L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate 30AB 6 (2007), 689–706

Strumenti per la geometria

GIORGIO T. BAGNI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DI UDINE

Abstract. In this paper we shall propose some reflections about geometry teaching-learning, and some artifacts and tools. In particular, we shall consider an historico-cultural perspective (according to Radford), by which we can point out the importance of relations between algebra and geometry in different historical periods, taking into account the fundamental social aspect. A well-known example introduced by Wittgenstein allows us to propose some final reflections about the links between geometry, and more generally mathematics, and reality.

Sommario. Nel presente lavoro proporremo alcune riflessioni sull'insegnamento-apprendimento della geometria e su alcuni artefatti e strumenti. In particolare, terremo presente una prospettiva storico-culturale (secondo Radford), mediante la quale possiamo evidenziare l'importanza dei rapporti tra l'algebra e la geometria nei diversi periodi storici, tenendo conto la fondamentale importanza dell'aspetto sociale. Un noto esempio introdotto da Wittgenstein ci consente di proporre alcune riflessioni finali sulle connessioni tra la geometria, e più in generale la matematica, e la realtà.

Strumenti per la geometria

GIORGIO T. BAGNI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DI UDINE

1. INTRODUZIONE CON RIGA E COMPASSO

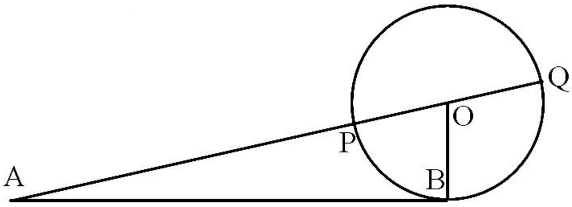
Ogni insegnante sa che è facile riconoscere, tra i quaderni dei nostri allievi, il "quaderno di matematica": innanzitutto è immancabilmente a quadretti (e già questo dettaglio può essere significativo); inoltre è caratterizzato dalla presenza di numeri, formule, disegni geometrici, grafici. Uno scritto di matematica è sempre inconfondibile: la matematica è una disciplina in cui le rappresentazioni sono particolari, specifiche. Per realizzare una rappresentazione è indispensabile impiegare degli strumenti; e una rappresentazione è essa stessa, per alcuni versi, uno strumento (Bagni, 2006-b).

Proporremo dunque alcune considerazioni su questi strumenti, sulle loro caratteristiche, sulla loro utilità e sulle difficoltà che il loro uso può causare ai nostri allievi. Il ricorso a strumenti e a tecnologie non è neutro (e ciò ci induce a sottolineare l'importanza della dimensione sociologica): non avrebbe senso pensare a delle rappresentazioni o a degli strumenti senza tenere presente i soggetti che li usano. Rifletteremo inoltre sul "contenuto" delle rappresentazioni: infatti una rappresentazione si riferisce sempre a "qualcosa". Rappresenta un "oggetto" geometrico (lasciando, per adesso, a questo fondamentale termine, "oggetto", un'ampia gamma di possibili significati). Dunque occupandoci delle molte rappresentazioni della geometria e dei molti strumenti cha la loro realizzazione e la loro gestione coinvolge non potremo eludere alcune impegnative domande sulla geometria e sulla matematica stessa.

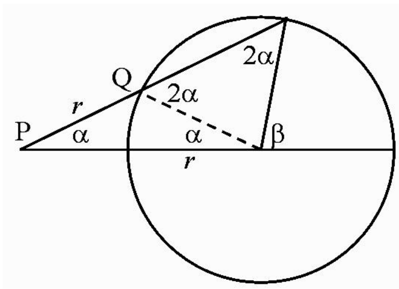
L'importanza degli strumenti va comunque ben oltre la realizzazione pratica di figure geometriche. Basti pensare alla ricchissima storia delle costruzioni *con riga e compasso*. Non ci occuperemo nel dettaglio della storia, peraltro affascinante, di queste celebri costruzioni; ma coglieremo l'occasione per riflettere sugli strumenti coinvolti e sul loro uso. Ricordiamo ad esempio che la *riga* qui coinvolta ha un (solo) bordo, è illimitata, non graduata: permette solo di tracciare la retta per due punti distinti; il *compasso* permette di tracciare una circonferenza noti il suo centro e un suo punto. Altri strumenti sono usati da chi si occupa di geometria, ma non sempre il loro uso porta l'esecutore ad uscire dall'ambito platonico (come accadrebbe nel caso di ricorso a certi strumenti meccanici, lontani dalla purezza del mondo delle idee): ad esempio, in aggiunta a riga e compasso, la squadra è utile perché abbrevia alcuni procedimenti; ma essa non permette nuove costruzioni (anzi, renderebbe superfluo il compasso). L'uso di alcuni software didattici ricalca i procedimenti eseguibili usando (solo) riga e compasso.

