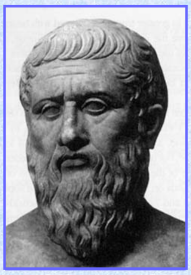
27 aprile 2009
Liceo scientifico "Copernico", Udine

Problemi risolubili con riga e compasso



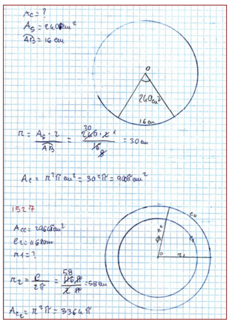
Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Introduzione: per "fare matematica"… … *serve qualcosa?*

"Give us enough chalk"
(André Weil)

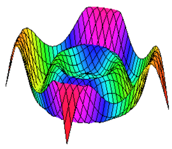
Introduzione: geometria e strumenti, un abbinamento… naturale!

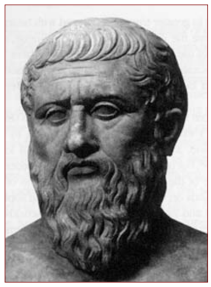
- Potremmo confondere, a prima vista, il "quaderno di italiano" e il "quaderno di storia", o scambiare gli appunti di letteratura latina con quelli di filosofia: **ma i disegni del quaderno di geometria sono inconfondibili.**
- E ovviamente per realizzare tali disegni servono degli **strumenti!**



Introduzione: geometria e strumenti, un abbinamento… naturale!

- Ma tutto ciò non deve trarre in inganno: **gli strumenti, in matematica, non servono soltanto per disegnare…**



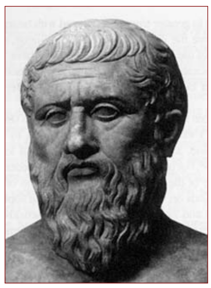


Sommario dell'intervento

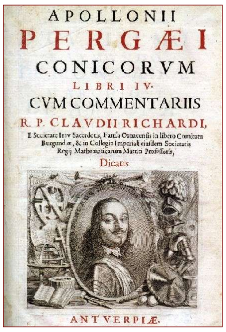
- Riga e compasso: due strumenti dalla Storia della Matematica al software didattico
- Cinque operazioni geometriche
- Esempi di problemi risolubili con riga e compasso
- Caratterizzazione dei problemi risolubili con riga e compasso
- Cenno ai poligoni regolari: da Euclide a Gauss
- Problemi classici non risolubili con riga e compasso
- Solo il compasso? E… solo la riga?

Introduzione: *due celebri strumenti* Una scelta attribuita a Platone e ripresa da Apollonio

- "Sono state date varie spiegazioni circa la restrizione di usare nelle costruzioni soltanto riga e compasso. **La linea retta e la circonferenza erano, secondo i Greci, figure fondamentali e la riga e il compasso sono i loro analoghi fisici…"**



Introduzione: *due celebri strumenti*
Una scelta attribuita a Platone e ripresa da Apollonio



- "È stata anche avanzata come spiegazione l'ipotesi che Platone si sia opposto all'uso di altri strumenti meccanici perché essi avevano **attinenza più con il mondo dei sensi che con quello delle idee"** (M. Kline, 1991).

Introduzione: *due celebri strumenti*
Una scelta attribuita a Platone e ripresa da Apollonio

- "Dato che le dimostrazioni sono universali, e che gli oggetti universali non possono venir percepiti, è evidente che **non sarà possibile una conoscenza dimostrativa attraverso la sensazione.** La sensazione si rivolge infatti necessariamente all'oggetto singolo, mentre la scienza consiste nel render noto l'oggetto universale" (Aristotele).

Due celebri strumenti
Caratteristiche di riga e compasso

- La **riga** ha un (solo) bordo, è illimitata, non graduata: permette solo di tracciare la retta per due punti distinti.
- Il **compasso** permette di tracciare una circonferenza noti il suo centro e un suo punto.

