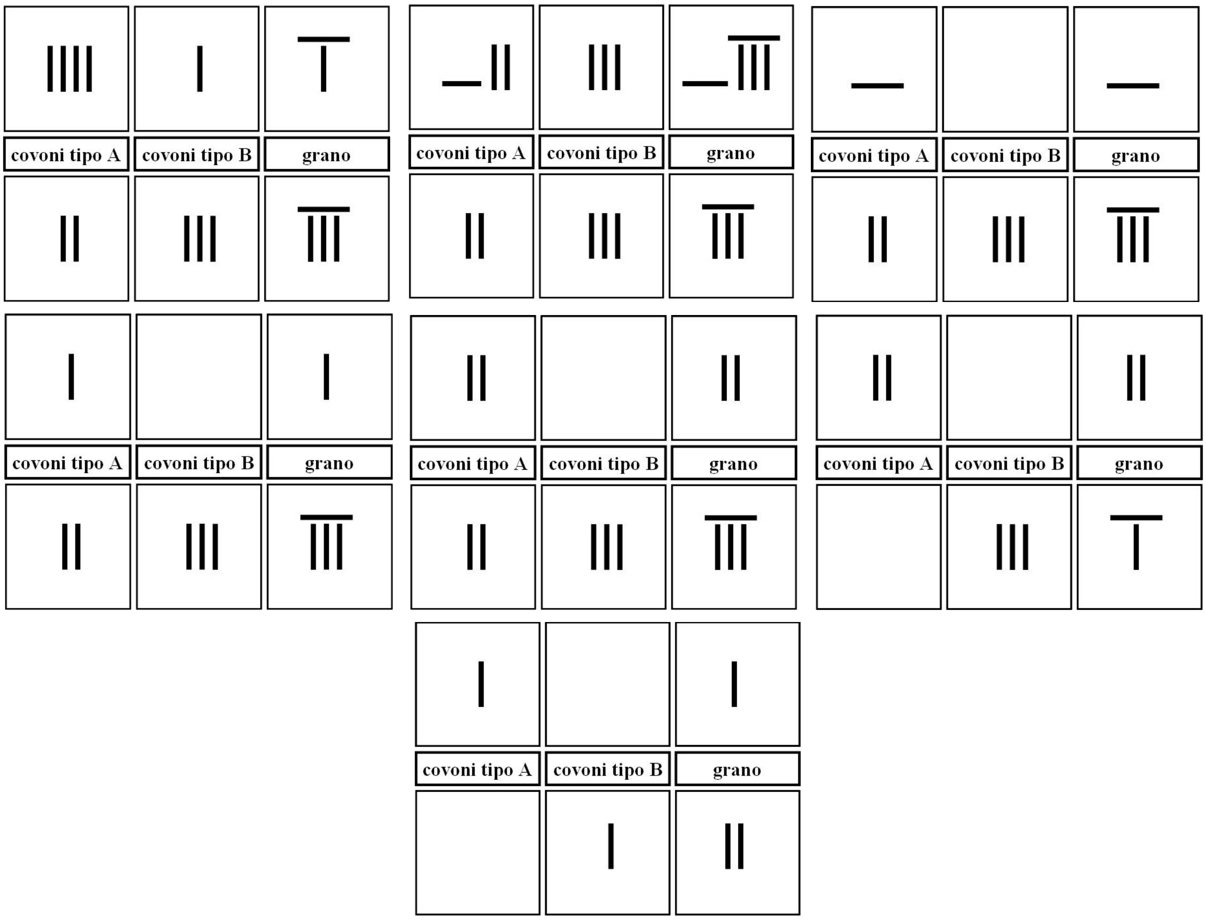
“Non si può togliere questi da quelli, non ce ne sono abbastanza”,

l’allieva S. applica la regola che consente di moltiplicare gli elementi di una riga per $k>0$ (in questo caso: la prima riga per $k = 3$).

F. ribadisce:

“Sì, sì, bisogna far diventare questo uguale a questi!”

indicando le diverse righe, e il procedimento può quindi proseguire e concludersi con la soluzione corretta.



corrispondente alla soluzione: $x = 1$ e $y = 2$.

7. Discussione dei risultati e spunti per ulteriori ricerche

L’esperienza sopra descritta può essere innanzitutto considerata alla stregua di un’importante occasione interculturale per un accostamento critico alla matematica cinese e al contesto nell’ambito del quale essa si è prodotta; ma assume significati notevoli anche dal particolare punto di vista della didattica della matematica.

Sebbene questa prima esperienza sia ancora piuttosto limitata e consenta solo di indicare considerazioni parziali (ulteriori verifiche sperimentali sono previste), l’uso frequente da parte degli allievi coinvolti di espressioni deittiche (“questi”, “quelli”) accompagnato da una marcata componente gestuale è interessante (Steinbring, 2002;

alcuni spunti possono essere visti in: Bagni, in stampa-b). Inoltre gli allievi hanno dato la preferenza alle modalità d'uso (collegabili, dunque, ad un artefatto secondario) più direttamente connesse alla presenza fisica dei bastoncini.