Costruiamo ad esempio la radice positiva dell'equazione: $x^2+ax-b^2 = 0$. Siano a, b due numeri positivi, che interpreteremo come misure di due segmenti (per la costruibilità di questi segmenti si veda: Agostini, 1979, pp. 490-502; si può chiedere che tali coefficienti siano razionali o irrazionali quadratici). Si noti che affinché una radice sia costruibile (come segmento) deve essere naturalmente positiva: nell'equazione data una radice è positiva per la regola di Cartesio: i coefficienti dell'equazione presentano una permanenza $(1; a)$ e una variazione $(a; -b^2)$.

La seguente costruzione della radice positiva è tratta dalla *Geometria* cartesiana (1637). Sia b la misura di AB e si conduca per B la perpendicolare ad AB; su di essa si fissi O tale che OB misuri $a/2$. Si tracci la circonferenza di centro O e raggio OB. Siano P, Q i punti in cui la AO incontra la circonferenza; x è la misura di AP; allora la misura di AQ è $x+a$, e $x(x+a) = b^2$ dunque è: $x^2+ax-b^2 = 0$.



Un secondo esempio, la “trisezione dell’angolo di Archimede”, sarà istruttivo a proposito del possibile uso di uno dei due strumenti considerati: la riga. Costruita la circonferenza, si consideri P in modo che PQ sia uguale al raggio.



Con riferimento alla figura, si dimostra con facilità che $3\alpha = \beta$. Abbiamo così realizzato “con riga e compasso” la trisezione dell’angolo, uno dei terribili problemi della matematica classica?

Naturalmente una simile conclusione non sarebbe accettabile: infatti nel procedimento descritto abbiamo usato impropriamente (rispetto alle prescrizioni sopra ricordate) la riga, in quanto abbiamo “fissato” un segmento (PQ) su di essa. La possibilità della costruzione archimedea non scalfisce dunque l’impossibilità di trisecare un angolo generico “con riga e compasso”.

In questa introduzione abbiamo intravisto alcuni punti importanti del nostro studio: abbiamo presentato alcuni strumenti fondamentali, sia nella pratica didattica che nella storia della geometria; inoltre, abbiamo messo in evidenza che tali strumenti possono essere usati "propriamente" oppure "impropriamente" rispetto a certe "regole" (dunque rispetto a una procedura socialmente accettata).

2. DALL'ARTEFATTO ALLO STRUMENTO

Fin dai tempi più antichi l'uomo avrà individuato una figura "interessante" (un cerchio) ad esempio nella sezione di un tronco d'albero. Dopo millenni di storia della cultura umana, i nostri allievi, nelle aule scolastiche, sono spesso chiamati a tracciare circonferenze: per fare ciò è possibile usare il compasso o, ad esempio, un meno nobile bicchiere. Possiamo domandarci: che differenza c'è tra l'uso del compasso e il ricorso al bicchiere?

Ogni insegnante avrà osservato che alcuni bambini preferiscono ricorrere a quest'ultimo artefatto, piuttosto che al compasso: il bicchiere (o una qualsiasi sagoma circolare) è più facile da utilizzare, non "buca il foglio", permette di usare la penna. Ci sono anche altre differenze rilevanti: con un bicchiere si può tracciare una sola circonferenza (della quale peraltro non si identifica facilmente il centro); il compasso è pertanto uno strumento più generale (Bagni, 2006-a e 2007). Ma la principale differenza tra i due modi di procedere (dunque tra i due strumenti), è così riassumibile: il compasso "incorpora" la definizione euclidea di circonferenza (Bartolini Bussi & Boni, 2003), mentre accarezzando il bordo di un bicchiere possiamo al massimo percepire una curvatura "regolare": il bicchiere, insomma, incorpora soltanto quella che si può definire, in un approccio elementare, una "caratteristica" (Chassapis, 1999).

