Progetto Alice, 28, 5–32 (2009)

Bacchette da calcolo e sistemi di equazioni: analisi semiotica e prospettiva ermeneutica

Giorgio T. Bagni

Riassunto In un quadro teorico che conto di un approccio ermeneutico e della classificazione peirceana dei segni, abbiamo proposto a un gruppo di allievi di 10–11 due problemi dal trattato cinese *Jiuzhang Suanshu* (1° sec. a.C.) risuliubili mediante un sistema di equazioni. Il comportamento degli allievi consente un'analisi semiotica dell'artefatto e in particolare evidenzia l'importanza dell'iconicità e di una componente minore di indicalità. La discussione dei dati sperimentali indica che l'uso dell'artefatto può essere importante per introdurre alcuni contenuti in un contesto collegato al gioco.

Abstract In a theoretical framework taking into account an hermeneutic perspective and Peirce's classification of signs, we proposed to a group of 10–11 year–old pupils two problems from the Chinese treatise *Jiuzhang Suanshu* (1st cent. BC) that can be solved by simultaneous equations. Pupils' behaviours allow to perform a semiotic analysis and emphasise the importance of iconicity, and of a minor component of indexicality. The discussion of data suggests that the use of the artefact can be important in order to approach some mathematical contents, in a context related to the game.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

Introduzione

Nel proprio trattato *Mathematics education and language. Interpreting hermeneutics and post–structuralism*, T. Brown affronta il problema di «come l'interpretazione può assumere un ruolo più centrale nella comprensione della matematica. La riflessione verrebbe così spostata da ciò che un'affermazione significa a perché essa viene usata da qualcuno in una specifica situazione, riportando dunque al centro l'essere umano e le sue intenzioni» (Brown, 2001, p. 24; nel presente lavoro le traduzioni sono nostre; spunti profondissimi possono essere visti in de Finetti, 2006).

L'ermeneutica, teoria e pratica dell'interpretazione, si basa sul presupposto secondo il quale mentre il mondo esiste indipendentemente dagli esseri umani; esso non può presentarsi direttamente alla comprensione umana. Le operazioni ermeneutiche sono dunque riferite ai significati situati storicamente e mediati dalle esperienze attraverso le quali essi vengono osservati. Tutto ciò è importante per la matematica e la sua didattica; infatti (Brown, 2001, pp. 24–27):

> Considerando le espressioni matematiche nel loro uso da parte degli esseri umani in particolari situazioni piuttosto che oggetti con significati propri, si sottolinea l'importanza di inquadrare l'attività matematica come parte dell'attività sociale. […]. Per gli studenti che imparano la matematica le idee sono sempre connesse a pratiche sociali, ed è necessario diventare esperti in tali pratiche per comprendere la matematica ad esse associata.

Secondo L. Radford e H. Empey (2007, p. 250) «gli oggetti matematici non sono entità preesistenti, ma piuttosto oggetti concettuali generati nel corso dell'attività umana». La possibilità di analizzare questa complessa fase creativa è importante; ancora Radford ed Empey (2007, p. 250) notano:

> La matematica è molto più di una forma di produzione del sapere – una pratica di teorizzazione. Se è vero che le persone creano la matematica, non è meno vero che, viceversa, la matematica influenza i modi di essere, di vivere e di pensare delle persone. [… Dunque] la matematica crea le condizioni per il sorgere di certe forme di soggettività e di comprensione. […] Pensando in questi termini, e più generalmente, gli oggetti matematici sono strumenti intellettuali e cognitivi che ci permettono di riflettere e di agire sul mondo.

Inoltre «la matematica non è (direttamente) comunicabile, cioè non può essere mostrata agli studenti e concretamente manipolata», nelle parole di W. Dörfler; dunque «la ricerca didattica è stata ed è impegnata nella messa a punto di 'buone' rappresentazioni che possano rendere possibile costruzioni mentali da parte dei discenti» (Dörfler, 2006, p. 101).

È noto che l’antica rappresentazione cinese dei numeri mediante bacchette da calcolo può essere riferita alle dita di una mano (e questo è didatticamente interessante: ricerche sperimentali hanno evidenziato che i bambini contano oggetti più che numeri, fenomeno indicato con il termine «lifeworld dependency of cognition»: Hoffmann, 2007). Quando si raggiungono le cinque unità (corrispondenti a cinque dita) è necessario ricorrere all’altra mano e tener conto del fatto che è stata già considerata una mano completa:

Viene utilizzato il sistema posizionale in base 10: le bacchette sono disposte in colonne affiancate, con la colonna a destra che rappresenta le unità, seguita da quella delle decine etc. Per evitare malintesi (prima del VII–VIII secolo non sono noti simboli cinesi scritti per indicare lo zero), i matematici cinesi ricorrevano a due diverse disposizioni: le *Tsung*, sopra presentate, per unità, centinaia etc. e le *Heng* per decine, migliaia etc.:

Le bacchette da calcolo rendevano possibile la rappresentazione di numeri in forma concreta: erano collocate su di una “tavola da calcolo” dove venivano svolte le operazioni aritmetiche. Molte tecniche di calcolo erano basate sull’uso di bacchette, dal periodo Han (206 a.C.–220 d.C.) al periodo Yuan (1279–1368): secondo una congettura l’abaco cinese fu una derivazione delle bacchette da calcolo (Martzloff, 1997, p. 216).

Useremo le bacchette da calcolo per introdurre la risoluzione di sistemi di equazioni lineari, seguendo un procedimento analogo al moderno metodo di eliminazione (Ilyushchenko, 1992). Considereremo una classe del primo anno di una Scuola Secondaria di I grado (anche se non intendiamo con ciò affermare che i sistemi lineari vadano introdotti in tale livello scolastico). Tuttavia l’idea di utilizzare un metodo cinese per risolvere un sistema di equazioni ci darà l’opportunità di discutere alcuni elementi collegati all’uso dei segni, sulla base di alcuni concetti introdotti da Peirce (Radford, 2002–a, 2002–b).

Il nostro principale scopo sarà infatti collegato alla dimensione cognitiva coinvolta in alcune procedure di problem solving, e questa ricerca richiederà una riflessione sui segni e sugli artefatti. Dunque il nostro lavoro riguarderà sia l’insegnamento della matematica (un modo di introdurre le equazioni in classe) che le relazioni tra artefatti, segni e cognizione in un particolare contesto (come vedremo, un contesto collegato al gioco). La risoluzione di un sistema lineare non è un problema didattico principale, almeno per giovani studenti; potremo comunque chiederci: sono in grado i nostri allievi di risolvere un sistema di equazioni mediante una procedura basata sugli antichi metodi cinesi? Qual è il ruolo dei segni? Quale quello del contesto? Andremo quindi a discutere un case study la cui importanza è basata sui seguenti elementi: non è incluso nel tradizionale approccio didattico e culturale, dunque l'influenze di attività precedenti è minima (considereremo, come notato, un gruppo di studenti giovani in modo da evitare l'influenza di esperienze collegate alla risoluzione di sistemi); inoltre, esso è interessante per la connessione tra "vedere", "fare" e "dire" in un contesto particolare.

Quadro teorico

Secondo Vygotskij, la funzione di mediazione semiotica può collegarsi agli artefatti. Radford descrive «un approccio basato su artefatti, cioè oggetti dai quali emerge la *tekhnē* algebrica e la concettualizzazione dei suoi oggetti teorici. […] Essi sono considerati *segni* in senso vygotskiano» (Radford, 2002–a, § 2.2; si veda inoltre: Radford & Grenier, 1996). Naturalmente la sola considerazione di un artefatto non determina il modo in cui esso sarà utilizzato dagli studenti (Bartolini Bussi, Mariotti & Ferri, 2005). Un aspetto di cui tenere conto sarà il contesto in cui proporre l'attività con le bacchette da calcolo (Radford, 2002–a, 2002–b, 2003–a, 2003–b): come vedremo, agli studenti non sarà chiesto di realizzare un'attività propriamente *matematica* (algebrica). Essi si accosteranno al metodo da usare come ad un (nuovo) *gioco* e sarà quindi necessario chiedersi se il contesto del gioco sia utile per introdurre alcuni contenuti matematici (Baldino & Al., 1995).

