La matematica e la sua didattica 3, 285-296 (2005)

Equazioni e disequazioni
Riferimenti storici e proprietà interazionali

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine

Sunto. Nel presente lavoro si esaminano alcuni aspetti dello sviluppo storico delle equazioni e delle disequazioni. Dal punto di vista didattico alcune differenze possono essere evidenziate e analizzate con riferimento al quadro teorico dell'*embodied cognition*. Si conclude che una forzata analogia tra equazioni e disequazioni, in senso procedurale, può essere causa di fenomeni pericolosi.

Summary. In this paper we examine some aspects of the historical development of equations and inequalities. From the educational viewpoint some differences can be pointed out and analyzed with regard to the theoretical framework of the *embodied cognition*. We conclude that a forced analogy between equations and inequalities, in procedural sense, can cause dangerous phenomena.

1. Introduzione

La presentazione didattica delle equazioni e delle disequazioni avviene spesso in forma sequenziale. Con riferimento a questa importante fase del programma di matematica della scuola secondaria, tuttavia, molti insegnanti hanno potuto rilevare due fenomeni apparentemente contrastanti: da un lato, il parallelismo delle procedure risolutive appare evidente (e potenzialmente utile); dall'altro, proprio le tecniche per la risoluzione delle equazioni causano spesso, se applicate acriticamente alle disequazioni, alcuni errori (non pochi lavori sono stati dedicati alla questione ora segnalata; citiamo ad esempio: Linchevski, Sfard, 1991, 1992; Fischbein, Barash, 1993; Tsamir, Tirosh, Almog, 1998; Bazzini, Tsamir, 2001, 2002). In questo articolo analizzeremo tali fenomeni esaminandone le radici storiche e li inquadreremo con riferimento ad alcune recenti posizioni della scienza cognitiva.

Il presente lavoro riprende i temi che sono stati trattati dell'autore nelle comunicazioni ai convegni SFIDA-22 (Genova, 2004) e CERME-4 (Sant Feliu de Guíxols, 2005).

Premettiamo un’osservazione terminologica: l’uguaglianza “2+7 = 9”, spesso denominata *identità*, esprime una proposizione (vera); invece l’uguaglianza “x+2 = 5”, un’equazione, non esprime una proposizione, bensì “una condizione riguardante i valori che possono essere assegnati alla variabile x” (Bell, Machover, 1977, p. 12; la traduzione è nostra). Essa assumerà un valore di verità, vero o falso, a seconda del numero di volta in volta assegnato a x. Un’analoga distinzione può essere introdotta tra la disuguaglianza “1+7 < 9” (vera) e la disequazione “x+2 < 5” (vera se e solo se x < 3). Si noti che in inglese il solo termine *inequality* è usato per indicare sia le disuguaglianze che le disequazioni, mentre in altre lingue, come in italiano, la distinzione viene mantenuta mediante l’uso di termini specifici (in francese, ad esempio, le parole in questione sono *inégalité* e *inéquation*).
Nel presente lavoro la citata differenza tra *disuguaglianza* e *disequazione* dovrà essere considerata con attenzione.

