

Treviso, novembre 2006

Uno sguardo alla storia dell'analisi matematica

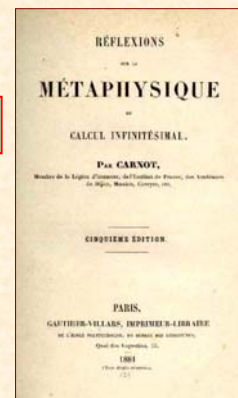


Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario

- **Matematica e storia:** riferimenti teorici
- **Incontriamo l'analisi:** le frazioni continue
- **Successioni numeriche:** il concetto di limite
- **Serie numeriche:** il concetto di somma
- **Riflessioni conclusive:** verso le funzioni



La nascita di un concetto matematico: scoperta o invenzione?

- La questione ha fatto discutere a lungo matematici, filosofi e storici della Matematica:
- da un lato il matematico potrebbe essere assimilato allo **scopritore**, a chi studia oggetti e proprietà in qualche modo **già dotati di una propria esistenza**;
- dall'altro, sarebbe l'**inventore**, chi crea la Matematica pur nel rispetto di alcuni vincoli (ad esempio logici).
- Le scelte, rispettivamente **platonista** e **costruttivista**, hanno conseguenze filosofiche vaste.
- Talvolta però dal punto di vista epistemologico la rigida alternativa viene elusa.

La Storia nella Matematica: una presenza e molte questioni

- Questioni epistemologiche fondamentali:
- è corretto concepire la storia come un percorso che, attraverso tentativi e rivisitazioni critiche, porti **alla sistemazione moderna**?
- Possiamo cioè riferire l'intera evoluzione storica della Matematica alle nostre attuali concezioni?
- Quale ruolo va attribuito ai **fattori culturali e sociali**?
- Le fasi che consideriamo come momenti di passaggio verso la formazione della Matematica "compiuta" (la nostra), costituivano **la Matematica "compiuta" dell'epoca, in base a concezioni culturali precise**.

Implicite (discutibili!) posizioni nella storiografia matematica

- Ma la storiografia spesso ha assunto implicitamente una posizione assoluta, interpretando **la Matematica di un periodo storico con riferimento alla "nostra" moderna Matematica**.
- Alcuni esempi (tra i moltissimi disponibili!):
- "L'espressione di Wallis è **molto lacunosa**, ma contiene l'idea giusta" (M. Kline).
- "Leibniz non si curava della propria **imprecisione concettuale**" (C.B. Boyer).
- "Il sottotitolo del volume di Lagrange rivela **la follia del tentativo** del suo autore" (M. Kline, sull'Analisi ricondotta a procedimenti algebrici).

La Storia nella Matematica: le moderne concezioni del passato

- "Anche il più titanico sforzo di rinunciare alle nostre conoscenze nel tentativo di vedere l'evento storico nella sua purezza non avrebbe successo: **siamo condannati a portarci dietro le nostre moderne concezioni del passato**" (L. Radford, 1997).
- Ma se siamo obbligati a guardare il passato attraverso **una lente non del tutto trasparente**, non ci resta che scegliere tra le due opzioni: o rinunciare definitivamente ad osservare il passato, per non snaturarlo con le nostre concezioni moderne;
- oppure...

La Storia nella Didattica: si collegano culture diverse

- ...oppure accettare la presenza di tale lente e le distorsioni che introduce, tenendo presente che attraverso essa poniamo in contatto **due culture "diverse ma non incommensurabili"** (L. Radford, P. Boero, C. Vasco, 2000).
- Anche a questa scelta sono collegate difficoltà:
- il tentativo di **imitare l'approccio** ai problemi dei matematici del passato può rivelarsi ingenuo;
- la ricostruzione dell'**ambiente socio-culturale di un periodo lontano non è semplice**: esige preparazione storica e consapevolezza epistemologica.

Lente e "punto di vista": l'importante è mettere a fuoco... ma che cosa?

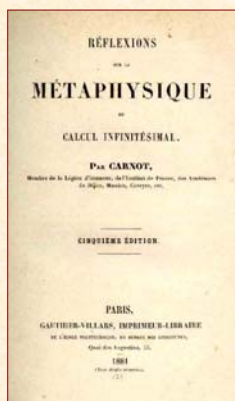
- Attraverso la nostra lente **noi** possiamo cercare di comprendere (di interpretare, di valutare) **direttamente il fatto storico**.



- Dobbiamo però anche comprendere **l'ambiente socio-culturale** nel quale si inquadra il fatto storico.