Il nostro quadro teorico si collega con alcune considerazioni sugli aspetti semiotici, basate sull'approccio peirceano (sebbene la relazione tra Vygotskij e Peirce non possa essere considerata banale: Seeger, 2005; per Vygotskij «il segno non è […] mero mezzo di pensiero e di formazione di idee (Peirce), ma, soprattutto, mezzo di *trasformazione* delle funzioni psichiche dell'individuo»: Radford, 2006, p. 38). Secondo M.H.G. Hoffmann, i sistemi cognitivi sono innanzitutto sistemi semiotici, essendo dipendenti dai segni e mediati dalle rappresentazioni; quindi segnala due principali questioni: «come il mondo esterno influenza e promuove lo sviluppo di capacità cognitive, e come possiamo portarci da queste capacità, necessariamente collegate con situazioni concrete, alla conoscenza astratta» (Hoffmann, 2007, p. 185). Ci concentreremo sul primo punto, e gli aspetti semiotici saranno importanti in tale prospettiva.

Secondo Peirce non possiamo “pensare senza segni” e i segni sono costituiti da tre parti correlate: un oggetto, un segno propriamente detto e un interpretante (Peirce, 1998, p. 478; in Peirce il termine segno è usato sia per la terna “oggetto, segno, interpretante” che per il segno propriamente detto, il “representamen”, negli ultimi lavori). L’interpretante può collegarsi alla comprensione che gli utenti del segno hanno della relazione tra il segno e l’oggetto; dunque il significato di un segno si manifesta nell’interpretazione generata negli utenti (Liszka, 1996). Peirce considerò sia l’oggetto immediato, rappresentato da un segno, che l’oggetto dinamico che viene progressivamente a costituirsi nel processo semiosico. infatti un interpretante può essere considerato un nuovo segno (*semiosi illimitata*). Il limite di questo processo, nelle parole di Peirce, è l’*interpretante logico finale* e non è un segno, altrimenti indurrebbe un nuovo interpretante. Si tratta di un *habit–change* («intendendo con habit–change una variazione delle tendenze del soggetto sulla base di esperienze precedenti», in *Pragmatism*, 1931–1958, § 5.475).

Il segno determina un interpretante mediante le caratteristiche del modo in cui il segno stesso, rappresentando l’oggetto, determina la nostra comprensione. L’approccio peirceano associa i segni con la cognizione, e gli oggetti (qualsiasi cosa si intenda con questo termine – non affronteremo qui il problema dell’esistenza di “oggetti matematici” che saranno considerati come “procedure oggettualizzate”: Sfard, 1991; Giusti, 1999; riprenderemo la questione) “determinano” i segni, dunque la natura cognitiva dell’oggetto influenza la natura del segno. Peirce suddivide i segni in tre classi, basati su di una rappresentazione qualitativa (il segno è in tale caso un’*icona*), fisica (un *indice*) e convenzionale (un *simbolo*, sebbene le idee di Peirce siano cambiate nelle varie fasi dello sviluppo della sua teoria).

Consideriamo ora sia la nostra tradizionale espressione algebrica che l’antico modo cinese di esprimere quantità e procedure mediante le bacchette da calcolo. Con riferimento alle espressioni moderne, dobbiamo tener presente che secondo Peirce le formule algebriche sono icone, cioè segni che rappresentano in virtù di una somiglianza (Zeman, 1986). Citiamo lo stesso Peirce (1931–1958, § 2.279, *MS* 787):

> Particolarmente degne di nota sono le icone nelle quali la somiglianza è collegata a regole convenzionali. Pertanto una formula algebrica è un’icona ed è resa tale dalle regole di commutazione, associazione e distribuzione dei simboli; essa potrebbe essere ben ritenuta un segno convenzionale composto. Ad una prima considerazione la classificazione di un’espressione algebrica come icona può apparire arbitraria, potendo essere interpretata come una composizione di segni convenzionali. Ma non è così, in quanto una proprietà altamente distinti-

> va dell'icona è quella che consente ad una semplice osservazione di scoprire delle verità che superano quanto è stato considerato per la sua costruzione. [...] In questa capacità di rivelare verità inattese sta precisamente l'utilità delle formule algebriche, per cui in esse è il carattere iconico ad essere prevalente.

È necessario precisare due punti. Innanzitutto pure icone, secondo lo stesso Peirce (1931–1958, § 1.157) appaiono, eventualmente, soltanto nel pensiero. Pure icone, puri indici o puri simboli non sono segni reali (Sonesson, 1989, § III–1). Ogni segno "contiene" tutte le componenti della suddivisione peirceana, nonostante una di esse risulti predominante: ad esempio, chiamiamo "simbolo" un segno le cui componenti di iconicità e di indicalità siano secondarie. Da questo punto di vista possiamo classificare le nostre espressioni algebriche come *icone complesse* (Bakker & Hoffmann, 2005). Inoltre, un segno in se stesso non è un'icona, un indice o un simbolo (ciò dipende anche dall'oggetto e dall'interpretante, ed è possibile che un segno sia interpretato prevalentemente come icona da una persona e come simbolo da un'altra). Didatticamente, l'identificazione dei segni non è solamente una questione di identificare un segno, ad esempio, come icona, ma di considerare le conseguenze cognitive nell'apprendimento (Radford 2000, 2003–a, 2003–b). Tutto ciò, naturalmente, deve essere considerato in un contesto culturale che coinvolge i simboli condivisi da una comunità, le tradizioni, gli artefatti (Bagni, 2006).

In *On the Algebra of Logic*, Peirce (1931–1958, § 3.363) sottolinea l'importanza dell'iconicità; nota che «il ragionamento consiste nell'osservare che quando dove sussistono certe relazioni se ne trovano anche altre, e ciò richiede che le relazioni su cui si ragiona siano mostrate in un'icona"; inoltre "la deduzione consiste nel costruire un'icona o un diagramma con le parti aventi relazioni che siano in completa analogia con quelle delle parti dell'oggetto sul quale si ragiona, nell'immaginare delle sperimentazioni su questa immagine e nell'osservare il risultato, quindi la scoperta di relazioni non notate o nascoste tra le parti» (Peirce distingueva diversi tipi di icona – immagini, metafore e diagrammi). Secondo Radford (in via di pubblicazione), dato che il ruolo epistemologico del "ragionamento diagrammatico" consiste nel rendere apparenti alcune relazioni nascoste, esso si collega alle azioni di *oggettualizzazione*, e un diagramma può essere considerato un *mezzo semiotico di oggettualizzazione*. È importante notare che «le attività diagrammatiche saranno sempre inserite in un contesto discorsivo che offre un ricco linguaggio mediante il quale parlare dei diagrammi e delle loro trasformazioni» e «i principianti dovranno imparare questo linguaggio parallelamente allo sviluppo delle azioni pratiche sul diagramma» (Dörfler, 2006, p. 108; in generale: Hoffmann, 2004; Bakker & Hoffmann, 2005).

Qual è infine la differenza, da un punto di vista peirceano, tra le nostre formule algebriche e l'antico modo cinese di esprimere quantità e procedure? Se consideriamo le espressioni cinesi con le bacchette da calcolo, i segni sono evidentemente diversi da quelli impiegati nelle scritture moderne (icone complesse). La loro iconicità è più esplicita (si veda la differenza tra 5 e 𝍤 per esprimere "cinque" – sebbene, ad esempio, nel caso di 𝍥 per "sei", la bacchetta orizzontale sia da collegare ad un ruolo simbolico); potremo inoltre considerare una componente secondaria di indicalità, tenendo conto della presenza concreta delle bacchette. Andremo a considerare tutte queste caratteristiche per interpretare i nostri dati sperimentali.

