Bollettino dei Docenti di Matematica, 55 (2007), 17–26

GIORGIO T. BAGNI

I DIAGRAMMI DI EULERO: RIFLESSIONI DIDATTICHE SULLA RAPPRESENTAZIONE DEGLI INSIEMI

Abstract. As regards the visual representation of sets, Euler diagrams (1772) were introduced by Leonhard Euler (1707-1783) and reprised (1880-1881) by John Venn (1834-1923) in order to show relationships between sets. The fundamental expressions of Set Theory are rooted in the linguistic structure of subject-predicate, and Euler-Venn diagrams display this structure as points in a closed plane figure: these representations should not be seen as means to replace the meaning of the predicative structure. In this paper we propose and discuss an example in order to show that the traditional representation by Euler diagrams cannot be considered, from the educational viewpoint too, completely equivalent to verbal or symbolic predicative expressions.

1. La celebre rappresentazione euleriana

Nella didattica della teoria elementare degli insiemi si ricorre molto spesso alla rappresentazione mediante una figura chiusa ricondotta a Leonhard Euler (1707-1783) e a John Venn (1834-1923; si veda: Venn, 1880).

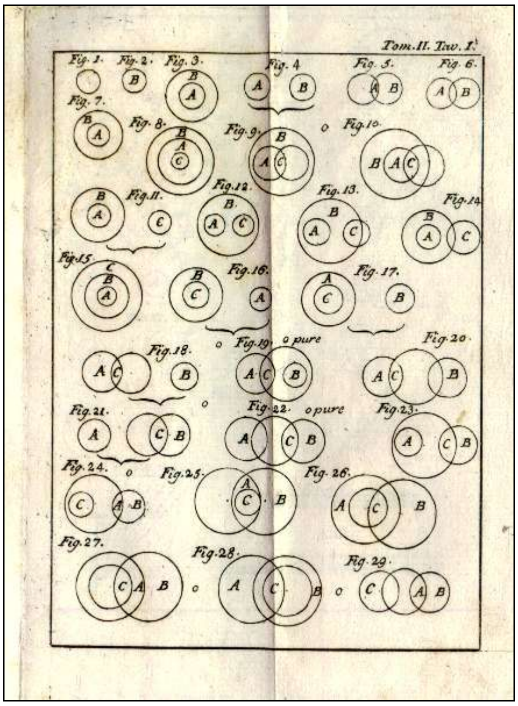


Fig. 1

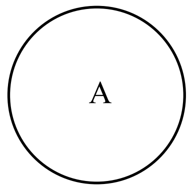
La rappresentazione euleriana per gli insiemi fece la sua comparsa nel 1772: nella Fig. 1 riportiamo una tavola tratta della prima edizione italiana dell'opera di Euler *Lettere ad una Principessa d'Alemagna* (Ferres, Napoli 1787; nella Fig. 2 il frontespizio del lavoro), la seconda edizione dopo quella originale in francese; tale opera riporta i contenuti di alcune lezioni impartite dall'Autore alla principessa di Arnhalt-Dessau, nipote del re di Prussia.

Fig. 2

Esaminiamo quanto Euler scrive nella lettera CII (datata 14 febbraio 1761), dopo avere ricordato la classificazione delle proposizioni aristoteliche:

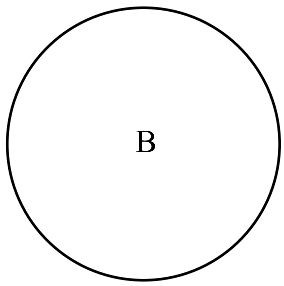
> «Per esprimere sensibilmente la natura di queste […] proposizioni, possiam rappresentarle per mezzo di figure, le quali son di un gran soccorso per ispiegare con somma distinzione qual sia l'esattezza di un raziocinio. E poiché una nozione generale contiene un'infinità di oggetti individuali, si può supporre a guisa di uno spazio, in cui questi oggetti son racchiusi: per esempio

si forma uno spazio per la nozione di *uomo* (*Tav. 1. fig. 1.*) in cui si suppone che tutti gli uomini sien radunati.