  (Euclide, nel I libro degli *Elementi*, mostra come si possa tracciare la circonferenza noti il centro e un segmento uguale al raggio posto altrove nel piano).
- Osservazione: in aggiunta a **squadra** è praticamente uti procedimenti ma non perm (anzi, renderebbe superfluo

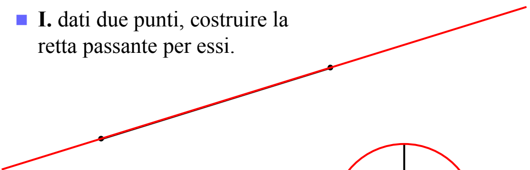
Due celebri strumenti
Attualità didattica di riga e compasso

- L'uso di alcuni moderni software geometrici ricalca i procedimenti che possono essere eseguiti usando (esclusivamente) la riga ed il compasso.
- Esempio: C.a.r. **("compass and ruler")**, applicazione gratuita. Anche **Cabri**, nella versione originaria, consentiva di effettuare le sole costruzioni che indicheremo con l'espressione "con riga e compasso".
- Le versioni più recenti del software hanno però alcuni comandi aggiunti (ad esempio: "tracciare il luogo geometrico") che ne ampliano notevolmente le possibilità.

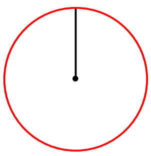
La costruzione in Geometria
Cinque operazioni "classiche"

Consideriamo il seguente elenco di operazioni:

- **I.** dati due punti, costruire la retta passante per essi.

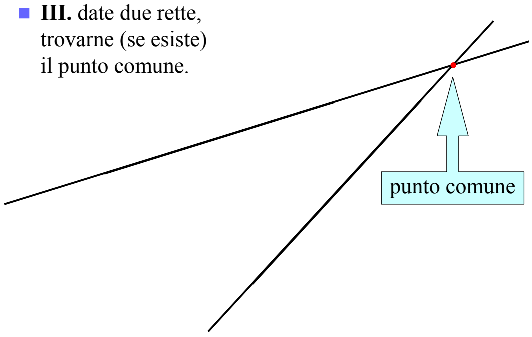


- **II.** dati un punto e un segmento, trovare la circonferenza che ha quel punto come centro e quel segmento come raggio.



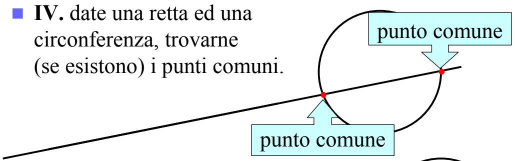
La costruzione in Geometria
Cinque operazioni "classiche"

- **III.** date due rette, trovarne (se esiste) il punto comune.

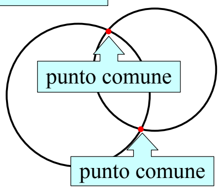


La costruzione in Geometria
Cinque operazioni “classiche”

- **IV.** date una retta ed una circonferenza, trovarne (se esistono) i punti comuni.



- **V.** date due circonferenze, trovarne (se esistono) i punti comuni.



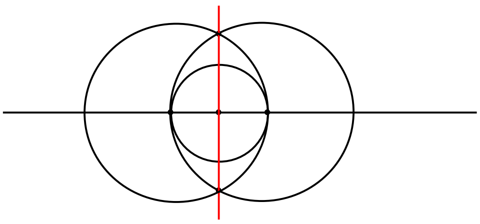
Riassumendo: problemi risolubili “con riga e compasso”

- Un problema si dice **risolubile con riga e compasso** quando può essere ricondotto ad una **sequenza finita di operazioni scelte tra le (I-V)**, cioè:

I. dati due punti, costruire la retta passante per essi;
II. dato un punto ed un segmento, trovare la circonferenza che ha quel punto come centro e quel segmento come raggio;
III. date due rette, trovarne (se esiste) il punto comune;
IV. date una retta ed una circonferenza, trovarne (se esistono) i punti comuni;
V. date due circonferenze, trovarne (se esistono) i punti comuni.

Costruzioni elementari con riga e compasso: un primo esempio

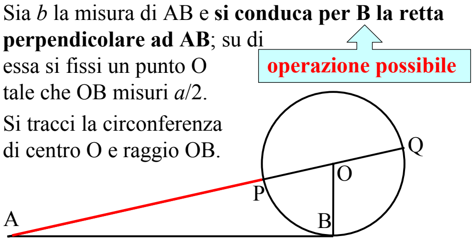
- Data una retta ed un suo punto, tracciare la retta **perpendicolare** alla retta data per quel punto.