L'ideale collegamento tra il compasso e la definizione di circonferenza non deve però spingerci verso conclusioni troppo affrettate: il compasso è uno strumento tecnico o, come si dice, un *artefatto primario* (Wartofsky, 1979); ma non basta averlo in mano per disegnare una circonferenza: si potrebbe usare un tale strumento, ad esempio, per scrivere, come se fosse una semplice matita, oppure in altri modi non rilevanti dal punto di vista matematico. Insomma, si potrebbe usare lo strumento “in modo sbagliato”, cioè in modo non significativo. Per utilizzare uno strumento correttamente è necessario conoscere certe norme, far proprie le “istruzioni per l’uso” (e, magari, darsi di esse una giustificazione): queste regole costituiscono un *artefatto secondario* (Wartofsky, 1979; un *artefatto terziario* è infine una teoria matematica che organizza gli artefatti secondari). La presenza di un artefatto secondario è indispensabile perché l’artefatto primario possa funzionare “bene”, dunque “esistere” come artefatto e, in particolare, come *strumento*: nell’approccio strumentale di Pierre Rabardel (1995), per poter considerare un artefatto alla stregua di un vero e proprio “strumento” è necessaria infatti un’attività costruttiva da parte del soggetto, attività che dipende da vari aspetti sia concettuali che sociali. E qui emerge il ruolo dell’insegnante che analizza il potenziale semiotico dell’artefatto e lo sfrutta nei processi di insegnamento-apprendimento.

Quindi accanto all’ideale “oggetto matematico”, al platonico “cerchio in sé”, forse addirittura al suo posto, potrebbe essere collocato il compasso, corredato dalle relative istruzioni per l’uso: e, naturalmente, un operatore che decida di compiere le azioni necessarie. In questo senso l’enfasi posta sullo strumento viene ad essere una scelta che sottolinea, in ultima analisi, la centralità del ruolo dell’operatore, della persona che costruisce i propri concetti sulla base dell’eredità viva di un sapere che non deriva da una magari fortunosa scoperta, bensì dalle riflessioni, dalle costruzioni, dalla consapevole e volontaria attività di altre persone (Bagni, 2006-a).

3. UNO “STRUMENTO” ESSENZIALE: LA STORIA

La didattica della geometria (e, in generale, della matematica) può basarsi su “strumenti” apparentemente assai meno tradizionali della riga e del compasso: la storia è stata applicata in ambito didattico dalla fine del XIX secolo: già nel 1896 è stato pubblicato un volume di Florian Cajori (1859-1930) dedicato a tali applicazioni. La stessa storia della matematica, dunque, può essere considerata uno "strumento" didattico (Fauvel & van Maanen, 2000).

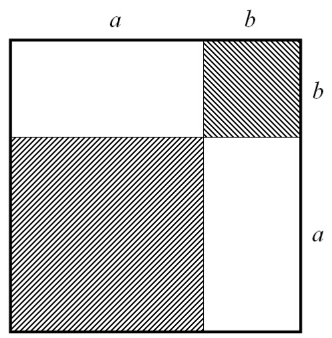
Naturalmente ci sono fondamentali questioni epistemologiche delle quali è necessario tener conto: può essere ad esempio corretto concepire la storia come un percorso che, attraverso tentativi e rivisitazioni critiche, porti la matematica alla sistemazione moderna? Quale ruolo va attribuito ai fattori culturali e sociali che hanno caratterizzato i diversi periodi? Le fasi che oggi consideriamo come momenti di passaggio verso la formazione della nostra matematica "compiuta" costituivano la matematica "compiuta" dell'epoca, in base a precise concezioni culturali (Radford, 1997); e chiaramente la lettura di un episodio storico non può né deve prescindere dal nostro attuale bagaglio culturale.

Abbiamo esaminato altrove tali questioni che riteniamo importanti anche dal punto di vista didattico (Bagni, 2005; D'Amore, Radford & Bagni, 2006; Bagni, 2006-a), sottolineando spesso l'importanza di un approccio ermeneutico. Ora proporremo un esempio storico che ci sarà utile per stimolare una riflessione sulla geometria, la sua storia, i suoi "strumenti".