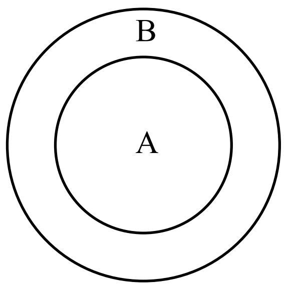
Tav. 1. fig. 1.

Per la nozione di *mortale* se ne forma un altro (*Tav. 1. fig. 2.*) dove si suppone che sia compreso quanto vi è di mortale.



Tav. 1. fig. 2.

E quando io pronunzio che *tutti gli uomini son mortali*, intendo che la prima figura sia contenuta nella seconda.



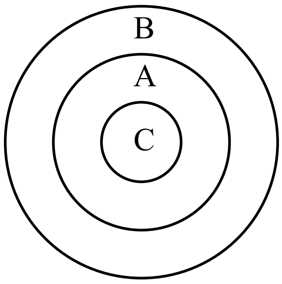
Tav. 1. fig. 3.

Dunque la rappresentazione di una proposizione universale affermativa sarà quella della *Tav. 1. fig. 3.*, in cui lo spazio A che dinota il soggetto della proposizione vien tutto intero racchiuso nello spazio B che è il predicato» (Euler, 1787, II, pp. 111-112).

Nella successiva lettera CIII (datata 17 febbraio 1761) Euler scrive:

«Questi cerchj o sien questi spazj (imperciocché è indifferente qualunque figura lor si dia) son molto a portata per facilitare le nostre riflessioni sopra questa materia, e per metterci in chiaro quanti misteri la logica si vanta di avere, i quali somma pena han costata per poterli dimostrare, mentre coll'ajuto di tai segni in un istante tutto salta agli occhi. [...] Quanto sin qui si è detto può essere sufficiente a far capire a Vostra Altezza, che tutte le proposizioni possono essere rappresentate con figure; ma il massimo vantaggio si manifesta ne' raziocinj, i quali qualora si esprimon con parole chiamansi *sillogismi*, in cui si tratta di tirare una conclusione esatta da alcune date proposizioni. Con tale invenzione noi potremo subito scandagliare le giuste forme di tutti i sillogismi.

Cominciamo da una proposizione affermativa universale *ogni A è B* [...] Se la nozione C è contenuta interamente nella nozione A, sarà contenuta anche interamente nello spazio B (*Tav. 1. fig. 8.*), donde risulta questa forma di sillogismo: *Ogni A è B*, ma *Ogni C è A*, dunque *Ogni C è B* e quest'ultima è la conclusione.

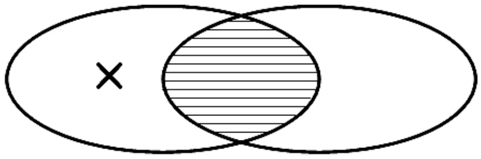


Tav. 1. fig. 8.

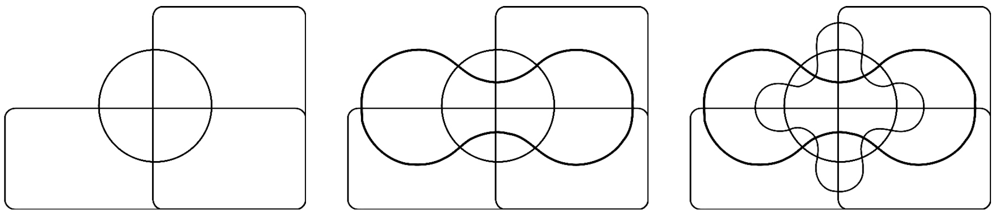
Per esempio. Si disegni la nozione A tutti gli alberi, la nozione B tutto ciò che ha radici, e la nozione C tutti i ciriegi, in tale caso il nostro sillogismo sarà il seguente: *Ogni arbore ha radici*, ma *Ogni ciriegio è un arbore*, dunque *Ogni ciriegio ha radici*» (Euler, 1787, II, pp. 113 e 115-116).