Sommario

- **Matematica e storia:** riferimenti teorici
- **Incontriamo l'analisi:** le frazioni continue
- **Successioni numeriche:** il concetto di limite
- **Serie numeriche:** il concetto di somma
- **Riflessioni conclusive:** verso le funzioni



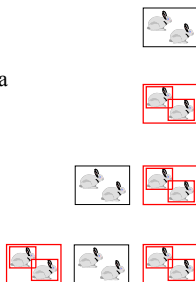
Quattro personaggi nella storia (e nella geografia) della matematica

- Il mio nome è Leonardo e sono nato a Pisa (verso la fine del XII secolo); mi chiamano **Fibonacci**.
- Immagina di possedere una coppia di coniglietti.
- **Dopo un mese** di vita essa diviene feconda e, da quel momento in poi, genera **una nuova coppia di coniglietti al mese**.



I coniglietti di Fibonacci

- All'inizio abbiamo solo una coppia, A, non feconda;
- dopo **un mese**, abbiamo ancora la sola coppia A, che è divenuta feconda;
- dopo **due** mesi, A (che resta) ha generato una nuova coppia B, inizialmente non feconda;
- dopo **tre** mesi, A ha generato C, inizialmente non feconda, e B è diventata feconda...



I coniglietti di Fibonacci

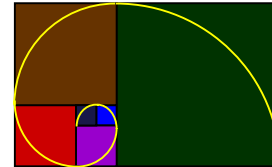
- Se contiamo, mese dopo mese, il numero delle coppie di coniglietti, troveremo la **successione di Fibonacci**; fu il matematico francese Edouard Lucas (1842-1891) che propose tale denominazione:
1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; ...
- I calcoli diventano sempre più fastidiosi; come potremmo scrivere una "regola" che ci aiuti a calcolare con facilità i termini di tale successione?
- Insomma: **quante saranno le coppie di coniglietti ad un mese considerato?**

I coniglietti di Fibonacci

- Ci saranno, ovviamente, **tutte le coppie del mese precedente** (i coniglietti sono immortali!).
- Ci saranno poi le coppie “neonate”: quante? Una per ogni coppia feconda (nel mese precedente al mese considerato). Ma le coppie di coniglietti diventano feconde dopo un mese di “attesa”. Quindi il numero di coppie in età feconda al momento considerato è il numero delle **coppie presenti due mesi prima**.
- Quindi: **il numero a_n di coppie al mese n -esimo è la somma del numero delle coppie presenti nei due mesi precedenti.**
- $a_0 = 1; \quad a_1 = 1; \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad n \in \mathbb{N}$

I coniglietti di Fibonacci

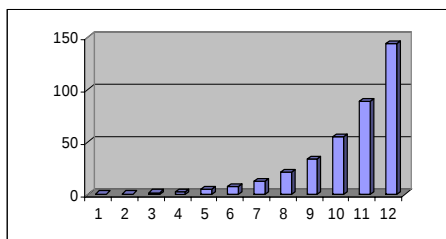
- La successione di numeri: **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...** si ritrova in molte applicazioni.
- Ad esempio consente di tassellare un piano con una sequenza di quadrati due soli dei quali con lati uguali:



- una sequenza strettamente imparentata con la **spirale!**

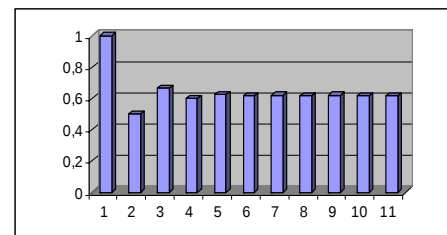
I coniglietti di Fibonacci

- Possiamo anche rappresentare in un grafico l'andamento della nostra “popolazione” per i primi mesi (consideriamo, ad esempio, il primo anno):



I coniglietti di Fibonacci

- Se esaminiamo il rapporto tra il numero di coppie al mese n -esimo e al mese $(n+1)$ -esimo, troviamo che al crescere di n tale rapporto **tende a “stabilizzarsi”** intorno ad un valore di poco superiore a 0,6:



I coniglietti di Fibonacci

- Questo comportamento è interessante; per poterlo studiare meglio, però, sarebbe opportuno scrivere una “regola” (simile a quella ricavata poco fa) che ci consenta di calcolare facilmente **i rapporti tra due termini consecutivi della successione di Fibonacci**.
- Il rapporto iniziale, R_0 , è evidentemente 1 (i primi due elementi della successione sono infatti uguali!).
- Per quanto riguarda i rapporti successivi, proveremo a calcolare il rapporto R_{n+1} tra il numero di coppie al mese $(n+1)$ -esimo ed al mese $(n+2)$ -esimo.