Alcune caratteristiche della matematica cinese

Secondo Needham (1959, p. 150), l'originalità della matematica cinese deve essere individuata nell'algebra. Sebbene il termine "algebra cinese" possa essere discusso, troviamo attività matematiche in Cina che possono essere collegate con problemi algebrici a partire dal 200 a.C. A volte l'algebra cinese è considerata di tipo retorico, ma un'osservazione di Martzloff (1997, p. 259) è importante per la nostra ricerca:

> Fondamentalmente l'algebra [cinese] non è una tecnica scritta, ma un complesso di procedure basate su di uno strumento: le bacchette da calcolo. Questo è il motivo per cui l'algebra cinese è a volte detta "instrumental algebra". L'immagine di un algebrista cinese al lavoro è quella di una persona che dispone bastoncini sul pavimento. A priori si potrebbe pensare ad una persona che gioca a Go o a qualche gioco simile.

La rappresentazione cinese di oggetti algebrici era caratterizzata da un aspetto posizionale (Needham 1959, p. 112). Nella rappresentazione cinese delle equazioni non c'era il segno di uguaglianza (e tale caratteristica non rappresenta una difficoltà per quanto riguarda l'efficacia didattica dell'artefatto: in Behr & Al., 1976, si rileva che spesso gli studenti interpretano il segno di uguaglianza come un "segno per fare qualcosa", piuttosto che un simbolo esprimente una relazione).

Jiuzhang Suanshu (*Nove Capitoli sull'Arte Matematica*, per il quale gli storici forniscono datazioni tra il 200 a.C. e il 50 d.C.) è un manuale anonimo contenente 246 esempi di metodi per risolvere alcuni problemi pratici (Chemla & Shuchun, 2004). Liu Hui (Siu, 1993; Cullen, 2002) scrisse un commentario sullo *Jiuzhang suanshu* nel 263, e un analogo commentario venne redatto da Li

Chunfeng intorno al 640. Nel presente lavoro considereremo due problemi tratti dal capitolo 8 (*Fangcheng*) di *Jiuzhang Suanshu*. Martzloff (1979, p. 250) sottolinea che, dalla fine del XIX secolo, il termine *fancheng* è stato usato per *equazione*, ma il suo tradizionale significato è diverso: in particolare, *fancheng shu* può essere tradotto *indicazioni su come distribuire numeri in colonne parallele in modo da formare un quadrato*, dunque il termine *fancheng* può collegarsi a matrici quadrate.

Nel capitolo 8 di *Jiuzhang Suanshu* troviamo 18 problemi che possono essere impostati in termini di sistemi lineari di equazioni. Il metodo proposto si riferisce alla matrice dei coefficienti e I problemi coinvolgono fino a sei equazioni in sei incognite. La matrice viene ridotto a forma triangolare mediante operazioni elementari come nel moderno metodo di eliminazione: la principale differenza rispetto al procedimento di Gauss consiste in uno scambio di ruoli tra righe e colonne (anche se un simile confronto richiede molta prudenza, considerate le differenze dei rispettivi contesti storici e culturali: Spagnolo, Ajello & Xiaogui, 2005).

Consideriamo il seguente problema (originale con dati variati):

(*Problema 1*) *Cinque covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 19 dou. Tre covoni di grano di tipo A aggiunti a due covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 12 dou. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B*?

Il testo porta al sistema (in notazione moderna): $\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

Presentiamo l'originale metodo *fancheng*. Come notato, gli antichi matematici cinesi disponevano i numeri in colonne, ma qui per chiarezza utilizzeremo la convenzione attuale che prevede di scrivere i coefficienti orizzontalmente; dopo avere collocato i coefficienti e i termini noti in una tabella, essi possono essere variati mediante:

- l'espressione *biancheng* consente di moltiplicare tutti I termini della seconda riga per il primo numero della prima riga;
- l'espressione *zhichu* si riferisce ad una serie di sottrazioni termine a termine della prima riga dalla seconda che porta ad eliminare (*jin*) il primo numero della seconda riga.

Possiamo riassumere una delle soluzioni del sistema dato in questa sequenza di tabelle (si noti che i commenti originali esano verbali, senza tabelle e senza disegni):

(*Prima soluzione – basata sull'originale problema 1, capitolo 8*)

5	3	19
3	2	12

5	3	19
15	10	60

5	3	19
10	7	41

5	3	19
5	4	22

5	3	19
0	1	3

Questa sequenza si basa sul metodo *fancheng* originale: modernamente, in questa versione, la matrice del sistema è ridotta a forma triangolare. Una semplice divisione è sufficiente a ricavare il valore di una delle incognite (sebbene una tale operazione non sia esplicitamente inclusa nella lista delle "regole": terremo conto di ciò nel pianificare la nostra esperienza didattica) e per le altre incognite si ricorrerà a sostituzioni successive.

Il metodo presentato può essere variato per superare le eventuali difficoltà. A volte infatti le istruzioni generali non possono essere applicate (ad esempio non tutti i sistemi lineari hanno la matrice dei coefficienti con determinante non nullo; a volte è necessario ricorrere a numeri negativi per realizzare la procedura indicata, e questo elemento è didatticamente importante, sebbene nel capitolo 8 di *Jiuzhang Suanshu* i negativi siano usati: Lam & Ang, 1987) e la sequenza di sottrazioni successive (*zhichu*) può essere lunga da realizzare praticamente. Tali difficoltà sono state trattate con successo dai matematici cinesi antichi (e medievali): una nuova forma del metodo (problema 7 del capitolo 8 di the *Jiuzhang Suanshu*) è sintetizzato in questa sequenza di tabelle (sempre riferita al problema sopra presentato):

(*Seconda soluzione – basata sull'originale problema 7, capitolo 8*)

5	3	19
3	2	12

15	9	57
15	10	60

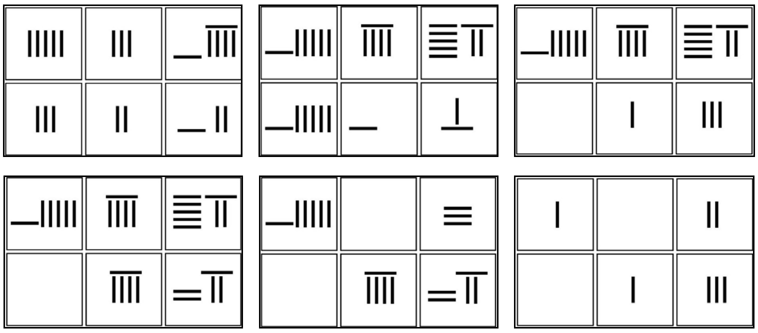
15	9	57
0	1	3

15	9	57
0	9	27

15	0	30
0	9	27

1	0	2
0	1	3

I precedenti esempi sono stati proposti, per chiarezza, utilizzando le cifre indo–arabe. La rappresentazione può però essere ottenuta anche mediante bacchette da calcolo:



In *Jiuzhang Suanshu* le procedure sono descritte molto dettagliatamente. Nella nostra esperienza proporremo agli studenti due regole per variare le quantità presenti nella tabella:

(1) *moltiplicazione di tutti i termini di una riga per un numero diverso da zero*
(2) *sottrazione di due righe termine a termine*

Le tecniche sopra viste sono due delle molte possibilità per risolvere il sistema applicando regole come queste.

Esamineremo ora il comportamento degli studenti.