2. Da Leonhard Euler a John Venn

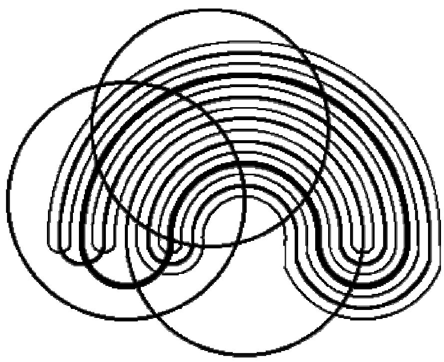
La storia dei *diagrammi di Eulero-Venn*, che può essere fatta risalire ad alcune rappresentazioni leibniziane (Baron, 1969; i diagrammi di Leibniz restarono però pressoché sconosciuti fino al 1903), è molto ricca di spunti per i matematici, in particolare per gli studiosi di geometria combinatoria e di teoria dei grafi (indichiamo ad esempio: Grünbaum, 1975, Chilakamarri, Hamburger & Pippert, 1996). Numerose sono le varianti, identificate mediante diverse caratteristiche e denominazioni (come *diagrammi di Johnston*, *diagrammi di Peirce*, *mappe di Karnaugh*...) sulle quali gli stessi addetti ai lavori non sempre si trovano completamente d'accordo. In generale nei diagrammi "di Eulero" si indicano solo le parti (ad esempio le intersezioni) non vuote. Nei diagrammi "di Venn" propriamente detti si rappresentano invece *tutte* le parti; in particolare, si indicano con una × le parti certamente non vuote e con un tratteggio quelle certamente vuote (le parti su cui non si hanno dati si lasciano bianche).



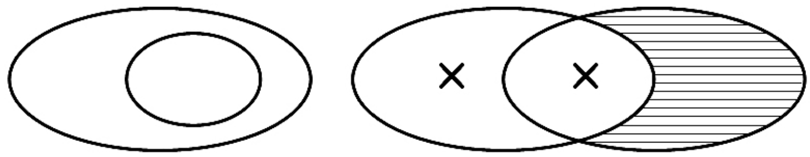
La realizzazione di un diagramma di Venn richiede, come notato, di disegnare una rappresentazione in cui tutte le possibili intersezioni siano presenti. Nello schema seguente è ad esempio illustrata la costruzione dei diagrammi di Venn secondo Edwards, relativamente a 3, 4 e 5 insiemi (Edwards, 2004), in cui è possibile evidenziare il ruolo essenziale di alcune proprietà di simmetria.



L'analoga costruzione originale proposta da Venn (1880) era invece simile alla seguente, indubbiamente meno chiara:



Tutto ciò è certamente molto preciso, ma nella pratica didattica sono i diagrammi di Eulero a risultare più chiari e "intuitivi". Ad esempio il fatto che A sia un sottoinsieme (proprio) di B appare evidente da una rappresentazione come quella a sinistra ("di Eulero"), piuttosto che da una come quella a destra ("di Venn").



Spesso dunque, didatticamente, con il termine “diagramma di Eulero-Venn” si fa riferimento ad una raffigurazione del primo tipo (talvolta con alcune ulteriori convenzioni rappresentative, come l’uso di indicare gli elementi con dei punti all’interno della figura ellittica).

Non ripercorreremo dettagliatamente la storia dei diagrammi di Eulero-Venn; preferiremo proporre un esempio la cui discussione ci porterà a riflettere sulla stessa concezione di “oggetto matematico”, nonché sul ruolo e sull’importanza delle sue rappresentazioni.

3. Un diagramma di Eulero “molto difficile”

In generale, i diversi sistemi di rappresentazione si collegano all’esperienza (spaziale e temporale) degli studenti in molti modi (Lakoff & Núñez, 2005) e l’uso di una rappresentazione come i diagrammi di Eulero-Venn coinvolge molti aspetti concettuali (Bagni, 2006-a).[1] Proporremo ora una breve riflessione sulle potenzialità e sui limiti di tale rappresentazione.