I coniglietti di Fibonacci

$$R_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + a_n} = \frac{1}{1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}} = \frac{1}{1 + R_n}$$

e dunque la “regola” è la seguente:

$$\begin{cases} R_0 = 1 \\ R_{n+1} = \frac{1}{1 + R_n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

I coniglietti di Fibonacci

Calcoliamo alcuni valori:

$$R_0 = 1 \quad R_1 = \frac{1}{1+1}$$

$$R_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}$$

$$R_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}$$

Considereremo ancora espressioni come questa

Ed ora un Bolognese, nel Cinquecento

- Il mio nome è **Rafael Bombelli**, sono nato nel 1526 vicino a Bologna.
- Nel mio libro *L'Algebra*, del 1572, ho calcolato una radice quadrata con un procedimento nuovo, studiato anche da **Pietro Antonio Cataldi**...
- che qualcuno chiamerà **"frazione continua"**!



Le frazioni continue nel Cinquecento

Ebbene, per trovare $\sqrt{n}$, ti suggerisco di porre: $n = q^2 + r$ (con q intero e q^2 il massimo quadrato non maggiore di n) e di assumere per $\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n} = q + \frac{r}{2q + \frac{r}{2q + \frac{r}{2q + \dots}}}$$

Si tratta di una frazione che, nel proprio denominatore, "contiene" un'altra frazione e così via: continuamente! Ma quanti denominatori dovrai considerare per trovare la radice quadrata cercata? **Più avanti riuscirai a spingerti con il calcolo, più il valore che otterrai sarà accurato.**

Un terzo personaggio: ritroviamo un Arabo di milletrecento anni fa...

- Sono **Muhammed ibn-Musa al-Kuwarizmi**, quel matematico (e astronomo) di origine persiana...
- Mi occupo di quella che chiamerete Algebra: proprio dal titolo del mio ***Al-jabr wal mukabalah*** deriva la parola "Algebra".
- Ad esempio: $x^2 + x = 1$ porta a $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$



Le equazioni di secondo grado

Per risolvere la nostra equazione potremmo essere tentati da un metodo che si usa per le equazioni di primo grado:

$$x(x+1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1+x} \Rightarrow x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$$

ma continuando a sostituire $\frac{1}{1+x}$ per x il procedimento non avrebbe fine! Avremmo:

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad \text{cioè una frazione continua.}$$

Le equazioni di secondo grado ... e le frazioni continue

Non è molto comodo disporre di una soluzione in questa forma; per quanto abbiamo potuto constatare, comunque:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad \text{è un altro modo di scrivere} \quad \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

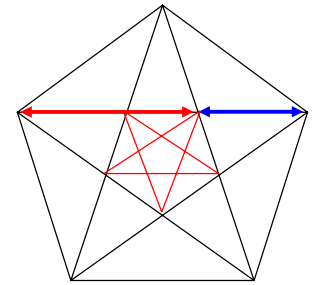
Utilizzeremo presto questa osservazione!

Infine uno scultore greco, ventiquattro secoli fa

- Mi chiamo **Fidia**, scultore ateniese: ho dedicato la vita alla bellezza, alla ricerca della perfezione formale.
- Tra le figure geometriche esiste un rettangolo così "armonico" nelle sue parti da essere detto **aureo**; il rapporto tra le misure dei suoi due lati diversi è un numero, detto appunto **rapporto aureo**: $1/\phi$
- Ogni rettangolo che appare nelle nostre costruzioni che sono considerate "belle" è costruito in base a $1/\phi$.



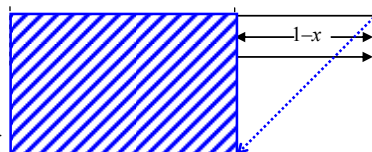
Rapporto aureo



La considerazione di $1/\phi$ è antica: già i seguaci di Pitagora sapevano che **le diagonali di un pentagono regolare si tagliano in parti che stanno tra di loro nel rapporto aureo**; ed il pentagono stellato era importante per i Pitagorici.

(Leonardo e) la matematica della "divina proporzione"

Sia $1/\phi = x$ e consideriamo un segmento di lunghezza unitaria:



La parte aurea x è media propor. tra il segmento e la parte rimanente (lunga $1-x$):

$$1 : x = x : (1-x)$$

Un'equazione di secondo grado...

Fidia e il numero aureo... per tornare a Fibonacci!

Ma sappiamo grazie a Mohammed Ibn Musa Al Khuwarizmi che il numero che risolve questa equazione è:

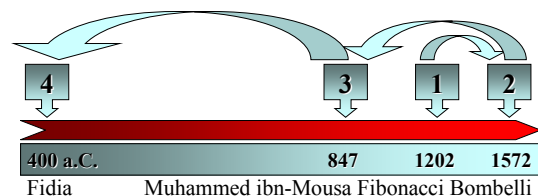
$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{che si può scrivere anche:} \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

E dunque io, Fidia, padre delle più alte meraviglie dell'Arte, ti invito ora a contemplare alcune sorprendenti meraviglie della Matematica: con la stessa scrittura possiamo indicare **il numero aureo $1/\phi$** e **il numero al quale tendono i rapporti tra termini consecutivi della successione di Fibonacci!**

Davvero la matematica è ricca di sorprese!