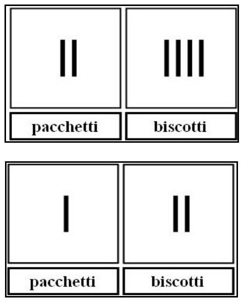
La ricerca sperimentale

Abbiamo raccolto alcuni dati empirici in un'esperienza che ha coinvolto un gruppo di studenti di 11 anni di una classe I media (a Treviso). Al momento dell'esperienza gli allievi si trovavano nel primissimo periodo della Scuola Media e provenivano da diverse scuole primarie. Non conoscevano le equazioni (solo alcuni di essi, durante la scuola elementare, avevano affrontato esercizi del tipo "qual è il numero conosciuto se il doppio o il triplo di tale numero è …"); non conoscevano i numeri negativi.

L'esperienza ha avuto luogo in classe, in occasione non valutativa: erano presenti 18 allievi, l'insegnante e il ricercatore (che non era l'insegnante della classe in questione).

Presentiamo le tre fasi della nostra esperienza:

- inizialmente l’insegnante ha presentato agli allievi la rappresentazione cinese dei numeri mediante bacchette da calcolo. Ha proposto alcuni esempi e gli studenti sono stati invitati a rappresentare alcuni numeri.
- quindi è stata predisposta una tabella con etichette e sono stati rappresentati semplici problemi mediante bacchette (“in due pacchetti uguali ci sono in tutto quattro biscotti. Quanti biscotti ci sono in ciascun pacchetto?”). Tenendo conto che ogni pacchetto contiene lo stesso numero di biscotti, la soluzione è stata ottenuta dividendo i numeri nei quadrati. Lo scopo di “ottenere disposizioni con una singola bacchetta per il pacchetto” non è stato indicato dall’insegnante: è stato ricavato dagli allievi tenendo conto dell’esempio.

  Nella fase successiva, gli studenti utilizzeranno le regole (1) e (2), sopra presentate. Come notato, la divisione non è esplicitamente prevista da tali regole, dunque la fase ora in esame appare necessaria e significativa. Naturalmente la regola (1) da un punto di vista più evoluto potrebbe riferirsi alla moltiplicazione per ½, ma questo approccio collegato con i razionali appare estraneo alla considerazione delle bacchette da calcolo, quando il termine “numeri” viene riferito solo a interi non negativi.
- infine, gli allievi sono stati suddivisi in gruppi di tre. L’insegnante ha proposto il problema sopra esaminato e ha rappresentato i dati mediante bacchette da calcolo in una tabella (con appropriate etichette); ha sottolineato che “la disposizione delle bacchette rappresenta i dati del problema” e ha illustrato (con diversi esempi) le regole (1) e (2) mediante le quali cambiare la disposizione. Ha quindi esplicitamente chiesto: “cercate di trovare quanti *dou* di grano ci sono in un covone di tipo A quanti *dou* di grano ci sono in un covone di tipo B usando le bacchette cinesi”. Gli allievi hanno utilizzato le bacchette e non hanno dovuto scrivere alcunché. Durante l’esperienza l’insegnante non ha dato suggerimenti.

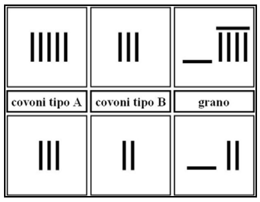
  Il materiale registrato e le relative trascrizioni ci hanno permesso di evidenziare alcuni passaggi: esamineremo in particolare due estratti, [a] e [b].

Dati sperimentali

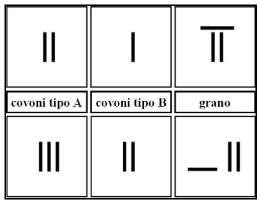
Primo problema

Agli studenti è stato dunque richiesto di risolvere il Problema 1. Come vedremo nel primo estratto ([a]: 1 min 20 sec), un gruppo di allievi ha ottenuto la soluzione del problema. Un’allieva (S.) ha guidato la procedura e un’altra (F.) ha proposto alcuni commenti. Il terzo allievo (R.) non ha avuto un ruolo attivo.

[a1] S.: “Comincio tipo da sopra che ce n’è di più. Quelli di sopra meno quelli sotto, lì a destra si toglie il dieci… ne restano nove, meno due fa sette” [S. guarda l’insegnante e toglie le bacchette]

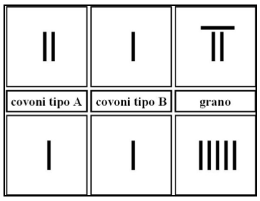


[a2] F.: “Adesso poi sotto, sono di più, bisogna toglierli, cavarne più che si può” [indica la seconda riga]



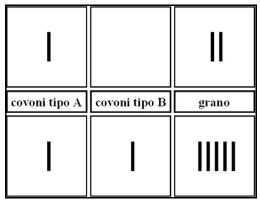
[a3] S.: “Questi qua meno quelli sopra, dodici meno sette cinque” [toglie le bacchette]

[a4] R.: “Va bene, sì, ne abbiamo cavati tanti”.



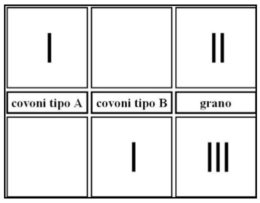
[a5] S.: “Ancora sopra meno sotto… il sette meno cinque due” [S. toglie le bacchette]

[a6] F.: “Via i B, con quelli di sopra siamo a posto, eh?”



[a7] S.: “Questo fa due cioè due di quei *dou*. Adesso si fa ancora… questi qui meno quelli” [S. indica la seconda riga e successivamente la prima riga, guarda l’insegnante e toglie le bacchette]

[a8] F.: “Mm, si riesce quando due diventano uguali” [F. indica i primi quadrati delle righe]



[a9] S.: “Ecco, ne abbiamo uno su e uno giù e lì il grano, due *dou* e tre *dou*. Finito, abbiamo trovato la risposta”.

Per quanto riguarda quanto ora presentato, si noti che in una prima fase ([a1]–[a5]) gli allievi sembrano riferirsi alla necessità di “togliere” il maggior numero di bacchette possibile (dato che hanno capito. Sulla base degli esempi precedenti, che lo scopo del gioco è di ottenere una disposizione di bacchette con un solo elemento per ciascuna riga, a proposito dei covoni), e ciò può essere riferito alla concreta presenza delle bacchette, un elemento di tipo indicale. Tuttavia la sottrazione termine a termine di due righe viene condotta “togliendo” il numero di bacchette espresso nella seconda riga (e i gesti degli allievi sono significativi, [a2]). In questa fase il confronto di due righe può riferirsi al ragionamento diagrammatico, evidenziando una relazione nascosta (Peirce, 1931–1958, § 3.363, e Radford, in via di pubblicazione). S. afferma:

[a1] "Comincio tipo da sopra che ce n'è di più"

F. replica:

[a2] "Adesso poi sotto, sono di più, bisogna toglierli, cavarne più che si può".

Naturalmente questa strategia non può considerarsi del tutto corretta e comunque applicabile (si veda [a4]); comunque la presenza di molte bacchette è considerato un ostacolo da superare mediante una loro progressiva riduzione e ciò risulta possibile applicando la regola (2). Le seguenti espressioni di F. sono interessanti e significative:

[a6] "Via i B, con quelli di sopra siamo a posto, eh?"
[a8] "Mm, si riesce quando due diventano uguali".

L'obiettivo è raggiunto e F. finalmente comprende che la procedura impiegata si collega ad alcuni specifici disposizioni delle bacchette sulla tavola da calcolo: una riga è "a posto" quando uno dei quadrati riferiti a un genere di covoni è vuoto ([a6]) e questa situazione potrebbe essere collegata all'indicalità (assenza di bacchette concrete nel quadrato considerato) ma anche all'iconicità (valutazione a colpo d'occhio dell'assenza di bacchette). Tale situazione può essere raggiunta quando due quadrati riferiti allo stesso tipo di covoni contengono lo stesso numero di bacchette ([a8]) e il confronto dei quadrati può essere considerato un aspetto iconico. S. e F. applicano solo la regola (2) che consente la sottrazione termine a termine (ma ciò non può essere fatto in tutte le situazioni: gli allievi non conoscono i numeri negativi).