2. Il quadro teorico

2.1. Storia e didattica

Molti studi, anche recenti, hanno sottolineato l’importanza che l’approccio storico può avere nell’insegnamento e nell’apprendimento della matematica, in ogni livello scolastico (i riferimenti bibliografici da citare sarebbero davvero moltissimi; ci limitiamo a ricordare le osservazioni contenute in: Heiede, 1996, nonché la ricca raccolta di saggi: Fauvel, van Maanen, 2000). Il collegamento dei processi psicologici di apprendimento con le questioni storiche è assicurato dall’epistemologia (Moreno, Waldegg, 1993; Bagni, 2004 e in stampa; Bagni, D’Amore, 2005): dunque i vari usi della storia nella didattica della matematica non riflettono solamente scelte didattiche diverse, ma implicano importanti assunzioni epistemologiche (Radford, 1997 e 2003).
Talvolta viene implicitamente o esplicitamente affermato un parallelismo tra lo sviluppo storico e la crescita cognitiva (una posizione che si basa sulle ben note considerazioni espresse da E. Haeckel nel 1874, per giungere alla celebre tesi espressa in: Piaget, Garcia, 1989; si veda: Furinghetti, Radford, 2002). Ma secondo l’approccio socio-culturale di L. Radford, al quale ci rifacciamo, la conoscenza è in primo luogo legata alle attività degli individui e ciò si collega strettamente alle istituzioni culturali dei periodi di volta in volta considerati; la conoscenza non può dunque essere costruita individualmente, ma in un contesto sociale (Radford, Boero, Vasco, 2000, p. 164). Da ciò segue che il ruolo della storia debba essere interpretato con primario riferimento alle diverse situazioni socio-culturali (Radford, 1997 e 2003; Grugnetti, Rogers, 2002).

2.2. Esperienza e proprietà interazionali

Una valutazione dei comportamenti e delle reazioni dei nostri allievi di fronte alle equazioni ed alle disequazioni comporta e richiede una riflessione ampia. In generale, è corretto, produttivo considerare direttamente e isolatamente il linguaggio della matematica, ad esempio il suo linguaggio simbolico? Secondo una tesi di Willard Van Orman Quine (1908-2000) "è impossibile districare ciò che dipende puramente dal linguaggio e ciò che dipende dalla nostra pratica del mondo" (Origgi, 2000, p. 6; si veda: Quine, 1975): tale osservazione ci porta dunque a riflettere sul ruolo dell'esperienza.

La definizione di un oggetto, in matematica e non solo, è basata su di un insieme di proprietà intrinseche che caratterizzano l'oggetto in questione. Ad esempio, un segmento è costituito dall'insieme dei punti di una retta compresi tra due punti di tale retta, detti estremi. Non intendiamo contestare tale modo di procedere: sarebbe infatti arduo concepire una matematica priva di definizioni di questo tipo. Tuttavia alcune recenti posizioni della scienza cognitiva (riassunte in: Lakoff, Núñez, 2000) hanno sottolineato la primaria importanza dell'esperienza che un soggetto ha di un oggetto (anche matematico). Con ciò non si fa riferimento esclusivamente ad una diretta esperienza fisica, collegata al "puro e semplice fatto di avere un corpo di un certo tipo"; ma è importante sottolineare che "*ogni* esperienza ha luogo all'interno di un vasto retroterra di presupposizioni culturali" (Lakoff, Johnson, 1998, p. 78): dunque un elemento cruciale è "il modo in cui comprendiamo le nostre esperienze" (Lakoff, Johnson, 1998, p. 152).

Una teoria della definizione basata sull'esperienza può fare riferimento agli studi sulla categorizzazione umana di E. Rosch (1977) che considera le nozioni di "prototipo" e di "somiglianze di famiglia" (un concetto che si collega al Wittgenstein delle *Ricerche filosofiche*: Wittgenstein, 1999; Marconi, 2000; Penco, 2004, pp. 112-114). Da questo punto di vista è possibile intendere la definizione non soltanto alla stregua di un insieme fisso di condizioni necessarie e sufficienti, ma in termini di "somiglianza" ad un "prototipo" nel quale viene identificata la considerata categoria di oggetti. Le proprietà chiave, in tale prospettiva, sono le proprietà interazionali, come le proprietà percettive, di attività motoria, funzionali etc.: tali proprietà, pertanto, fanno riferimento più che all'oggetto in questione, al modo con cui interagiamo con tale oggetto. Concludono R. Lakoff e M. Johnson:

> "I nostri concetti degli oggetti, come i nostri concetti di eventi e attività, sono caratterizzati da gestalt multidimensionali le cui dimensioni emergono naturalmente dalla nostra esperienza nel mondo" (Lakoff, Johnson, 1998, p. 155).