Esempio di problema “risolto con riga e compasso”: un’equazione di II grado

- Costruiamo la radice positiva dell’equazione: $x^2+ax-b^2 = 0$
- Siano a, b due numeri positivi che interpreteremo come misure di due segmenti.
- Si noti che affinché una radice sia costruibile (come segmento) deve essere **positiva**. Nell’equazione data una radice è positiva per la regola di Cartesio: infatti i coefficienti dell’equazione presentano una permanenza (1; a) ed una variazione (a; $-b^2$).
- Presentiamo **una costruzione della radice positiva tratta dalla *Geometria* di Cartesio (1637).**

- Sia b la misura di AB e **si conduca per B la retta perpendicolare ad AB**; su di essa si fissi un punto O tale che OB misuri $a/2$.
- Si tracci la circonferenza di centro O e raggio OB.



- P, Q sono i **punti in cui la retta AO incontra la circonferenza**.
- È ***x* la misura di AP**; allora la misura di AQ è $x+a$: $x(x+a) = b^2$, dunque è proprio: $x^2+ax-b^2 = 0$

I problemi risolubili con riga e compasso: caratterizzazione analitica

- Nell’esempio dell’equazione di II grado, le operazioni I-V precedentemente elencate sono sufficienti per realizzare la costruzione della radice.
- Ma come possiamo **caratterizzare i problemi risolubili “con riga e compasso”**?
- Consideriamo un **problema** nel piano cartesiano:

  Dati: punti le cui coordinate sono a, b, c, …

  Incognita: punti le cui coordinate sono x, …
- **Risoluzione del problema:** trovare un’espressione di a, b, c, … che fornisca (ogni) incognita: $x = f(a, b, c, \ldots)$

Problemi risolubili con riga e compasso: teorema fondamentale

- **Proposizione.**
  Condizione necessaria e sufficiente affinché il problema risolto da $x = f(a, b, c, \ldots)$ sia risolubile con riga e compasso è che f possa essere espressa mediante
  (1) operazioni razionali e
  (2) estrazioni di radici quadrate.

- Abbiamo così ottenuto un collegamento tra **l'aspetto geometrico del problema e la sua traduzione algebrica.**

Dalla Geometria all'Algebra Le estensioni algebriche

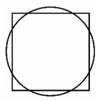
- Ci riferiamo a un sistema cartesiano rispetto a cui è dato un segmento (ad esempio unitario).
- Consideriamo le coordinate degli elementi costruibili, a partire da esso, con riga e compasso; mediante addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione otteniamo **tutti i numeri del campo Q: tutti i punti con coordinate razionali**.
- Mediante l'estrazione di radice quadrata, possiamo costruire **anche altri punti**: ad esempio, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.
- Ricorrendo ancora alle operazioni razionali, costruiamo quindi tutti i numeri $p+q\sqrt{2}$ ($p, q \in \mathbf{Q}$) ottenendo un campo esteso, **più vasto di Q.**

Geometria e Algebra Il ruolo della riga e del compasso

- **In generale:** usando la **riga** si possono costruire solo le quantità del campo C generate dalle quantità date mediante operazioni razionali (si pensi all'equazione di un retta ed all'intersezione di due rette).
- Usando il **compasso** si può **estendere** il campo C ad un campo C' costituito dai $p+q\sqrt{s}$ ($p \in C$, $q \in C$, $s \in C$ ma $\sqrt{s} \notin C$) di cui C è sottocampo (si pensi al caso $q = 0$).
- I numeri costruibili sono tutti quelli che possono essere **ottenuti attraverso una successione di estensioni** come quella descritta.
- Ad esempio, risulta costruibile: $\sqrt{1+\sqrt{3}} + \sqrt{5} + 1$

Tre problemi classici non risolubili con riga e compasso

- **Duplicazione del cubo**: dato un cubo, determinare lo spigolo di un cubo avente volume doppio del dato.
- **Trisezione dell'angolo**: dato un angolo qualunque, dividerlo in tre parti uguali.
- **Quadratura del cerchio**: dato un cerchio, determinare l'area di un quadrato con area uguale a quella del cerchio dato.