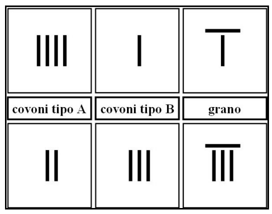
Questa prima descrizione ci consente di evidenziare l'importanza di espressioni deittiche ("questi", "quelli") e dei gesti con i quali gli allievi indicano le righe ([a7]; Radford, 2003–a, 2003–b). Tali elementi potrebbero essere riferiti alla componente indicale (l'importanza dell'esperienza corporea può essere interpretata in relazione alla posizione secondo la quale le idee matematiche sono fondate sull'esperienza sensoriale: Arzarello, 2000; Lakoff & Núñez, 2005).

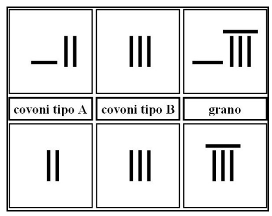
Secondo problema

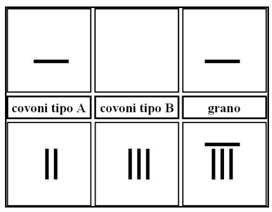
Allo stesso gruppo di allievi (S., F., R.) abbiamo proposto un secondo problema:

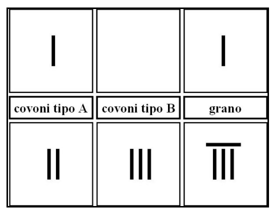
(*Problema 2*) *Quattro covoni di grano di tipo A aggiunti a un covone di grano di tipo B hanno il rendimento di 6 dou. Due covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 8 dou. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B*?

Non è possibile risolvere questo problema applicando unicamente la regola (2) che porterebbe a usare dei numeri negativi. Come vedremo dalla trascrizione seguente ([b]: 2 min 10 sec), dopo una prima fase (non molto lunga, con commenti come [b1] e [b2]), S. applicherà la regola (1) che permette la moltiplicazione di tutti i termini di una riga per un numero non nullo k (in questo caso la prima riga per $k = 3$) e la procedura può proseguire.









[b1] S.: "Mm, no, non si può togliere questi da quelli, non ce ne sono abbastanza lì" [S. indica la seconda riga, quindi la prima riga e tocca le bacchette nel primo quadrato. Guarda l'insegnante]

[b2] F.: "Neanche di là si può… Beh, stavolta ci han dato un esercizio impossibile, eh?" [S. tocca le bacchette della seconda riga più volte. Passa circa un minuto]

[b3] S.: "Va bene che si devono togliere però se li aumentiamo… con l'altra, si può moltiplicare questi cioè… sì… finché non diventano abbastanza".

[b4] F.: "O quelli di sopra".

[b5] S.: "Facciamo qui… per tre" [S. indica il secondo quadrato della prima riga]

[b6] F.: "Eh sì, sì, bisogna far diventare questo uguale a questi!" [indica il secondo quadrato della prima riga e della seconda riga]

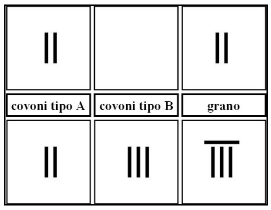
[b7] S.: "Dai, qui, facciamo qui per tre. Questo uno diventa tre, quattro per tre dodici e il grano, sei, fa diciotto" [cambia la disposizione]

[b8] S.: "Adesso si toglie, cioè qui va via, dodici, dieci, e dieci anche qui". [toglie le bacchette]

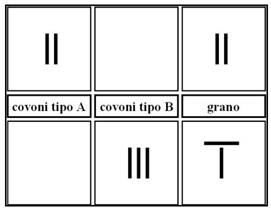
[b9] F.: "Sono uguali".

[b10] S.: "La prima è già fatta". [S. toglie le bacchette]

[b11] S.: “Adesso mi serve mandare via quello” [indica il primo quadrato della seconda riga] “basta moltiplicare per due” [S. aggiunge le bacchette]

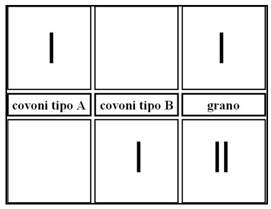


[S. toglie le bacchette]



[b12] F.: “Fatta”.

[b13] S.: “Ecco, si fa diviso come al solito, sei, fa due” [S. toglie le bacchette] “il grano è uno qui e due qui”.



La prima fase ([b1]–[b2], dopo un periodo di incertezza, circa un minuto di silenzio) è interessante: c’è un conflitto tra la situazione concreta e lo scopo precedentemente individuato ([a1]–[a5]), cioè la necessità di togliere il maggior numero possibile di bacchette:

[b1] “Mm, no, non si può togliere questi da quelli, non ce ne sono abbastanza lì”.
[b2] “[…]Beh, stavolta ci han dato un esercizio impossibile, eh?”

Questo conflitto porta F. ad una conclusione sbagliata; l’affermazione di S. è importante:

[b3] Va bene che si devono togliere però se li aumentiamo… con l’altra, si può moltiplicare questi cioè… sì… finché non diventano abbastanza”.

Le ultime parole sono significative: è necessario che le bacchette da calcolo siano “abbastanza”, e secondo noi ciò può essere interpretato sia con riferimento all’aspetto iconico (suggerito peraltro anche dalla presenza della regola da applicare, come notato in Peirce, 1931–1958, § 2.279) che a quello indicale del segno (collegato alla concreta presenza delle bacchette). Si noti che quando gli allievi usano correttamente la regola (1) che permette di moltiplicare tutti I termini della seconda riga per k = 3, F. si rende conto che la sua precedente conclusione (“stavolta ci han dato un esercizio impossibile”) era errata, indica i diversi quadrati e nota:

[b6] “Eh sì, sì, bisogna far diventare questo uguale a questi!”.

Dunque l’allieva collega l’applicazione della regola considerata all’effetto sulla disposizione delle bacchette: come rilevato nell’analisi del precedente estratto [a], F. è finalmente consapevole della necessità dell’assenza di bacchette in un quadrato per ottenere la risoluzione del problema, e capisce che per arrivare a ciò è necessario che due quadrati riferiti allo stesso tipo di covoni contengano lo stesso numero di bacchette. L’iconicità dei segni considerati permette di valutare il numero di bacchette a colpo d’occhio.

Discussione

Faremo riferimento ad alcune idee di Peirce per interpretare i nostri dati sperimentali. Poco fa abbiamo fatto cenno alla *semiosi illimitata*. Ogni fase del processo interpretativo produce un nuovo “interpretante *n*” che può essere considerato come “segno *n*+1” collegato all’oggetto (nel senso di una procedura oggettualizzata: Sfard, 1991; Giusti, 1999, p. 26). Possiamo ora chiederci: qual è il primo segno da associare al nostro oggetto? Possiamo trovare un elemento, o un complesso di elementi, dal quale trae origine la catena semiosica?