Riprendendo l'esempio precedente, è dunque interessante (e istruttivo) considerare le esperienze che si collegano all'atto di tracciare un segmento, ovvero di percorrere (fisicamente o con lo sguardo) un tratto rettilineo etc.; tali esperienze ci suggeriscono il riferimento ad alcune metafore basate sui "segmenti fisici":

> "Quando ci muoviamo in linea retta da un punto ad un altro, il percorso forma un segmento fisico […]. C'è una semplice relazione tra un tale moto e un segmento fisico: l'origine del moto corrisponde ad un estremo del segmento, il termine all'altro estremo" (Lakoff, Núñez, 2000, pp. 71-72).

Dunque nel quadro teorico dell'*embodied cognition* la descrizione fisica di un segmento (o, analogamente di una semiretta) "inizia" da un estremo e "termina" all'altro estremo (ovvero prosegue indefinitamente). Non sarà inutile osservare che l'esperienza che sta alla base della considerazione di un segmento fisico non si collega esclusivamente a situazioni geometriche: ai segmenti fisici si riferiscono importanti metafore che trovano applicazione anche in àmbiti diversi (in campo aritmetico, ad esempio, un numero può essere fatto corrispondere ad una "distanza misurabile collocando segmenti fisici di lunghezza unitaria uno dopo l'altro e quindi contandoli": Lakoff, Núñez, 2000, p. 68).

3. Storia dell'algebra: le equazioni e le disequazioni

Nella storia della matematica, i procedimenti algebrici non sono stati espressi mediante simboli per molto tempo. Secondo l'approccio teorico che abbiamo precedentemente descritto, l'evoluzione della notazione algebrica non deve essere ridotta soltanto alla progressiva eliminazione della "dannosa sostanza fisica" (nelle parole di Radford, 1997, p. 28, con riferimento alla scansione dello sviluppo dell'algebra proposta in: Nesselmann, 1842; si veda inoltre: Serfati, 1997), ma può essere fatta corrispondere ad una progressiva variazione influenzata dai contesti sociali e culturali.
Eppure la simbologia mediante la quale esprimiamo oggi le equazioni (e le disequazioni) non è antichissima: sebbene la relazione di identità, espressa mediante il simbolo "=", appaia irrinunciabile in una teoria logica (*No entity without identity*, proclamava con decisione Quine: Origgi, 2000, p. 57; si veda: Quine, 1966, pp. 65-79), "è difficile da credere, ma per due millenni, fino al XVI secolo, i matematici non hanno usato un simbolo per l'uguaglianza" (Lakoff, Núñez, 2000, p. 376). È però necessario notare che il ruolo di "=", uno dei segni più familiari e comuni, un simbolo che appare "innocuo" e di immediata comprensione, non può essere considerato in termini di eccessiva semplicità:

> "Anche un'idea così apparentemente semplice come l'uguaglianza coinvolge una grande complessità cognitiva. […] La comprensione del significato di '=' ha

> richiesto l’analisi cognitiva delle idee matematiche coinvolte” (Lakoff, Núñez, 2000, p. 377; si veda inoltre: Arzarello, 2000).