I dati finora esaminati sembrano suggerire che l'uso degli artefatti primari (come le bacchette e la tavola da calcolo) collegato a quello di artefatti secondari (le modalità per variare i numeri nella tabella) possa agevolare la messa a punto di strategie risolutive, dunque l'accostamento agli artefatti terziari basati sulle attività con tali artefatti primari e secondari (si noti a tale riguardo che i Cinesi risolvevano sistemi di due equazioni in due incognite anche con altri metodi, riassumibili in formule, ma il ruolo delle bacchette da calcolo non appare in tali casi particolarmente significativo: Needham 1959 e Martzloff, 1987).

Nota giustamente H. Steinbring: "per esprimere le relazioni algebriche non sono sempre indispensabili i tipici segni dell'algebra" (Steinbring, 2002, p. 20, la traduzione è nostra). Una rappresentazione esterna come quella ottenuta mediante le bacchette sulla tavola da calcolo è costituita da un complesso di segni, relazioni spaziali, regole incorporate o comunque associate all'artefatto primario. Ma qual è la *trasparenza* (nel senso di Meira, 1998) dell'artefatto considerato rispetto al sapere ad esso collegato? Tale trasparenza non è costitutivamente legata al particolare artefatto, bensì dipende dall'uso che di esso fa il soggetto e dunque dall'attività in cui l'artefatto stesso viene effettivamente usato. Pertanto particolarmente significativo viene ad essere il contesto nell'ambito del quale gli allievi si accostano all'attività proposta (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri & Garuti, 1997; Radford, 2002, 2003a e 2003b): tale contesto ha la caratteristica del gioco, più che della rappresentazione astratta.

Una traccia importante da esplorare è quindi la seguente: il contesto del gioco può favorire la costituzione di significati in termini più incisivi di quanto non faccia la rappresentazione astratta (algebrica)? Si noti che il procedimento introdotto non è un artefatto secondario assolutamente essenziale per garantire un efficace funzionamento dell'artefatto primario, come potrebbero essere ad esempio alcune indicazioni d'uso per realizzare una circonferenza mediante un compasso. Da questo punto di vista, le "regole" esaminate potrebbero essere addirittura considerate convenzionali, arbitrarie. Potrebbe dunque essere il gioco stesso (che, per l'allievo, è dotato di significato di per se stesso, in quanto gioco "nuovo", procedimento da "esplorare") a conferire significato al procedimento algebrico (un parallelismo interessante potrebbe essere condotto sulla base di: Wittgenstein, 1982 e 1999; si veda inoltre: Penco, 2004).

Ulteriori studi potranno chiarire se l'uso di bacchette e tavola da calcolo possa introdurre la risoluzione di sistemi con metodi di eliminazione e, più in generale, suggerire o sottolineare l'importanza dell'impostazione matriciale: si tratta cioè di valutare come un apprendimento percettivo-motorio possa essere infine consolidato in un apprendimento simbolico-ricostruttivo (Antinucci, 2001), passaggio che si rivelerebbe certamente fondamentale per quanto riguarda la formazione di concetti matematici (Robutti & Ghirardi, 2004).

Indichiamo inoltre una possibilità di semplificare l'artefatto secondario qui considerato: ad esempio, l'uso delle originali disposizioni *Tsung* e *Heng*, come sopra osservato, non è indispensabile per la realizzazione pratica dell'esperienza e può essere, ad esempio, ridotto ad un semplice impiego di bastoncini in numero sufficiente per indicare le cifre (che potrebbero essere espresse un ordine determinato dalla notazione decimale). Naturalmente l'aspetto interculturale dell'esperienza può suggerire di mantenere il riferimento all'artefatto secondario originale.

Ringraziamenti

L'autore desidera ringraziare vivamente Ferdinando Arzarello e Ornella Robutti (Università di Torino), Paolo Boero (Università di Genova), Donatella Iannece (Università di Napoli "Federico II"), Maria Reggiani e Samuele Antonini (Università di Pavia) per i preziosi commenti.