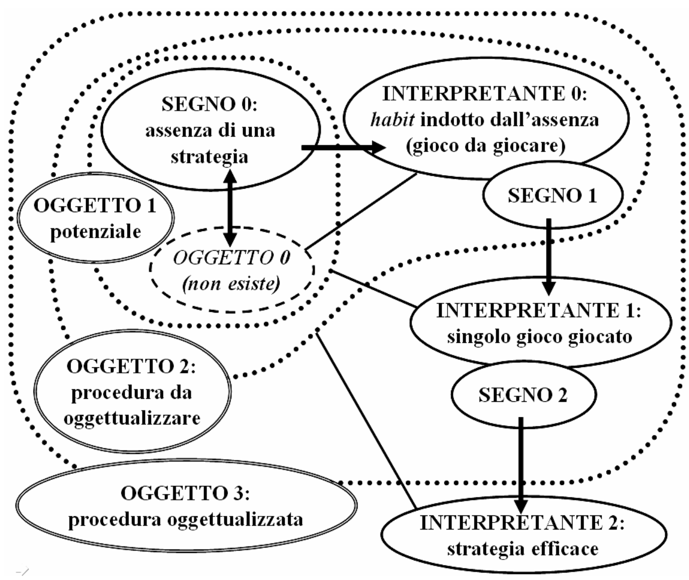
Il nostro oggetto matematico (una procedura) può essere rappresentato da un primo “segno”: una “assenza” può infatti essere considerata alla stregua di un segno. Si noti che non stiamo qui riferendoci all’assenza di oggetti concreti (ad esempio un gruppo di bacchette). Peirce (1931–1958, § 5.480) parlava di “un forte, ma più o meno vago, senso di necessità” che porta ai “*primi interpretanti logici* dei fenomeni”. Dunque possiamo supporre che questo genere di assenza sia il punto di partenza del processo semiotico.

Dal punto di vista didattico ciò è influenzato da molti elementi, la teoria nell’ambito della quale si sta operando, le persone coinvolte, il contesto sociale e culturale. Un tale “punto di partenza” può essere descritto come un complesso di “oggetto–segno–interpretante” senza un rigido ordine “cronologico”: può dunque essere considerato un *habit* collegato all’assenza di una procedura, o, più precisamente, *una procedura da oggettualizzare*. Dunque la situazione è caratterizzata da sensazioni intuitive e dall’influenza di elementi sociali, culturali, tradizionali. Più tardi, quando emergeranno gli aspetti formali, il nostro oggetto diventerà più “rigoroso” (facendo riferimento con ciò alla concezione di rigore in un contesto).

Quindi nel primo approccio al gioco gli allievi hanno la percezione di un'assenza, riferita alla strategia da seguire (alla procedura da oggettualizzare): ciò descrive la situazione caratterizzata dal gioco che deve essere giocato, all'inizio dell'esperienza. Gli esempi proposti agli allievi con i pacchetti e i biscotti (vedi sopra) hanno indotto gli studenti a considerare come scopo "ottenere disposizioni con una singola bacchetta per i covoni", sebbene ciò non sia stato esplicitamente affermato dall'insegnante. Una vera e propria strategia è assente e un "oggetto potenziale" si collega alla possibilità di trovare una procedura efficace per giocare il (singolo, particolare) gioco considerato:

In questa fase l'efficacia della procedura è fondamentale: non c'è un vero e proprio oggetto matematico da considerare, ma gli studenti si trovano di fronte ad un gioco che può e deve essere giocato, dunque la possibilità di dare una prima "struttura" alle proprie strategie (ad esempio considerando alcune azioni standard, [a2]) le rende una procedura che può essere oggettualizzata.

La procedura è caratterizzata da una strategia ed è ripetibile per alcuni casi analoghi. Una prima oggettualizzazione può essere rilevata, almeno in parte, in [a8] e in [b6], sebbene, a nostro avviso, l'esperienza esaminata non consenta di affermare che gli allievi raggiungano una forma completa di oggettualizzazione (nell'immagine l'interpretante 2 è collegato a una procedura oggettualizzata):



In seguito la nostra strategia potrà diventare un "oggetto autonomo": non sarà più collegata ad una singola situazione e potrà essere applicata a molti casi anche nettamente diversi. Dal punto di vista didattico tale fase potrà essere caratterizzata dalla comparsa e dal consolidamento di uno *schema* d'azione che consentirà l'uso di regole e di oggetti (Bagni, 2008; ulteriore ricerca potrà essere dedicata a ciò, ad esempio seguendo Rabardel, 1995).

La precedente descrizione ci porta a riferirci al modello teorico di Anna Sfard (1991), secondo cui nella formazione di concetti le fasi operative precedono quelle strutturali. In tale approccio si considerano inizialmente alcune operazioni che si sviluppano su oggetti noti in cui le manipolazioni sono soltanto dei processi; quindi un (nuovo) oggetto matematico progressivamente emerge dai processi usati. Nella fase detta di *interiorizzazione* il soggetto opera con i processi che porteranno al nuovo concetto. La fase della *condensazione* è lo stadio in cui il soggetto diventa capace di pensare a un processo in termini unitari, senza entrare in dettagli o eseguirlo (ci si riferisce al processo come a qualcosa che avviene in una "scatola nera"). Quando si è in grado di concepire la nozione come un oggetto a sé stante, si dice che il concetto è stato *reificato*. In un successivo lavoro, Sfard (1999) approfondisce i meccanismi della formazione dei concetti (il quadro teorico dell'Autrice si è poi evoluto in Sfard 2008, lavoro in cui si fa riferimento ad alcune posizioni del "secondo" Wittgenstein).

Il modello di Sfard si presta bene a ripercorrere la genesi di alcuni contenuti matematici (come precedentemente fatto), ma richiede qualche precisazione. Una di queste è l'eventuale parallelismo tra lo sviluppo storico e la crescita cognitiva: alcune posizioni sociologiche sono critiche (Wertsch, 1991; già Werner, nel 1948, sottolineò differenze essenziali tra filogenesi e ontogenesi: lo sviluppo del bambino avviene in un ambiente culturale, dunque il collegamento tra ontogenesi e filogenesi è solo formale: Werner, 1948, pp. 27–28). Inoltre dal punto di vista didattico un corretto approccio non può limitarsi a descrivere un'oggettificazione. Un aspetto essenziale è capire come gli studenti, mediante processi semiotici sociali, maturino la consapevolezza di come i segni vengono manipolati. La semiotica è dunque utile nell'analisi di molti processi, ma la sua applicazione corrisponde a una semplificazione: non sempre possiamo far riferimento a una successione discreta di segni: l'esperienza appare vicina a un processo continuo che coinvolge in modo interrelato gesti, parole, linguaggi immagini etc. (si vedano gli spunti in: Radford, Schubring & Seeger, 2008).

Riflessioni conclusive

L'esperienza presentata deve essere considerate un case study (per poter trarre conclusioni generali sarebbe necessario considerare un più ampio ventaglio di casi e identificare i criteri di campionamento). I nostri dati non intendono provare che le bacchette da calcolo possono essere usate per introdurre in termini nuovi e produttivi i sistemi di equazioni. Tuttavia l'analisi dell'artefatto basata sui comportamenti degli studenti consente di evidenziare alcune potenzialità dell'artefatto stesso (l'interpretante è un elemento essenziale del segno considerato: il potenziale cognitivo di un artefatto non può essere dissociato dalla mediazione delle regole inerenti alle modalità d'uso, e l'analisi dei comportamenti degli studenti possono fornire una verifica sperimentale, anche se parziale, della discussione teorica, per confermare l'analisi dell'artefatto) e i dati sperimentali ci hanno permesso di identificare alcuni elementi interessanti. Li analizzeremo con riferimento al nostro quadro teorico.

Artefatti e segni

Abbiamo sopra fatto riferimento alle due principali questioni segnalate da Hoffmann: «come il mondo esterno influenza e promuove lo sviluppo di capacità cognitive, e come possiamo portarci da queste capacità, necessariamente collegate con situazioni concrete, alla conoscenza astratta» (Hoffmann, 2007, p. 185). Come sopra notato, la nostra ricerca si riferisce alla prima questione. In una prospettiva vygotskiana, un artefatto è un mediatore, ed è necessario usarlo correttamente. Nell'esperienza descritta le caratteristiche dell'artefatto dipendono dalle sue caratteristiche semiotiche, e i dati sperimentali suggeriscono che l'importanza delle bacchette da calcolo (per gli allievi considerati) è da collegarsi alla notevole componente iconica e ad un secondario aspetto indicale.