Tratteggiamo ora brevemente alcuni riferimenti storici riguardanti le equazioni e le disequazioni.
Iniziamo con l’osservare che la storia delle equazioni è assai ricca: in molte epoche, in molte culture, in diverse parti del mondo, troviamo procedimenti e applicazioni che possono essere direttamente messi in relazione con equazioni. Nel Rinascimento, la “Regola d’algebra” (che riprendiamo da: Franci, Toti Rigatelli, 1979, p. 7) era il procedimento per la risoluzione di problemi aritmetici che si concludeva con l’impostazione e la risoluzione di un’equazione algebrica.
La storia delle disequazioni, invece, appare di dimensioni decisamente più modeste. Anticamente alcune disuguaglianze erano espresse, come accadeva per le equazioni, nel registro verbale: indichiamo ad esempio le disuguaglianze riguardanti gli elementi di un triangolo incluse negli *Elementi* euclidei (come la proposizione XXI del libro I). Ma è opportuno sottolineare, riprendendo la distinzione ricordata nel paragrafo introduttivo del presente lavoro, che procedimenti come quelli ora citati si riferiscono a *disuguaglianze* e non propriamente a disequazioni.
Alcune disequazioni (in senso proprio) possono essere collegate allo sviluppo storico delle tecniche dell’analisi matematica, ad esempio a minorazioni e maggiorazioni (si veda ad esempio: Hairer, Wanner, 1996). A tale riguardo, celebre è l’affermazione di Jean Dieudonné nella Prefazione di *Calcul infinitesimal* (Hermann, Paris 1980):

> “En d’autres termes, le Calcul infinitésimal, tel qu’il se présente dans ce livre est l’apprentissage de maniement des inégalités bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots: majorer, minorer, approcher”.

Restando in un àmbito più specificamente algebrico, esamineremo alcuni testi pubblicati nel XIX secolo da Paolo Ruffini (1765-1822), inclusi nei tomi III e V del *Corso di Matematiche*, un vasto manuale pubblicato a Modena tra il 1806 e il 1808. Segnaliamo qualche esempio tratto da tali lavori:

- nel III tomo (*Algebra*), p. 24, viene affermata esplicitamente una proprietà di equivalenza per le equazioni, dicendo:

  > “A–B–C = –D+E, trasporto i termini del primo membro nel secondo, e quei del secondo nel primo, si otterrà D–E = –A+B+C”,

  ma nell’opera non sono trattati casi analoghi per le disequazioni;

- nel III tomo, p. 146, sono impostate e risolte alcune disequazioni (anche abbinate in forma di sistema) per esprimere delle condizioni che devono essere rispettate dalle soluzioni di un problema da risolvere mediante un sistema di equazioni lineari. Spesso gli esempi proposti prevedono e

> propongono delle condizioni di questo genere: dunque le disequazioni (propriamente dette, non le semplici disuguaglianze) vengono spesso "abbinate" alle equazioni per esprimere condizioni sulle radici (anche nel V tomo, *Appendice all'Algebra*).

Un esempio interessante può essere inoltre riferito alla ricerca matematica del XX secolo. Scrive P. Odifreddi:

> "Un contributo di von Neumann fu la soluzione nel 1937 di un problema risalente a L. Walras nel 1874: l'esistenza di situazioni di equilibrio nei modelli matematici dello sviluppo del mercato, basati sulla domanda e sull'offerta (attraverso prezzi e costi). Egli vide anzitutto che un modello andava espresso mediante disequazioni (come si fa oggi) e non equazioni (come si era fatto fino ad allora)" (dal sito: www.matematicamente.it/articoli).

In generale, dunque, è possibile rilevare una significativa asimmetria storica: i matematici, da un certo periodo in poi, hanno espresso mediante equazioni il problema da risolvere (citiamo ancora: Franci, Toti Rigatelli, 1979); come abbiamo visto esaminando il manuale di Ruffini, le disequazioni (propriamente dette, dunque non le semplici disuguaglianze), avevano un ruolo per certi versi secondario: erano utilizzate per esprimere le condizioni che dovevano essere verificate dalle soluzioni di tali equazioni. Inoltre la citazione riguardante von Neumann ci ricorda che nella storia (e, come vedremo, nella pratica didattica), la risoluzione di una disequazione era spesso operativamente ricondotta alla risoluzione dell'equazione ad essa associata.
È inoltre necessario considerare la notevole influenza del contesto sociale e culturale: il finale ottenimento di una "soluzione concreta", infatti, è stato frequentemente considerato molto più importante della ricerca di un astratto "campo di possibilità". Una significativa importanza sociale è stata spesso e chiaramente attribuita al ricavo della soluzione, come è chiaramente testimoniato dall'elaborazione e dell'uso di metodi pratici ed approssimati (ci riferiamo, in generale, a Radford, 1996 e 1997; per la storia dei procedimenti analitici si veda: Hairer, Wanner, 1996).