È ben nota l'importanza attribuita dalla matematica ellenica alla costruzione geometrica: potremmo addirittura dire che la geometria stessa, se oggi (anche didatticamente) interpretata nel senso del II libro degli *Elementi* euclidei, diviene un potente "strumento" per dimostrare un'identità algebrica. Consideriamo ad esempio l'ideale analogia tra l'espressione simbolica della ben nota identità detta "quadrato del binomio", $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, e la corrispondente espressione (ovvero prova) euclidea nell'ambito dell'*algebra geometrica* (alla quale si riferisce la Proposizione IV del II libro degli *Elementi*), denominazione introdotta nel 1896 da Hieronymus Georg Zeuthen (1839-1920). L'enunciato euclideo (Frajese & Maccioni, 1970, p. 163) è:

> «Se si divide a caso un segmento, il quadrato di tutto il segmento è equivalente (equiesteso) alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo compreso dalle parti stesse»

e si riassume nella figura seguente:



L'importanza (anche didattica) e l'eleganza dell'analogia ora evidenziata non richiedono commenti.

Un balzo nel tempo di diciotto secoli ci porta a considerare l'opera di Rafael Bombelli (1526-1573): nel presentare due nuovi "oggetti matematici", *pdm* e *mdm* (corrispondenti ai nostri immaginari i e $-i$), Bombelli scrive a p. 169 della propria *Algebra* (1572):

> «Ho trovato un'altra sorte di R. c. legate molto differenti dall'altre, la qual nasce dal Capitolo di cubo eguale a tanti e numero […] la quale parerà a molti più tosto sofistica che reale, e tale opinione ho tenuto anch'io, sin che ho trovato la sua dimostrazione in linee».

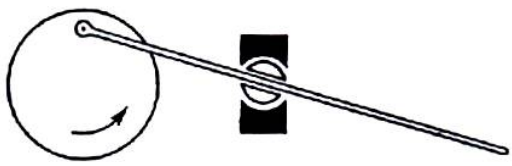
Dunque la "dimostrazione in linee" costituisce per Bombelli un essenziale elemento per l'accettazione della correttezza del risultato algebrico, e in questo senso è chiaro l'ideale collegamento con l'approccio greco. Tuttavia non si può dimenticare che in tutta l'*Algebra* la "costruzione in linee" viene sempre ad essere *successiva* rispetto al ricavo algebrico. Se per i Greci la geometria era lo strumento primario, già per Bombelli (e poi, in termini ancora più netti, per Cartesio) il ruolo dell'algebra è radicalmente rivalutato.

Nella storia della matematica, quindi, algebra e geometria sono state legate da un rapporto strumentale delicato e per molti versi reciproco, la cui valutazione deve tener conto dei diversi periodi storici (Radford, 1997). In generale, sembra comunque indebolirsi la distinzione tra un qualche "oggetto matematico" e lo "strumento" utilizzato per trattarlo, rappresentarlo, garantirne la validità.

Riprenderemo questo discorso. Ci occuperemo ora di strumenti forse meno tradizionali (lontani dalle platoniche riga e compasso), ma non meno importanti.

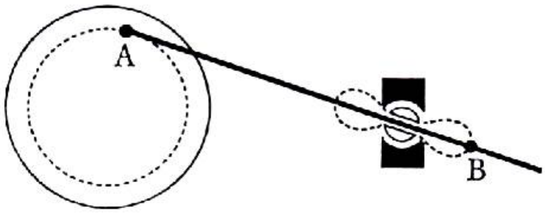
4. WITTGENSTEIN E IL MECCANISMO

In *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*, opera di cui è da poco trascorso il cinquantenario della pubblicazione postuma (1956), Ludwig Wittgenstein (1889-1951) descrive un dispositivo meccanico (*mechanism*) mediante il quale è possibile "suggerire" la dimostrazione di una proposizione (Wittgenstein, 1971, § III-49, p. 168 e § V-51, p. 256). Un primo accenno è nella III parte dell'opera (riferita alla figura: Wittgenstein, 1971, III, § 49, p. 168):

> «Supponiamo che io abbia davanti a me le fasi del movimento di
>
> 
>
> sotto forma di immagine. Questo mi aiuta a formulare una proposizione che io ricavo, per così dire, dalla lettura di quest'immagine. […] È strano che dalla lettura di un'*immagine* si debba poter ricavare una proposizione. Tuttavia la proposizione non tratta dell'immagine che io vedo. Non dice che in quest'immagine si può vedere questo e quest'altro. Ma non dice nemmeno che cosa farà il meccanismo reale, per quanto lo faccia capire».