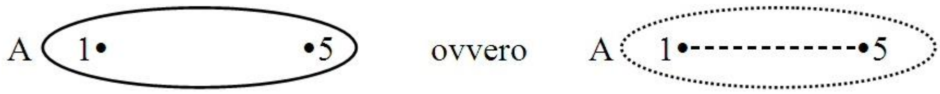
Ci baseremo sul seguente esempio (Bagni, in via di pubblicazione):

$$A = \{1, 5\};\ B = \{1; 2\};\ C = \{2; 3\};\ D = \{3; 4\};\ E = \{4; 5\};$$
$$F = \{2; 5\};\ G = \{3; 5\};\ H = \{1; 4\};\ I = \{1; 3\};\ J = \{2; 4\}$$

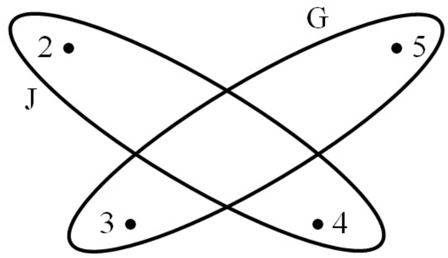
Si voglia rappresentare visualmente mediante un diagramma di Eulero-Venn la situazione ora descritta. Premettiamo due osservazioni:

(1) le dieci scritture $A = \{1, 5\}$, $B = \{1; 2\}$, $C = \{2; 3\}$, $D = \{3; 4\}$, $E = \{4; 5\}$, $F = \{2; 5\}$, $G = \{3; 5\}$, $H = \{1; 4\}$, $I = \{1; 3\}$, $J = \{2; 4\}$ richiedono di “collegare” ogni elemento di $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ con ciascuno degli altri elementi dello stesso insieme, venendo così a formare i dieci sottoinsiemi ora indicati. Tale collegamento porta, per costruire un diagramma di Eulero, a realizzare una sorta di “connessione” grafica dei due elementi in gioco (in generale un insieme viene rappresentato da una parte connessa di piano):

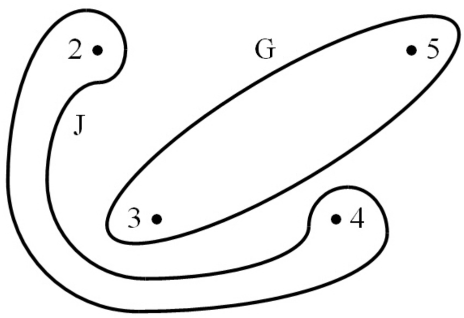
[1] Il riferimento ai registri rappresentativi, frequente nella recente ricerca didattica, deve essere precisato: l’impiego di Raymond Duval (1995) del termine “registro” evidenzia il ruolo dei diversi segni e distingue quindi i registri verbali da quelli simbolici o visuali etc.; tale nozione di registro differisce da quella di Michael A.K. Halliday (1985), per il quale un registro è definito come una varietà linguistica basata sull’uso e collega dunque il testo ai sistemi linguistici e sociali (Ferrari, 2004). In questo lavoro al termine “registro” daremo il significato considerato da Duval.



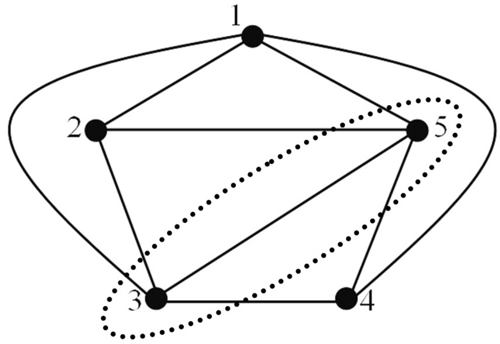
(2) naturalmente, per chiarezza e dunque per evitare malintesi ed errori, è opportuno che due insiemi disgiunti non siano rappresentati da parti comuni di piano (come sopra notato, questa caratteristica distinguerebbe i diagrammi "di Eulero" propriamente detti da quelli detti "di Venn"). Consideriamo il caso seguente:



Per rappresentare G = {3; 5} e J = {2; 4} potremmo ovviamente variare le posizioni dei punti indicanti gli elementi; ma se volessimo mantenere tali posizioni (anche a costo di ricorrere a forme lontane dalla tradizionale ellisse, ad esempio ad insiemi non convessi: del resto lo stesso Eulero nota che «è indifferente qualunque figura lor si dia»…), la rappresentazione preferibile sarebbe, nonostante il suo aspetto inusuale:



Torniamo all'esercizio sopra proposto. Si tratterebbe di realizzare un *grafo con cinque nodi completo* (ricordando le caratteristiche del problema) *e planare* (in modo da permettere il disegno dei diagrammi, sulla base della precedente osservazione 1); ma è ben noto che il grafo completo con cinque nodi K_5 (uno dei grafi di Kuratowski) *non* è un grafo planare. Con riferimento alla figura seguente, si realizzino gli insiemi che connettono due elementi collegati da una linea (ad esempio, l'insieme G = {3; 5} è quello indicato con il tratteggio).



A questo punto appare impossibile realizzare graficamente l'insieme J = {2; 4} senza rinunciare alla connessione delle rappresentazioni degli insiemi in gioco o senza determinare "sovrapposizioni" che didatticamente comporterebbero la possibilità di malintesi (come la presenza di una qualche intersezione non vuota tra gli insiemi G = {3; 5} e J = {2; 4}: si tenga presente l'osservazione 2, basata sulla differenza tra i diagrammi "di Eulero" e "di Venn").

In altri termini, la situazione descritta da A = {1, 5}, B = {1; 2}, C = {2; 3}, D = {3; 4}, E = {4; 5}, F = {2; 5}, G = {3; 5}, H = {1; 4}, I = {1; 3}, J = {2; 4} *non può essere espressa mediante un diagramma di Eulero-Venn*, se non a prezzo di scelte grafiche che possiamo ritenere inusuali. Naturalmente non è detto che i diagrammi di Eulero-Venn, in un'ampia accezione didattica, abbiano nella connessione una caratteristica assolutamente irrinunciabile e quindi "non possano" rappresentare certe situazioni; possiamo però rilevare che diventerebbe inevitabile, in certi casi, rinunciare alla connessione (ovvero accettare la presenza "grafica" di intersezioni non vuote, cioè rinunciare a realizzare un diagramma "di Eulero" propriamente detto). E uno studente, a fronte di un insieme rappresentato da due "pezzi staccati" l'uno dall'altro, potrebbe essere indotto a pensare a *due* insiemi distinti.

Quanto ora visto implica che i diagrammi di Eulero-Venn tradizionalmente intesi (dunque con la citata caratteristica di connessione) e in particolare i diagrammi "di Eulero" (con le intersezioni non vuote graficamente non presenti) hanno uno statuto epistemologico diverso da quello della tradizionale scrittura simbolica o dell'espressione verbale riferita alle relazioni di appartenenza? Forse questa conclusione può apparire forzata; ma certamente tali modi di esprimersi hanno caratteristiche diverse, diversa "profondità", diverso contenuto informativo. Ogni tipo di notazione e di rappresentazione può presentare dei vincoli; è molto importante, didatticamente, rendersi conto di questi vincoli e cercare, se possibile, di superarli.[2]

[2] Se in geometria si disegna un quadrato, quella figura può risultare molto utile nell'ambito di un procedimento, della risoluzione di un problema, ma introduce vincoli specifici: ad esempio, non potrò mai disegnare due quadrati nel rapporto 1/1000000, un caso che in teoria non posso certo escludere. In questa situazione si potrà tuttavia introdurre qualche accorgimento per superare la difficoltà.

4. Considerazioni conclusive

In un recente lavoro (Bagni, 2006-a) si affermava che, da un lato, le relazioni fondamentali della teoria degli insiemi sono di tipo predicativo, mentre i diagrammi di Eulero-Venn le illustrano mediante segni in una figura piana; il punto è che gli studenti sono in generale "affetti" dai segni, nel senso che questi offrono ad essi alcuni percorsi di sviluppo concettuale (Radford, 2002). Quanto abbiamo visto mostra che i diversi registri di rappresentazione semiotica, nella forma tradizionalmente utilizzata nelle aule scolastiche, *non sempre risultano del tutto "equivalenti"*. Se è dunque didatticamente importante (seguendo Duval, 1995) controllare e stimolare il coordinamento dei registri rappresentativi, è però anche necessario domandarsi se, in che misura e con quali accorgimenti tale coordinamento sia possibile (Bagni, in via di pubblicazione).