4. Dalla storia alla descrizione fisica di segmenti e semirette

Torniamo ora a considerare l'aspetto didattico: certamente il ruolo autonomo delle disequazioni viene oggi riconosciuto nelle nostre aule scolastiche; tuttavia una qualche "subordinazione operativa", ad esempio mirante a ricondurre l'approccio pratico alle disequazioni a quello riservato alle equazioni (considerato precedentemente, nell'ordinamento sequenziale dei programmi), può essere ancora rilevata.

Per proporre un'interpretazione di tale situazione dobbiamo tenere conto di alcuni elementi che si collegano sia al quadro teorico che ai riferimenti storici sopra ricordati:

- Innanzitutto la consolidata tradizione storica non può non aver influenzato le impostazioni didattiche: le disequazioni sono state a lungo (e sono talvolta tuttora) considerate alla stregua di procedimenti importanti ma praticamente secondari, il cui ruolo viene ad essere per molti versi strumentale nei confronti del ruolo primario riconosciuto, esplicitamente o implicitamente, alle equazioni.

- Inoltre, un qualche forzato "parallelismo" tra una disequazione e l'equazione ad essa associata può essere ricondotto ai registri semiotici impiegati nella loro rappresentazione. I registri simbolici non possono non indurre considerazioni di analogia tra le espressioni seguenti:

  $$f(x) = g(x)$$

  $$f(x) < g(x)$$

  Esse hanno evidentemente la stessa struttura e differiscono per un solo segno (peraltro, graficamente, "=" e "<" sono molto simili): in questo caso le "somiglianze di famiglia" (Wittgenstein, 1999, n. 66) possono dunque indurre a considerare l'equazione e la disequazione in termini di stretta analogia. Il fatto di avere già introdotto e consolidato un efficace procedimento risolutivo per affrontare $f(x) = g(x)$ non può non spingere insegnanti e studenti a ricondurre a tale tecnica il nuovo procedimento necessario per risolvere $f(x) < g(x)$.

- Infine (e a nostro avviso l'aspetto che andiamo a evidenziare è del tutto essenziale) si osservi che nella pratica didattica una disequazione porta ad individuare un sottoinsieme della retta reale, spesso un sottoinsieme infinito (non numerabile) come un segmento o una semiretta. Se teniamo conto delle riflessioni presentate nella sezione 2.1 a proposito delle proprietà interazionali (Lakoff, Johnson, 1998), siamo portati a chiederci: quale esperienza ha uno studente di un segmento o di una semiretta? Non è difficile rilevare che la stessa descrizione fisica di un segmento o di una semiretta (seguendo: Lakoff, Núñez, 2000) porta a ritenere che le caratteristiche principali di tali sottoinsiemi siano collegate ai "punti di frontiera" (ad esempio, agli estremi del segmento considerato): di conseguenza il punto cruciale della risoluzione di una disequazione può identificarsi naturalmente proprio con il ricavo di tali punti chiave, dunque con la risoluzione dell'equazione associata alla disequazione data.