L'Autore riprenderà l'argomento nel paragrafo conclusivo dell'opera (Wittgenstein, 1971, § V-51, p. 256); in tale occasione la sua posizione andrà ben oltre quella ricordata:

> «Considera un meccanismo:



> Mentre il punto A descrive un cerchio, B descrive una figura a forma di otto. Questa proposizione la scriviamo come una proposizione della cinematica. Mettendo in moto il meccanismo, il suo movimento mi prova la proposizione, proprio come farebbe una costruzione disegnata sulla carta. La proposizione corrisponde, poniamo, a un'immagine del meccanismo in cui siano disegnate le traiettorie descritte dai punti A e B. Dunque, per un certo aspetto, la proposizione è un'immagine di quel movimento. Tien fermo ciò di cui la *prova* mi convince».

L'enfasi non è più sulla possibilità che raffigurazione del meccanismo avrebbe di suggerire la proposizione, ma sul fatto che "la proposizione è un'immagine di quel movimento". Non c'è la necessità di un "suggerimento": è il movimento stesso che prova la proposizione. Prosegue Wittgenstein (1971, § V-51, p. 256): «se la prova registra il procedere secondo la regola allora, così facendo, produce un nuovo concetto». La conclusione è importante:

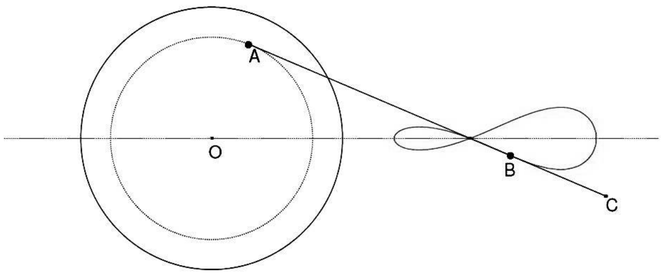
> «La prova deve mostrare il sussistere di una relazione interna […] perché la relazione interna è l'operazione che produce una struttura dall'altra […] – così che il passaggio conforme a questa successione di immagini è, *eo ipso*, un passaggio conforme a quelle regole di operazione»

(Wittgenstein, 1971, § V, 51, p. 256; nell'edizione originale bilingue dell'opera è: «so daβ nun der Übergang dieser Bilderreihe gemäß, eo ipso ein Übergang jenen Operationregeln gemäß ist» e «so that now the transition according to this series of configuration is *eo ipso* a transition according to those rules for operating»: *Bemer-*

kungen über die Grundlagen der Mathematik – Remarks on the Foundations of Mathematics. Blackwell, Oxford 1956, p. 196).

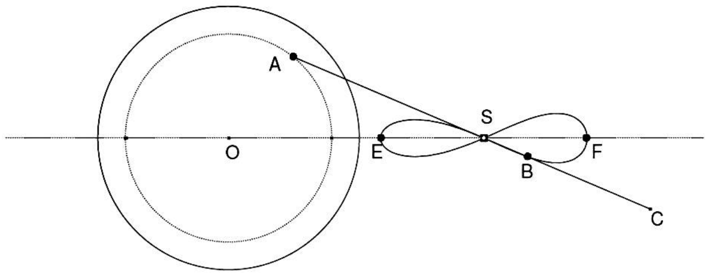
Tra il funzionamento fisico e la proposizione matematica si colloca dunque la mediazione della rappresentazione visuale e proprio questo collegamento può essere discusso. La figura riportata nel libro di Wittgenstein merita attenzione: essa infatti «è disegnata in modo sbagliato per due motivi», nota James Robert Brown (1999, pp. 131-132): innanzitutto la figura "a otto" descritta da B dovrebbe risultare simmetrica rispetto alla retta passante per il centro del cerchio e per il punto per il quale l'asta è vincolata a passare; inoltre, quando A si trova nella posizione indicata, B, invece di essere disegnato a destra, dovrebbe trovarsi al centro della figura "a otto".

Quest'ultima osservazione è però corretta solo se partiamo dal presupposto che la traiettoria di B sia simile alla figura "a otto" suggerita da Wittgenstein: ciò non è compatibile con la posizione di B. Dunque se B viene mantenuto nella posizione indicata nella figura la traiettoria non è quella tracciata, bensì questa:



In altri termini, la distanza AB deve essere ben determinata per ottenere una figura "a otto" (con scelte diverse il luogo descritto da B risulta diverso).