Gli oggetti matematici nei processi di insegnamento–apprendimento non sono accessibili solamente in un approccio simbolico–ricostruttivo, almeno nella fase che abbiamo esaminato. Naturalmente sarà importante approfondire la concettualizzazione dell'esperienza descritta (pre–algebrica), ad esempio la sua possibile "traslazione" alla notazione algebrica moderna, e ulteriori ricerche saranno dedicate allo studio delle possibilità didattiche connesse ad attività simili a quella ora presentata. Comunque il nostro scopo principale non è incentrato sulla possibilità di derivare un'argomentazione o una dimostrazione matematica (tenendo conto di Balacheff, 2004; per quanto riguarda la matematica cinese si veda: Siu, 1993): la nostra esperienza ci ha invece permesso di evidenziare il ruolo della presenza fisica delle bacchette da calcolo.

Una delle principali differenze tra l'antica rappresentazione cinese dei numeri e la nostra notazione numerica indo–araba si collega al fatto che le bacchette sono oggetti concreti e non segni tracciati sulla carta. Ciò ha alcune conseguenze pratiche: ad esempio, una differenza tra un processo con carta e matita in notazione indo–araba e il metodo cinese con le bacchette da calcolo si collega al fatto che nel secondo non rimane traccia dei passaggi una volta che essi vengono realizzati (ad ogni fase del processo non c'è memoria di quanto svolto in precedenza). In un'ottica peirceana, tuttavia, il punto principale si collega all'aspetto iconico e alla (secondaria) componente indicale. Ad esempio, le espressioni deittiche sono significative: sebbene nel nostro caso i gesti non sono collegati alla produzione di segni di tipo algebrico, essi hanno un ruolo importante che può essere messo in relazione con la presenza concreta delle bacchette. Abbiamo ricordato che le nostre espressioni algebriche possono essere considerate *icone complesse* (Bakker & Hoffmann, 2005), ora concludiamo che esse sono "più complesse" delle rappresentazioni cinesi con le bacchette, la cui iconicità rilevabile nei comportamenti degli allievi è spesso evidente.

Nell'esperienza descritta, gli studenti hanno dato la preferenza alla regola basata sulla presenza concreta delle bacchette da calcolo: queste sono dunque icone e determinano un interpretante sulla base di alcune caratteristiche della loro iconicità. Ciò ha suggerito agli studenti alcune strategie risolutive (e possiamo ancora riferirci al ragionamento diagrammatico di Peirce: gli allievi si rendono conto che una riga è "a posto" quando uno dei quadrati è vuoto, [a6], e questo obiettivo può essere facilmente raggiunto quando sue quadrati riferiti allo stesso tipo di covoni contengono lo stesso numero di bacchette, [a8]).

Quando gli studenti applicano la regola (2) che consente la sottrazione termine a termine di due righe, essi considerano due quantità che essi possono vedere e toccare, mentre quando, successivamente, applicano la regola (1) che consente di moltiplicare tutti i termini di una riga per un numero k, questo k non può essere riferito direttamente alla concreta presenza delle bacchette. Le bacchette da calcolo nella prima fase sono interpretate e usate dagli allievi come icone ed indici, con una minore componente di indicalità (particolarmente nella seconda parte di [b]). Come notato (Radford, in via di pubblicazione), il ragionamento diagrammatico si collega alle azioni di oggettualizzazione e un diagramma, come artefatto semiotico, è un mezzo simbolico di oggettualizzazione: la precedente sequenza di fasi è interessante per il passaggio da una procedura concreta da oggettualizzare ad una prima forma di oggettualizzazione, e ulteriori ricerche potranno approfondire questi momenti.

Il contesto del gioco

Consideriamo un aspetto importante: qual è la *trasparenza* (nel senso di Meira, 1998) degli artefatti considerati? In effetti essi devono essere considerati *non trasparenti*: ad esempio, per l'allievo non c'è modo di sapere perché alcuni elementi di una tabella quadrata debbano essere addizionati, o perché gli elementi della colonna a destra rappresentino i totali, ovvero perché le trasformazioni suggerite preservino alcune caratteristiche delle disposizioni di bacchette. Qual è dunque il significato delle trasformazioni considerate? Quale concezione di incognita algebrica e di equazione emerge da questo artefatto? Non possiamo dare una risposta a queste domande in questa fase dell'analisi: come notato, la nostra ricerca non riguarda la questione «come possiamo portarci da queste capacità, necessariamente collegate con situazioni concrete, alla conoscenza astratta» (Hoffmann, 2007, p. 185). Tuttavia gli studenti hanno usato efficacemente una rappresentazione basata su segni (sia icone che indici), relazioni spaziali e regole. Un possibile percorso di ricerca da seguire può collegarsi al ruolo del gioco: questo contesto concreto può rendere possibile una prima introduzione di significati riferibili alla rappresentazione algebrica astratta.

Per quanto riguarda le nostre "regole del gioco", è importante notare che le regole convenzionali introdotte non sono strettamente necessarie per rendere possibile un'azione fisica con gli artefatti (le regole usate potrebbero essere semplificate: ad esempio, il ricorso a entrambe le disposizioni *Tsung* e *Heng* non è strettamente necessario, anche se l'aspetto interculturale ci ha indotto a riferirci alle disposizioni originali). Il linguaggio però non è solamente un codice le cui possibilità siano riferite soltanto all'aspetto sintattico: le sue possibilità creative vanno ricercate in come il linguaggio stesso è collegato al resto dell'umana attività e, nel caso considerato, nel contesto del gioco. Il problema da approfondire potrebbe piuttosto essere: questo gioco ha un ben definito significato "algebrico", per gli studenti? A volte lo scopo dei nostri allievi sembra essere quello di abbassare il numero delle bacchette, senza rendersi conto del significato di ciò (analogamente a quanto accade agli studenti di algebra che cercano di rendere "più corte" le espressioni). Abbiamo tuttavia un gioco nuovo da esplorare, da giocare (un gioco riferito ad una tradizione culturale diversa!) e anche questo può essere utile per dar senso alla procedura considerata (Jones, 2007).

Un gioco si basa sulle sue regole, ma qual è la differenza tra "pensare" e "seguire una regola"? Si noti che gli studenti non possono certo essere ridotti ad una sorta di esseri che seguono delle regole prive di significato: sebbene i nostri dati possano indurci a pensare che gli allievi non "pensino" ma "seguano delle regole", dobbiamo tener conto che essi stanno confrontandosi con un'attività vicina al gioco. Gli allievi interpretano le configurazioni di bacchette (che i matematici vedono come rappresentazioni di sistemi di equazioni) come le posizioni di un gioco. La metafora del gioco può essere legittimata nel contesto delle trasformazioni algebriche, anche se naturalmente fare algebra sarà molto più che giocare con dei simboli (o pre–simboli): la metafora richiede un'interpretazione e una concettualizzazione (alcuni ricercatori considerano le metafore private, dunque difficili da studiare: Presmeg, 1997). Solo più tardi, come abbiamo notato, la strategia degli allievi diventerà un "oggetto matematico" autonomo.

Abbiamo dunque proposto alcuni interrogativi. Per concludere, possiamo domandarci: qual è il beneficio da collegarsi all'attività descritta dal punto di vista dell'insegnamento–apprendimento? Alcuni allievi hanno effettivamente "giocato il gioco", e infine hanno risolto il sistema proposto, dunque gli esempi empirici descritti possono riferirsi a un modo di preparare gli studenti a risolvere sistemi di equazioni (sebbene, come notato, una simile conclusione richieda prudenza).

Più in particolare, consideriamo ancora il comportamento degli studenti: le trascrizioni lasciano vedere un'attività costruttiva da parte dei soggetti. Alcune affermazioni (ad esempio [a8], [b6]) suggeriscono che la strategia inizia ad essere oggettualizzata, anche grazie a una sorta di "azione" del contenuto matematico (incorporato nel gioco) sugli stessi studenti che agiscono; dunque questo ci spinge a concludere che proprio il contesto del gioco può essere rilevante per la corretta oggettualizzazione di una procedura, sebbene a tale riguardo sia necessario considerare i diversi studenti di volta in volta potranno essere coinvolti in esperienze come questa (in particolare, tener conto del loro background culturale).