5. Conclusioni

> "Ogni giorno impariamo un linguaggio comune, certe parole ci vengono insegnate mostrandoci oggetti etc., e in connessione con essi escogitiamo una certa immagine. Poi, gradatamente, modifichiamo l'uso delle parole e, quanto più lo modifichiamo, tanto meno appropriata diventa quell'immagine, fino a diventare assolutamente ridicola. (…) Abbiamo bisogno di qualcosa di più dell'immagine giusta, abbiamo bisogno di sapere come la si usa."
>
> Ludwig Wittgenstein (1982, p. 19)

Emanuele Severino ha recentemente scritto (in *La vera filosofia non è un parassita*, "la Repubblica", 19 aprile 2005, p. 46):

> "La scienza non è un angelo caduto dal cielo; presuppone la manifestazione del mondo, l'«esperienza». Vi si fonda, senza chiedersi che cosa sia. Per i suoi scopi, fa bene a non chiederselo. Ma, in questo modo, quando definisce se stessa, lo fa quando il suo viaggio è già da molto incominciato. Come un albero che, dai rami, arrivi a vedere fino a metà del proprio tronco, ma non il terreno in cui affondano le sue radici. La filosofia autentica (…) bada al terreno. Non per dire all'albero della scienza come debba crescere (questa è cattiva filosofia), ma per capire qual è il senso di questa crescita e porlo in relazione a tutti i processi che su quel terreno vanno sorgendo."

Questa riflessione vale anche per la scienza cognitiva: la "manifestazione del mondo, l'«esperienza»" è senza dubbio il suo punto di partenza. E la possibilità di interpretare correttamente tale punto di partenza si collega naturalmente alla riflessione filosofica.

Quanto precedentemente osservato, ad esempio le considerazioni sulla descrizione fisica di segmenti e di semirette, conferma che spesso la prima fase (e in molti casi la fase principale) della risoluzione di una disequazione si riduce alla risoluzione dell'equazione ad essa associata: sul piano didattico ciò porta alla concretizzazione di un'analogia operativa che si sovrappone all'evidente asimmetria storica e che può rivelarsi, se non adeguatamente controllata, certamente rischiosa.

Come evitare i pericolosi fenomeni di estensione impropria di procedimenti risolutivi dalle equazioni alle disequazioni? L. Bazzini e P. Tsamir (2002) suggeriscono "un approccio funzionale: non equazioni e disequazioni in sequenza, ma una trattazione integrata basata sul concetto di funzione". Quanto detto a proposito dei registri simbolici conferma ad esempio che il ricorso a registri rappresentativi non simbolici (pensiamo ad esempio al registro visuale, implicato nella proposta funzionale di Bazzini e Tsamir) potrebbe rivelarsi

efficace; tali registri devono comunque risultare coordinati con quello simbolico, che rimane centrale nella pratica didattica (Duval, 1995; si ripropone inoltre la necessità di un'attenta negoziazione del significato delle espressioni simboliche: Malara, Iaderosa, 2000).
Ulteriori ricerche potranno essere dedicate all'approfondimento delle segnalate questioni e in particolare all'elaborazione di proposte che possano consentire un coordinamento corretto e didatticamente efficace tra due importanti capitoli dei programmi di matematica della scuola secondaria.

Riferimenti bibliografici

Arzarello, F.: 2000, Inside and outside: space, time and language in proof production, *PME-24*, 1, 23-38.

Bagni, G.T.: 2004, Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche, *La matematica e la sua didattica*, 3, 51-70.

Bagni, G.T.: in stampa, Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*.

Bagni, G.T., D'Amore, B.: 2005, Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale, *La matematica e la sua didattica*, 1, 73-89.

Bazzini, L., Tsamir, P.: 2001, Research-based instruction: widening students' perspective when dealing with inequalities, *ICMI-Study 12*, 1, 61-68.

Bazzini, L., Tsamir, P.: 2002, Algorithmic models: Italian and Israeli students' solutions to algebraic inequalities, *PME-26*, 4, 289-296.

Bell, J., Machover, M.: 1977, *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford.

Duval, R.: 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Paris.

Fauvel, J., van Maanen, J. (Eds.): 2000, *History in Mathematics Education*, Kluwer, Dordrecht.

Fischbein, E., Barash, A.: 1993, Algorithmic models and their misuse in solving algebraic problems, *PME-17*, 1, 162-172.