Si noti inoltre che il grafico proposto da Wittgenstein può lasciar pensare a una traiettoria di B simmetrica non solo rispetto alla retta passante per il centro del cerchio e per il punto per il quale l'asta è vincolata a passare (nella figura seguente, S), ma anche rispetto a S stesso. Invece questa simmetria centrale non c'è: dal punto di vista grafico, scegliendo le caratteristiche della figura (e quindi "del meccanismo") in modo che il segmento AS venga ad essere congruente a SF, si nota che i due "anelli" che costituiscono la figura "a otto" non sono congruenti:



Brown (1999, p. 132) si chiede ora: *perché il diagramma è efficace, nonostante questi errori?* E dopo una dissertazione sul ruolo delle "regole" nell'opera di Wittgenstein, conclude che la figura in esame è un disegno scadente in quanto riproduce erroneamente un meccanismo reale; ma è un buon "simbolo" in quanto ben rappresenterebbe la "caratterizzazione astratta", l'esistenza di una relazione interna: sarebbe efficace come supporto alla comprensione.

Brown (1999, p. 152) conclude che non è necessario che il disegno sia accurato, in quanto deve soltanto condurre al senso, platonisticamente inteso. Quest'ultima affermazione non è però giustificata, non essendo peraltro supportata dalle considerazioni espresse da Wittgenstein. Il confronto tra l'esempio nella parte III dell'opera del filosofo viennese e quello nella parte V è infatti significativo.

Innanzitutto è opportuna una precisazione: in generale è delicato datare in termini unitari gli scritti wittgensteiniani. La loro pubblicazione postuma è infatti avvenuta riunendo manoscritti diversi, spesso riconsiderati dallo stesso Autore (la parte III dell'opera in esame si basa sul ms. 122, 1939–1940, mentre la V utilizza il ms. 126, 1942–1943, e il ms. 127, 1943–1944, più una parte senza data). A parte questa complessa collocazione cronologica, diversa è la posizione che troviamo espressa nei due passi considerati: nella parte III si parla di un'immagine come di un "aiuto a formulare una proposizione", e tale immagine «non dice nemmeno che cosa farà il meccanismo reale, per quanto lo faccia capire» (Wittgenstein, 1971, III, § 49, p. 168). Fino a questo punto la posizione di Brown potrebbe anche essere accettata, pur senza affermarne la coincidenza con l'intenzione di Wittgenstein. Ma nell'ultima parte Wittgenstein passa dal suggerimento dato dall'immagine alla concreta esecuzione del movimento: «mettendo in moto il meccanismo, il suo movimento mi prova la proposizione, proprio come farebbe una costruzione disegnata sulla carta» (Wittgenstein, 1971, § V-51, p. 256). Se dunque l'importanza della "costruzione disegnata sulla carta" non viene accantonata, a questo punto si ricorre a qualcosa di nuovo, ad una "esecuzione" come elemento essenziale di prova.

La sintonia del funzionamento "fisico" e di quello "matematico", della descrizione del moto ad esempio mediante equazioni di un certo tipo, non può ridursi ad una semplice analogia (come non ricordare le osservazioni sulla "irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali"? Si veda: Wigner, 1960). In che misura la *necessità* della natura fisica, dunque il movimento che rileviamo, si rispecchia nella matematica mediante la quale il movimento può essere descritto? Il meccanismo qui illustrato e descritto da Wittgenstein *funziona*. E funziona indipendentemente dalla sua interpretazione in chiave matematica, ma parallelamente ad essa.

5. REALTÀ E CONVENZIONI

Una necessità puramente formale, sulla quale l'epistemologia si baserebbe, può essere sostenibile (riprendiamo qui posizioni discusse in: Bagni, 2006-a e 2007). Ma non sarebbe sufficiente a spiegare fino in fondo la nascita e l'affermarsi della matematica, di *questa* matematica, con la sua storicità. È il nostro pensiero che, attraverso il linguaggio, interagisce con la struttura della realtà, di una realtà nella quale l'essere umano è stato ed è immerso, della quale dunque fa parte integrante: l'umana razionalità emerge evolutivamente dalla realtà naturale. E ciò non è in contrasto con le critiche alla concezione di verità come corrispondenza, espresse ad esempio da Richard Rorty (1931-2007; indichiamo: Rorty 2004; Bagni, in stampa): la matematica può certamente essere collegata al mondo reale; ma la matematica non "è la verità": il fatto che la scrittura "3+4 = 7" sia classificata "vera" (posizione che non intendiamo contestare) non significa banalmente che essa corrisponde a qualcosa di vero, di bello o di giusto che si trova "là fuori".