- Osservazione: esistono metodi esatti ad esempio per trisecare un angolo (il metodo di Archimede), ma tali metodi presuppongono l'uso di **altri strumenti,** diversi dalla riga e dal compasso.

Tre problemi classici non risolubili con riga e compasso

- La **duplicazione del cubo** è spesso indicata come il "problema di Delo": secondo una leggenda, nel IV secolo a.C., durante un'epidemia, Apollo chiese agli abitanti di Delo (attraverso l'oracolo di Delfo) di **raddoppiare esattamente in volume il suo altare, conservando però la sua forma cubica.**
- Il problema era già stato trattato in precedenza (ad esempio da Ippocrate di Chio, nel V sec. a.C.).
- Deve cioè essere: $\boldsymbol{b^3 = 2a^3}$
  cioè (come mostrato da Ippocrate):
  $\boldsymbol{a : b = b : c = c : 2a}$

Tre problemi classici non risolubili con riga e compasso

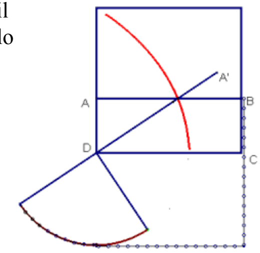
- Per provare che $\boldsymbol{a : b = b : c = c : 2a}$ equivale a $\boldsymbol{b^3 = 2a^3}$ si osservi che da tale proporzione si ha:
  $b^2 = ac$ e $c^2 = 2ab$. Dunque:
  $b^2/a = c \;\Rightarrow\; c^2 = b^4/a^2 \;\Rightarrow\; b^4/a^2 = 2ab \;\Rightarrow$
  $\Rightarrow\; b^3 = 2a^3$
- La risoluzione del problema di Delo può quindi ridursi allo studio delle intersezioni di **due delle tre coniche** (due parabole e un'iperbole equilatera) le cui moderne equazioni cartesiane sono, ponendo $b = x$, $c = y$:
  $x^2 = ay \qquad y^2 = 2ax \qquad xy = 2a^2$

Sintesi. Numeri reali costruibili (e non costruibili) con riga e compasso

- Anche con una costruzione geometrica molto lunga, operando con riga e compasso, possiamo individuare solo punti le cui coordinate si ottengono **risolvendo successivamente equazioni di I o di II grado.**
- I coefficienti della prima equazione sono numeri interi (coordinate di punti noti); i coefficienti delle successive equazioni possono anche essere numeri trovati come soluzioni nelle equazioni precedenti.
- Dunque: **se il numero reale α soddisfa un polinomio irriducibile sul campo dei razionali di grado k e se k non è una potenza di 2, allora α non è costruibile con riga e compasso.**

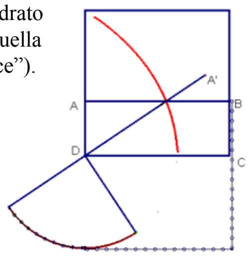
I problemi classici. Alcune curve non costruibili con riga e compasso

- **Trisettrice di Ippia** (seconda metà del V sec. a.C.): si faccia traslare in modo uniforme il segmento AB fino a coincidere con DC; nello stesso tempo si faccia ruotare uniformemente il segmento DA fino a farlo coincidere con DC.
- Il luogo dei punti di intersezione dei due segmenti durante il loro movimento simultaneo è la **curva di Ippia.**



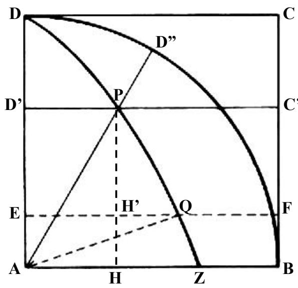
I problemi classici. Alcune curve non costruibili con riga e compasso

- Ippia (secondo Pappo) utilizzò la curva per **trisecare un angolo acuto.** La "trisettrice" di Ippia serve anche per ottenere la **quadratura del cerchio,** cioè per costruire il lato di un quadrato che abbia area uguale a quella di un cerchio ("quadratrice").
- Pappo attribuisce a Dinostrato (350 a.C. circa) la scoperta di questa proprietà e ne fornisce una dimostrazione.