Franci, R., Toti Rigatelli, L.: 1979, *Teoria e storia delle equazioni algebriche*, Mursia, Milano.

Furinghetti, F., Radford, L.: 2002, Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice, English, L. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Erlbaum, Hillsdale, 631-654.

Grugnetti, L., Rogers, L.: 2000, Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues, Fauvel, J., van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education*, Kluwer, Dodrecht, 39-62.

Hairer, E., Wanner, G.: 1996, *Analysis by Its History*, Springer-Verlag, New York.
Heiede, T.: 1996, History of Mathematics and the Teacher, Calinger, R. (Ed.), *Vita Mathematica*, The Mathematical Association of America, 231-243.
Lakoff, G., Johnson, M.: 1998, *Metafora e vita quotidiana*, Bompiani, Milano (*Metaphors we live by*, University of Chicago Press, Chicago 1980).
Lakoff, G., Nuñez, R.: 2000, *Where Mathematics come from? How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.
Linchevski, L., Sfard, A.: 1991, Rules without reasons as processes without objects, the case of equations and inequalities, *PME-15*, 2, 317-324.
Linchevski, L., Sfard, A.: 1992, Equations and inequalities. Processes without objects?, *PME-16*, 3, 136.
Malara N.A, Iaderosa R.: 2000, The Interweaving of Arithmetic and Algebra: Some Questions About Syntactic, Relational and Structural Aspects and their Teaching and Learning, Swanke E. (Ed.), *European Research in Mathematics Education*, 2, 159-171.
Marconi, D. (Ed.): 2000, *Wittgenstein*, Laterza, Roma-Bari.
Moreno, L., Waldegg, G.: 1993, Constructivism and mathematical education, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 24, 5, 653-661.
Nesselmann, G.H.F.: 1842, *Versuch einer kritischen Geschichte den Algebra, Nach den Quellen bearbeitet*, Reimer, Berlin.
Origgi, G.: 2000, *Introduzione a Quine*. Laterza, Roma-Bari.
Penco, C.: 2004, *Introduzione alla filosofia del linguaggio*. Laterza, Roma-Bari.
Piaget, J., Garcia, R.: 1989, *Psychogenesis and the History of Science*, Columbia University Press, New York.
Quine, W.V.O.: 1966, *Il problema del significato*, Ubaldini, Roma (*From a logical point of view*, Harvard University Press, Cambridge MA 1953).
Quine, W.V.O.: 1975, *I modi del paradosso*, Il Saggiatore, Milano (*The ways of paradox and other essays*, Random House, New York 1966).
Radford, L.: 1996, An Historical Incursion into the Hidden Side of the Early Development of Equations, Giménez, J., Campos Lins, R., Gómez, B. (Eds.), *Arithmetic and Algebra Education*, Univ. Rovira I Virgili, Tarragona, 120-131.
Radford, L.: 1997, On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.
Radford, L.: 2003, On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought, Anderson, M. et Al. (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, Legas, Ottawa, 49-79.

Radford, L., Boero, P., Vasco, C.: 2000, Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics, Fauvel, J., van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education*, Kluwer, Dordrecht, 162-67.

Rosch, E.: 1977, Human Categorization, Warren, N. (Ed.), *Advances in Cross-Cultural Psychology*, 1, Academic Press, New York.

Serfati, M.: 1997, *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 1.

Tsamir, P., Tirosh, D., Almog, N.: 1998, Students' solutions of inequalities, *PME-22*, 129-136.

Wittgenstein, L.: 1982, *Lezioni sui fondamenti della matematica*. Boringhieri, Torino (*Lectures on the Foundations of Mathematics*. Cornell University Press, Ithaca NY 1976).

Wittgenstein, L.: 1999, *Ricerche filosofiche*. Einaudi, Torino Torino (*Philosophische Untersuchungen*. Blackwell, Oxford 1953).