Si osservi inoltre che è proprio la matematica che noi esseri umani abbiamo realizzato che, talvolta, ci ha messo in grado di "scoprire porzioni di realtà" inaccessibili ai sensi: ad esempio l'esistenza dell'antiprotone, provata sperimentalmente nel 1955, era stata prevista sulla base della teoria delle particelle elementari con l'applicazione di procedimenti matematici fondati su di una corretta modellizzazione della realtà (Bellone, 1990, pp. 393-405). La nostra matematica dunque *funziona*: ci mette in grado di procedere oltre l'esperito, in una sfera di sviluppi coerenti, collegati alla natura e alla sua descrizione (Galileo, 1980, p. 631; Einstein, 1956, p. 120): la matematica è davvero il linguaggio della natura. Ma questa non è una proprietà "metafisicamente" inerente alla natura sensibile: è l'uomo, la forma più sofisticata dell'organizzazione della natura, l'artefice della matematica.

Appare quindi innegabile la presenza di un preciso legame tra matematica e realtà, un legame che nel caso della geometria è particolarmente evidente. Non si deve però trascurare l'importanza di una componente che possiamo chiamare formale, "convenzionale", una componente che deve rifarsi allo sfondo sociale.

Lasciamo per un attimo la geometria e chiediamoci: perché, ad esempio, valgono, per le moltiplicazioni tra numeri relativi, le "regole dei segni"? È una domanda che molti allievi si pongono e pongono ai loro insegnanti. Non sarebbe corretto rispondere che si tratta di pure convenzioni: le "regole dei segni" per i prodotti di relativi valgono perché consentono di estendere ai relativi alcune proprietà delle operazioni aritmetiche. Eppure questa giustificazione non ha la forza di una constatazione empirica e le domande su certi modi di procedere continuano ad essere poste nelle nostre aule.

Alcune scelte sono dunque giustificate sulla base di particolari esigenze, di specifiche richieste "matematiche". La comunità scientifica, nella storia, ha optato per certe definizioni, ha codificato certi modi di procedere per motivi ben precisi: non si dimentichi che l'adozione di particolari convenzioni ha dato origine a discussioni e a controversie. Anche una convenzione pacificamente accettata, come la citata regoletta del "meno per meno fa più" ha avuto conseguenze non banali (si pensi all'idea di Lazare Carnot discussa nella *Géométrie de position* (1803) di considerare i positivi e i negativi in rapporto a segmenti orientati con versi opposti; un elemento problematico connesso a ciò venne individuato nel fatto che non era in grado di spiegare il motivo per il quale solo la radice quadrata di un positivo possa essere accettata nell'ambito dei reali).

Le esigenze della matematica, e le conseguenti convenzioni, non sempre e non soltanto si ispirano ad un'aderenza al dato reale, comunque quest'ultimo dato sia considerato, introdotto o descritto; ma vengono adottate per costruire un edificio concettuale con certe caratteristiche e non con altre (nel caso della geometria, le bimillenarie avventure del postulato delle parallele sono istruttive).

6. RIFLESSIONI CONCLUSIVE

Con il celebre *cogito ergo sum* Cartesio affermava: io penso, dunque esisto. Un'impostazione della massima importanza per tutta la filosofia moderna, che comunque può e deve essere discussa (Vattimo, 2002). Osservando che la matematica "funziona", potremmo essere indotti ad affermare che "esiste" e magari che il lavoro del matematico si riduce a quello dello scopritore (e questa posizione sembra sostenuta da certi aspetti della matematica: il ricercatore che giunge a "scoprire" un numero primo grandissimo non lo "costruisce"). Eppure tali conclusioni non ci sembrano giustificate: il fatto che la matematica funzioni significa che… funziona, nulla di più. Potremmo dire che è efficace, e neppure "irragionevolmente", proprio in quanto è stata concepita ("creata") in un certo modo, con la compresenza di due aspetti (Bagni, 2007): un collegamento con il mondo reale (sebbene, come notato, tale connessione non si riduca ad un semplice "rispecchiamento"); e la scelta di alcune posizioni convenzionali, socialmente elaborate ed accettate, con la conseguente costruzione di "oggetti matematici" astratti.