La realizzazione di una rappresentazione mediante i diagrammi di Eulero-Venn (pur con tutte le possibili "varianti" del procedimento originale introdotto da Eulero) è un processo non banale e tale rappresentazione, se considerata in tutte le sue potenzialità, non è "isomorfa" alla rappresentazione simbolico-proposizionale delle singole relazioni di appartenenza dei vari elementi ai vari insiemi. Potremmo dunque essere indotti a chiederci: *che cosa* dunque "rappresentano" queste rappresentazioni così diverse?

Le proposizioni, nota Richard Rorty, non possono più essere pensate (solo) come semplici espressioni dell'esperienza, né come rappresentazioni di una qualche realtà extra-esperienziale, di una realtà al di fuori di noi che dunque si "rispecchia" nella nostra mente; sono piuttosto sequenze di segni e di rumori usate dagli esseri umani nello sviluppo delle pratiche sociali (Rorty, 1994, p. 146) e le stesse rappresentazioni ad esempio degli "oggetti" della matematica potrebbero essere inquadrate secondo un punto di vista di questo tipo. Ogni modalità mediante la quale noi esprimiamo la matematica ha caratteristiche proprie, può sintetizzare tipi diversi di informazione (abbiamo sopra esaminato le singole relazioni di appartenenza, le inclusioni, le intersezioni etc.) e si collega ai diversi usi, a pratiche sociali (Bagni, 2006-b). Non appare insomma corretto pensare alle varie modalità di espressione della matematica come a dei linguaggi sostanzialmente isomorfi, a forme diverse (in quanto basate su convenzioni diverse) di un preteso, universale "linguaggio matematico" in grado di riflettere docilmente i vari "oggetti" della matematica platonisticamente esistenti.

L'autore ringrazia vivamente Claudio Bernardi dell'Università di Roma "La Sapienza" per i preziosi suggerimenti.

Riferimenti bibliografici

Bagni, G.T.: 2006-a, 'Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory'. *Educational Studies in Mathematics* 62, 3, 259-280.

Bagni, G.T.: 2006-b, *Linguaggio, storia e didattica della matematica*. Pitagora, Bologna.
Bagni, G.T.: in via di pubblicazione, *Simboli, parole, artefatti, figure. Rappresentare la matematica.*
Baron, M.E.: 1969, 'A note on the historical development of logic diagrams: Leibniz, Euler, and Venn'. *Mathematical Gazette* 53, 113-125.
Chilakamarri, K.B., Hamburger, P. & Pippert, R.E.: 1996, 'Venn diagrams and planar graphs'. *Geometriae Dedicata* 62, 73-91.
Duval, R.: 1995, *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Lang, Paris.
Edwards, A.W.F.: 2004, *Cogwheels of the mind: the story of Venn diagrams*, Johns Hopkins University Press, Baltimore and London.
Euler, L.: 1787, *Lettere ad una principessa d'Alemagna sopra diversi soggetti di fisica e di filosofia*, Ferres, Napoli (prima edizione italiana; seconda edizione dopo quella originale, *Lettres à une princesse d'Allemagne*, 1772).
Ferrari, P.L.: 2004, *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Pitagora, Bologna.
Grünbaum, B.: 1975, 'Venn diagrams and independent families of sets'. *Mathematics Magazine* 48, 12-23.
Halliday, M.A.K.: 1985, *An introduction to functional grammar.* Arnold, London.
Lakoff, G. & Núñez, R.: 2005, *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica*. Bollati Boringhieri, Torino (*Where mathematics come from? How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books, New York 2000).
Radford, L.: 2002, 'The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge'. *For the Learning of Mathematics* 22, 2, 14-23.
Rorty, R.: 1994, *La svolta linguistica*. Garzanti, Milano (*Twenty-Five Years After*. The University of Chicago, Chicago 1992).
Venn, J.: 1880, 'On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings'. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 9, 1-18.

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine (Italia)
bagni@dimi.uniud.it