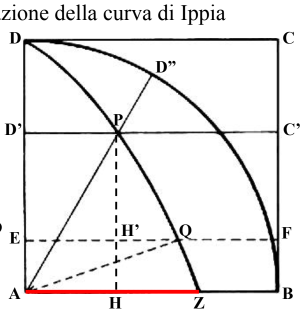
I problemi classici. Alcune curve non costruibili con riga e compasso

- **Trisechiamo un angolo acuto α** essendo PAB = α, QAB = β e HH' = PH/3
- Si verifica che:
  $\beta : \pi/2$ = HH' : AB
  $\alpha : \pi/2$ = PH : AB
- Quindi risulta:
  $\beta = \alpha/3$
- Ma la curva di Ippia **non è costruibile con riga e compasso!**



I problemi classici. Alcune curve non costruibili con riga e compasso

- Per ottenere la **quadratura** del cerchio (di area πAB^2) si può ricavare l'equazione della curva di Ippia (rifer. A, AB, AD):
  $y = x \cdot \text{tg}(\pi y/2AB)$
- Al lim per $y \to 0^+$ di x:
  AZ = 2AB/π
  AZ : AB = AB : πAB/2
- Costruito il 4° prop. (πAB/2), il rettangolo di questo e di 2AB ha area πAB^2.

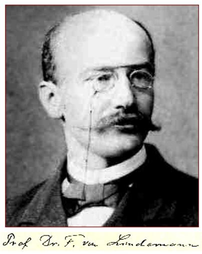


I problemi classici. Alcune curve non costruibili con riga e compasso

- **I problemi classici della geometria greca saranno correttamente inquadrati soltanto nel XIX secolo.**
- Modernamente è provato che le tre costruzioni sono impossibili usando solo la riga e il compasso:
- la trisezione dell'angolo e la duplicazione del cubo sono problemi **algebrici;**
- la quadratura del cerchio è un problema **trascendente.**

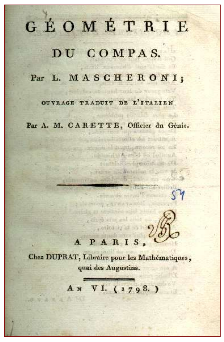
I problemi classici. Alcune curve non costruibili con riga e compasso

- Un reale si dice *algebrico* se è zero di un polinomio non nullo a coefficienti razionali. Si dice *trascendente* se non è algebrico (se non esiste un polinomio non nullo a coeff. razionali del quale è zero).
- La trascendenza di π venne provata (1882) da **Ferdinand von Lindemann** (1852–1939)
- … il quale aveva dimostrato che ciò implica l'impossibilità di quadrare il cerchio con riga e compasso.



Il solo *compasso*: G. Mohr (1649–1697) e L. Mascheroni (1750–1800)

- **Teorema di Mascheroni–Mohr.** Ogni costruzione con riga e compasso si può eseguire **con il solo compasso**.
- Nota. Si ritiene di avere "tracciato" una retta quando se ne conoscono "molti" punti, in particolare le intersezioni con un'altra retta.



GÉOMÉTRIE
DU COMPAS.
Par L. MASCHERONI;
OUVRAGE TRADUIT DE L'ITALIEN
Par A. M. CARETTE, Officier du Génie.

A PARIS,
Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.
An VI. (1798.)

Lorenzo Mascheroni e la *Géométrie du compas* (edizione 1798)

Table

Dopo la *Geometria del Compasso*, una Geometria con la sola riga?