Ma parlare di "oggetti matematici" può addirittura essere fuorviante, perché induce a considerare i contenuti della matematica, e in particolare della geometria, alla stregua di "cose" (per quanto immateriali, astratte) svincolate dall'uso, dall'aspetto pragmatico. Heidegger (2005, p. 91) notava in *Essere e tempo*:

> «I Greci avevano un termine appropriato per designare le "cose": πράγματα, ciò con cui si ha a che fare nel [la] πρᾶξις. Ma lasciarono ontologicamente all'oscuro proprio il carattere "pragmatico" specifico dei πράγματα, determinandoli "innanzi tutto" come "semplici cose"»

e in una delle *Randbemerkungen*, le glosse che Heidegger stesso appose ai margini della propria copia personale di *Sein und Zeit* (pubblicate postume a partire dal 1977 e tradotte in italiano in: Heidegger, 2005), leggiamo a commento del passo sopra citato:

> «Perché? εἶδος – μορφή – ὕλη, dunque in base alla τέχνη, quindi una interpretazione "artistica"! Se la μορφή non è intesa come εἶδος, ἰδέα»

(Heidegger, 2005, p. 91). Concordiamo con il grande filosofo di Meßkirch: gli "oggetti" non possono essere considerati solo sulla scia di un'interpretazione "artistica". E ciò vale anche per gli "oggetti" della matematica e della geometria in particolare, che nascono (vengono inventati) attraverso l'attività di uomini e di donne, di una comunità impegnata a risolvere problemi reali, spesso concreti.

Grazie a Paolo Boero, Willibald Dörfler,
Angela Pesci e Luigi Tomasi

Bibliografia

Agostini, A.: 1979, 'I problemi geometrici elementari e i problemi classici'. In: Berzolari, L.; Vivanti, G. & Gigli, D. (a cura di), *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi*, v. II, p. 1[a]. Hoepli, Milano, 487-537 (prima edizione: 1936).

Bagni, G.T.: 2005, 'The historical roots of the limit notion. Cognitive development and development of representation registers'. *Canadian Journal of science, mathematics and technology education* 5-4, 453-468.

Bagni, G.T.: 2006-a, *Linguaggio, storia e didattica della matematica*. Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T.: 2006-b, 'Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory'. *Educational Studies in Mathematics* 62, 3, 259-280.

Bagni, G.T.: 2007, *Rappresentare la matematica. Simboli, parole, artefatti, figure*. Aracne, Roma.

Bagni, G.T.: in stampa, 'Richard Rorty (1931-2007) and his legacy for mathematics educators'. *Educational Studies in Mathematics.*

Bartolini Bussi, M.G. & Boni, F.: 2003, 'Instruments for semiotic mediation in primary school classrooms'. *For the Learning of Mathematics*, 23(2), 12-19.

Bellone, E.: 1990, *Caos e armonia. Storia della fisica moderna e contemporanea*. UTET, Torino.

Brown, J.R.: 1999, *Philosophy of mathematics. An introduction to a world of proofs and pictures*. Routledge, London.

Chassapis, D.: 1999, 'The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: the compass and the circle as an example'. *Educational Studies in Mathematics* 3, 275-293.

D'Amore, B., Radford, L. & Bagni, G.T.: 2006, 'Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali'. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 29B, 1, 11-40.

Einstein, A.: 1956, *Lettres à Maurice Solovine*. Aubier, Paris.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (a cura di): 2000, *History in mathematics education. The ICMI Study*. Kluwer, Dordrecht.

Frajese, A. & Maccioni, L. (a cura di): 1970, *Elementi di Euclide*. UTET, Torino.

Galilei, G.: 1980, 'Il Saggiatore'. In: *Opere*. Brunetti, F. (a cura di). UTET, Torino.

Heidegger, M.: 2005, *Essere e tempo*, nuova edizione a cura di F. Volpi sulla traduzione di P. Chiodi. Longanesi, Milano (*Sein und Zeit*. Niemeyer, Halle an der Saale 1927).
Rabardel, P.: 1995, *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Colin, Paris.
Radford, L.: 1997, 'On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics'. *For the Learning of Mathematics* 17, 1, 26-33.
Rorty, R.: 2004, *La filosofia e lo specchio della natura*. Nota introduttiva di D. Marconi & G. Vattimo. Bompiani, Milano (*Philosophy and the mirror of nature*. Princeton University Press, Princeton 1979).
Vattimo, G.: 2002, *Oltre l'interpretazione*. Laterza, Roma-Bari.
Wartofsky, M.: 1979, 'Perception, representation and the forms of action: towards an historical epistemology'. In: *Models. Representation and the scientific understanding*. Reidel, Dordrecht, 188-209.
Wigner, E.: 1960, 'The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences'. *Communications in Pure and Applied Mathematics* 13, 1-14.
Wittgenstein, L.: 1971, *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*. Einaudi, Torino (*Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Blackwell, Oxford 1956).

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine
giorgio.bagni@dimi.uniud.it