Bibliografia

1. ANTINUCCI, F. 2001, *La scuola si è rotta*, Laterza, Bari.
2. ARZARELLO, F. & ROBUTTI, O. in stampa, Approaching functions through motion experiments. *Educational Studies in Mathematics*.
3. AN, S., KULM, G. & WU, Z. 2004, The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and U.S., *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7(2), 145-142.
4. BACHTIN, M. 2000, *L'autore e l'eroe*. Einaudi, Torino (*Estetica slovesnogo tvorčestva*. Izdatel'stvo Iskusstvo, Moskva 1979).
5. BACHTIN, M. 2001, *Estetica e romanzo*. Einaudi, Torino (*Voprosy literatury i estetici*. Izdatel'stvo Chudožestvennaja literatura, Moskva 1975).
6. BAGNI, G.T. in stampa-a, Bacchette da calcolo cinesi e sistemi di equazioni, *Atti del Seminario Franco Italiano di Didattica dell'Algebra, VI, (SFIDA 21, 22, 23, 24)*.
7. BAGNI, G.T. in stampa-b, Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory, *Educational Studies in Mathematics*.
8. BARTOLINI BUSSI, M.G. 2002, The theoretical dimension of mathematics: a challenge for didacticians, *Proc. 2000 (24th) Annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, Montreal, 21-31.
9. BARTOLINI BUSSI, M.G. & BONI, F. 2003, Instruments for semiotic mediation in primary school classrooms, *For the Learning of Mathematics*, 23(2), 12-19.
10. BARTOLINI BUSSI, M.G., MARIOTTI, M.A. & FERRI, F. 2005, Semiotic mediation in primary school: Dürer's glass. Hoffmann, M.H.G.; Lenhard, J. & Seeger, F. (Eds.), *Activity and sign. Grounding mathematics education. Festschrift for Michael Otte*. Springer, New York, 77-90.
11. BRUNER, J. 2005, *La mente a più dimensioni*. Laterza, Bari-Roma (*Actual minds, possibile worlds*. Harvard University Press, Cambridge-London 1986).
12. CIPOLLARI, G. & PORTERA, A. 2004, *Cultura, culture, intercultura*, IRRE Marche, Ancona.
13. ENGESTROEM, Y. 1990, When is a tool? Multiple meanings of artifacts in human activity, in *Learning, working and imagining: twelwe studies in activity theory*, Orienta-Konsultit Oy, Helsinki, 171-195.
14. GADAMER, H.G. 2000, *Verità e metodo*, traduzione di G. Vattimo. Bompiani, Milano (*Warheit und Methode: Gründzuge einer philosophischen Hermeneutik*. Mohr, Tübingen 1960).
15. LAKOFF, G. & NÚÑEZ, R. 2000, *Where Mathematics come from? How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.

16. MARIOTTI, M.A. 2002, The influence of technological advances on students' mathematics learning, in English, L.D. (Ed.). *Handbook of international research in mathematics education*, Lawrence Erlbaum Associates, Publisher, 695-724.
17. MARIOTTI, M.A., BARTOLINI BUSSI, M.G., BOERO, P., FERRI, F. & GARUTI, R. 1997, Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of PME-21*, Lathi, Finland, I, 180-195.
18. MARTZLOFF, J.-C. 1987, *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris.
19. MEIRA, L. 1998, Making sense of instructional devices: the emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 121-142.
20. NEEDHAM, J. 1959, *Science and civilisation in China*, Cambridge University Press.
21. PENCO, C. 2004, *Introduzione alla filosofia del linguaggio*, Laterza, Roma-Bari.
22. RADFORD, L. 2002, The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge, *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.
23. RADFORD, L. 2003a, Gestures, speech and the sprouting of signs, *Mathematical Thinking and Learning*, 5 (1), 37-70.
24. RADFORD, L. 2003b, On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought, Anderson, M. & Al. (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, Legas, Ottawa, 49-79.
25. ROBUTTI, O. & GHIRARDI, S. 2004, Dai moti alle rappresentazioni simboliche: un'esperienza nella scuola elementare, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 27A-B, 5, 577-616.
26. RORTY, R. 2003, *La filosofia dopo la filosofia*. Laterza, Roma-Bari (*Contingency, irony, and solidarity*. Cambridge University Press, Cambridge 1989).
27. STEINBRING, H. 2002, What makes a Sign a Mathematical Sign? An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction, *Paper presented to the Discussion Group on Semiotics at the 26th PME.*
28. VYGOTSKIJ, L.S. 1974, *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori e altri scritti*, Giunti, Firenze.
29. VYGOTSKIJ, L.S. 1987, Il processo cognitivo. Boringhieri, Torino (Mind in society. The development of higher psychological processes. Harvard University Press, Cambridge-London 1978).
30. VYGOTSKIJ, L.S. 1990, Pensiero e linguaggio. Ricerche psicologiche. Laterza, Roma-Bari (Myšlenie i rec'. Psichologiceskie issledovanja. Gosudarstvennoe Social'no-Ekonomiceskoe Izdatel'stvo, Moskva-Leningrad 1934).
31. WARTOFSKY, M. 1979, Perception, representation and the forms of action: towards an historical epistemology, *Models. Representation and the scientific understanding*, Reidel, Dordrecht, 188-209.
32. WITTGENSTEIN, L. 1982, *Lezioni sui fondamenti della matematica*, Boringhieri, Torino.
33. WITTGENSTEIN, L. 1999, *Ricerche filosofiche*, Einaudi, Torino.

Torino, 17 novembre 2005