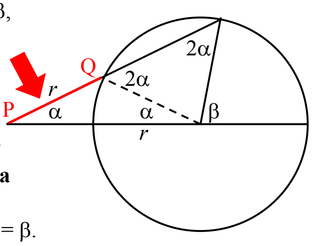
- Alcune costruzioni sono impegnative: ad esempio, è complicato trovare con il solo compasso **il punto medio di un segmento**.
- Con **la sola riga** (ordinaria, non a due bordi paralleli!) si eseguono meno costruzioni: ad esempio, risulta impossibile trovare il punto medio di un segmento.
- J.V. Poncelet (1788–1867) e J. Steiner (1796–1863) hanno provato che ogni costruzione eseguibile con riga e compasso è ottenibile anche con la sola riga quando sia assegnata, nel foglio, **una circonferenza fissa** di cui sia indicato il centro.

Dopo la *Geometria del Compasso*, una Geometria con la sola riga?

- **J.V. Poncelet** (1788–1867) e **J. Steiner** (1796–1863) hanno provato che ogni costruzione eseguibile con riga e compasso è ottenibile anche con la sola riga quando sia data, nel foglio, **una circonferenza fissa** di cui sia indicato il centro.

A proposito dell'uso della riga… La trisezione dell'angolo di Archimede

- Si voglia trisecare β, dunque costruire α tale che $3\alpha = \beta$.
- Costruita la circonferenza, si consideri il punto P **in modo che PQ sia uguale al raggio.**
- Si dimostra che $3\alpha = \beta$.



- Ma abbiamo usato **"impropriamente"** la riga (è stato **"fissato" un segmento** su di essa…): la trisezione di un angolo generico è **impossibile** con riga e compasso.

Appendice. *I poligoni regolari*
Da Euclide…

- Negli *Elementi*, Euclide riporta le **costruzioni** del triangolo equilatero, del quadrato, del pentagono regolare, dell'esagono regolare e del pentadecagono regolare.
- Una volta costruito il poligono regolare di *n* lati, è possibile costruire quello di 2*n* lati.


EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.
VNA CVM SCHOLIIS ANTIQVIS
A FEDERICO COMMANDINO
Vrbinate in latinum conuersi.
ILLVSTRISSIMO ET REVERENDISSIMO D.
D. CAROLO MEDICEO S.R.E. CARD.
AC PRINCIPI AMPLISSIMO
DICATI.

PISAVRI, Typis Flaminij Concordiæ, MDCXIX.
DE CONSENSV SVPERIORVM.

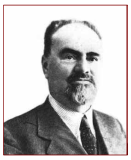
I poligoni regolari
… a Gauss (1777-1855)


Karl Friedrich Gauss.

- Nel 1796 **Carl Friedrich Gauss,** non ancora ventenne, presentò un metodo per costruire il poligono regolare di 17 lati con riga e compasso.
- Più tardi Gauss provò il **teorema sulla ciclotomia**: un poligono regolare di *n* lati è costruibile con riga e compasso se e solo se la scomposizione in fattori primi di *n* è del tipo: $2^a p_1 p_2 \ldots p_h$

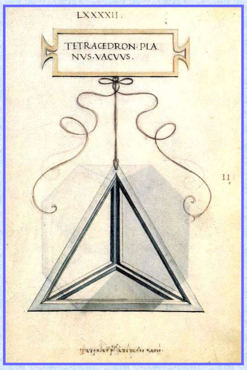
  dove *a*, *h* sono naturali (eventualmente uguali a zero) e $p_1 p_2 \ldots p_h$ sono primi distinti ciascuno del tipo: $2^{2^n}+1$ (come 3, 5, 17, 257, 65535)

Per approfondire



- **Castelnuovo, G.** (1983), Sulla risolubilità dei problemi geometrici cogli istrumenti elementari: contributo della geometria analitica, *Questioni*, II, Zanichelli, Bologna.
- **Enriques, F.** (1983), Sulle equazioni algebriche risolubili per radicali quadratici e sulla costruibilità dei poligoni regolari, *Questioni*, II, Zanichelli, Bologna.
- Per la geometria del compasso: **Daniele, E.** (1983), Sulla risoluzione dei problemi geometrici col compasso, *Questioni*, II, Zanichelli, Bologna.
- Alcune costruzioni con la sola riga si trovano in: **Ghersi, I.** (1978), *Matematica dilettevole e curiosa*, Hoepli, Milano.

A tutti grazie dell'attenzione



Grazie a
Claudio Bernardi
(Università di Roma
"La Sapienza")