Si noti infine che l'esperienza descritta può essere considerata come occasione per proporre un contenuto matematico con riferimento al contesto storico e geografico in cui esso è stato concepito e sviluppato (Spagnolo, Ajello & Xiaogui, 2005). La *prospettiva interculturale* si basa sull'identificazione e la celebrazione delle diversità che la storia ci mostra e l'educazione è uno strumento importante per promuovere la reciproca comprensione e il dialogo tra le culture (Abdallah–Pretceille, 1999).

Ringraziamenti

L'autore ringrazia Mariolina Bartolini Bussi (Università di Modena e Reggio Emilia), Willibald Dörfler (Università di Klagenfurt, Austria), Luis Radford (Università di Sudbury, Canada) e Man–Keung Siu (Università di Hong Kong, Cina) per i preziosi suggerimenti.

Bibliografia

Abdallah–Pretceille, M. (1999). *L'éducation interculturelle*. Paris: PUF.

Arzarello, F. (2000). Inside and outside: spaces, times and language in proof production. *Proceedings of PME–24*, 1, 22–38.

Bagni, G.T. (2006). Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of Set Theory. *Educational Studies in Mathematics,* 62 (3), 259–280.

Bagni, G.T. (2008). La nascita di un concetto matematico: Rafael Bombelli e gli immaginari. *Progetto Alice*, 27, 405–418.

Bakker, A., & Hoffmann, M. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: A semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 333–358.

Balacheff, N. (2004). *The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof*. http://www.leibniz.imag.fr/LesCahiers

Baldino, R.R., Souza, A.C.C., Monetti, A.L. & Scavazza, H.A., (1995). Games for integers: conceptual or semantic fields? *Proceedings of PME–19*, 2, 232– 239.

Bartolini Bussi, M.G., Mariotti, M.A. & Ferri, F. (2005). Semiotic mediation in primary school: Dürer's glass. In M.H.G. Hoffmann, J. Lenhard, & F. Seeger (Eds.), *Activity and sign. Grounding mathematics education. Festschrift for Michael Otte* (pp. 77–90). New York: Springer.

Behr, M., Erlwanger, S. & Nichols, E. (1976). *How children view equality sentences* (Report No. PMDC–TR–3). Tallahassee: Florida State Univ.

Brown T. (2001). *Mathematics Education and Language. Interpreting Hermeneutics and Post–Structuralism*. Dordrecht: Kluwer (I ed.: 1997).

Chemla, K. & Shuchun, G. (2004). *Les neuf chapitres. Le classique mathematique de la Chine ancienne et ses commentaires. Edition critique bilingue.* Paris: Dunod.

Cullen, C. (2002). Learning from Liu Hui? A different way to do mathematics. *Notices American Mathematical Society,* 49 (7), 783–790.

De Finetti, B. (2006). *L'invenzione della verità*. Milano: Cortina.

Dörfler, W. (2006). Inscriptions as objects of mathematical activities. In J. Maasz, & W. Schloeglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 97–111). Rotterdam–Taipei: Sense.

Giusti E. (1999). *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*. Torino: Bollati Boringhieri.

Hoffmann, M.H.G. (2004). How to get it. Diagrammatic Reasoning as a tool of knowledge development and its pragmatic dimension. *Foundations of Science*, 9 (3), 285–305.

Hoffmann, M.H.G. (2007). Learning from people, things, and signs. *Studies in Philosophy and Education,* 26, 3, 185–204.

Ilyushchenko, V.I. (1992). Gauss elimination method (1849 AD) in the ancient Chinese script Mathematics in nine chapters (152 BC). *Joint Institute for Nuclear Research*, E10–92–295, 1–4.

Jones, I. (2007). Arithmetical notating as a diagrammatic activity. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics,* Sheffield Hallam Univ., 27 (2), 31–36.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2005). *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica*. Torino: Bollati Boringhieri (2000, *Where mathematics come from? How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books).

Lam, L. & Ang, T. (1987). The earliest negative numbers: how they emerged from a solution of simultaneous linear equations. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 37, 222–262.

Liszka, J. (1996). *A General Introduction to the Semeiotic of Charles S. Peirce*. Bloomington: Indiana Univ. Press.

Martzloff, J.–C. (1997). *History of Chinese mathematics*. Berlin: Springer.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: the emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education,* 29 (2), 121–142.

Needham, J. (1959). *Science and civilisation in China*. New York: Cambridge Univ. Press.

Peirce, C.S. (1931–1958). *Collected Papers*. I–VIII. Cambridge: Harvard Univ. Press.

Peirce, C.S. (1998). *The Essential Peirce*. Peirce Edition Project. Bloomington: Indiana Univ. Press.

Presmeg, N.C. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematical learning. In L.D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 267–280). Mahwah: Erlbaum.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Colin.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in the students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics,* 42 (3), 237–268.

Radford, L. (2002–a). Algebra as tekhne: Artefacts, Symbols and Equations in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1 (1), 31–56.

Radford, L. (2002–b). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics,* 22 (2), 14–23.

Radford, L. (2003–a). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning,* 5 (1), 37–70.

Radford, L. (2003–b). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, 52 (2), 123–150.

Radford, L. (2006). Tre tradizioni semiotiche: Saussure, Peirce e Vygotskij. *Rassegna*, 29, 34–39.

Radford, L. (in via di pubblicazione). Rescuing Perception: Diagrams in Peirce's theory of cognitive activity. In de Moraes, L. & Queiroz, J. (Eds.), *C.S. Peirce's Diagrammatic Logic*. Catholic Univ. of Sao Paulo, Brazil.

Radford, L. & Empey, H. (2007). Culture, knowledge and the Self: Mathematics and the formation of new social sensibilities in the Renaissance and Medieval Islam. *Revista Brasileira de História da Matemática*. Festschrift Ubiratan D'Ambrosio, Especial 1, 231–254.

Radford, L. & Grenier, M. (1996). Entre les idées, les choses et les symboles. Une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'éducation*, 22, 253–276.

Radford L., Schubring G. & Seeger F. (Eds.) (2008). *Semiotics in Mathematics Education. Epistemology, History, Classroom, and Culture*. Rotterdam: Sense.

Seeger, F. (2005). Notes on a semiotically inspired theory of teaching and learning. In M. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity and sign – Grounding mathematics education* (pp. 67–76). New York: Springer.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.

Sfard, A. (1999). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In: P. Cobb et al. (Eds.). *Symbolizing and communicating: perspectives on mathematical discourse, tools, and instructional design* (pp. 37–98). Mahwah: Erlbaum.

Sfard, A. (2008). Thinking as Communicating. Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing. New York: Cambridge Univ. Press.

Siu, M.K. (1993), Proof and pedagogy in ancient China: examples from Liu Hui's Commentary on Jiuzhang Suanshu. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 345–357.

Sonesson, G. (1989). *Pictorial concepts. Inquiries into the semiotic heritage and its relevance for the analysis of the visual world.* Lund: Lund Univ. Press.

Spagnolo, F., Ajello, M. & Xiaogui, Z. (2005). Cultural differences in scholastic and non-scholastic environments: reasoning patterns and logical–linguistic questions in European and Chinese cultures. *International Conference on Mathematics Education into the 21st Century*. Johr Bahur (Malasya), 12–23.

Werner, H. (1948). *Comparative psychology of mental development*. New York: International Univ. Press.

Wertsch, J.V. (1991). *Voices of the Mind. A Sociocultural Approach to Mediate Action*. Cambridge: Harvard Univ. Press.

Zeman, J.J. (1986). Peirce's Philosophy of Logic. *Transactions Charles S. Peirce Society,* 22, 1–22.

Giorgio T. Bagni giorgio.bagni@dimi.uniud.it