- Una **popolazione di coniglietti** studiata a Pisa nel Duecento può aumentare...
- strizzando idealmente l'occhio alle **perfette proporzioni di un tempio greco**.
- Tutto ciò grazie alle riflessioni algebriche di un saggio matematico **persiano**...
- e ad un **procedimento per il calcolo delle radici quadrate** di un matematico bolognese del Rinascimento!

Una storia... "a salti"

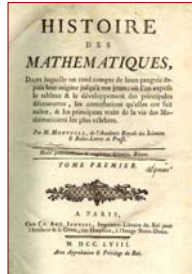


- L'accostamento di Fibonacci, Muhammed ibn-Musa, Bombelli e Fidia ci ha dato l'occasione per una **divertente galoppata** in quasi venti secoli di matematica.

■ **Ma...**

Algoritmi e contesti socio-culturali

- Gli algoritmi, nella storia della nostra disciplina, sono espressioni della matematica effettivamente “usata” dai vari popoli, nelle diverse tradizioni culturali.
- La loro nascita è sempre collegata alle **esigenze di persone reali** (in un **momento storico**, in un ben preciso **contesto culturale**) e devono essere interpretati, oggi, con riferimento a quel contesto.



Torniamo alle frazioni continue

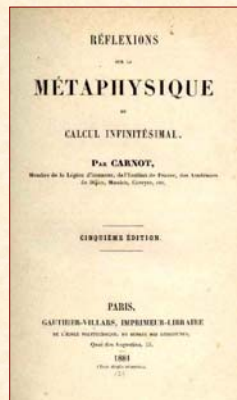
- Accostare la successione di Fibonacci al numero aureo attraverso le frazioni continue **ha senso per noi, oggi**: il collegamento è brillante e consente di giustificare una proprietà (che noi riteniamo) interessante.
- **Ma non avrebbe avuto alcun senso per Fidia.**
- Proprio le frazioni continue ci serviranno per introdurre un oggetto matematico molto importante:

$$1 \quad \frac{1}{1+1} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} \quad \text{etc.}$$

- la **successione numerica**.

Sommario

- **Matematica e storia**: riferimenti teorici
- **Incontriamo l'analisi**: le frazioni continue
- **Successioni numeriche**: il concetto di limite
- **Serie numeriche**: il concetto di somma
- **Riflessioni conclusive**: verso le funzioni

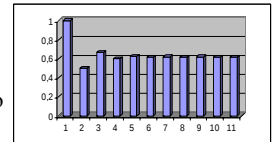


Una “fila” di numeri

- Consideriamo quanto ottenuto poco fa:

$$1 \quad \frac{1}{1+1} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} \quad \text{etc.}$$

- E “facciamo i conti”:
1 1/2 2/3 3/5 ...
- Più si procede e più ci si avvicina al numero aureo (0,61803398...)



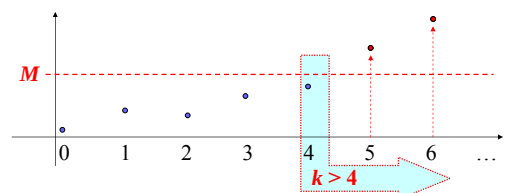
Tre successioni diverse per tre comportamenti “asintotici”

- $a(n)$ 0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 ...
- $b(n)$ 1 1/2 1/4 1/8 1/16 1/32 1/64 1/128 1/256 1/512...
- $c(n)$ 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 ...
- La prima, $a(n)$ “**crece indefinitamente**”
- La seconda, $b(n)$ “**si avvicina sempre di più a 0**”
- La terza, $c(n)$ “**oscilla senza mai stabilizzarsi**”
- $a(n)$ si dice **divergente (positivamente)**
- $b(n)$ si dice **convergente (a 0)**
- $c(n)$ si dice **indeterminata**

Alcune definizioni per il concetto di limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = +\infty$$

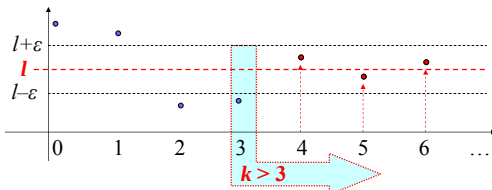
- Definizione. La successione $a(n)$ si dice **divergente** (positivamente) se per ogni $M > 0$ esiste un indice k tale che, per ogni $i > k$, risulta: $a(n) > M$
[il valore assunto da $a(n)$, da un certo punto (k) in poi, è più grande di un livello (M) fissato a piacere]



Alcune definizioni per il concetto di limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = l$$

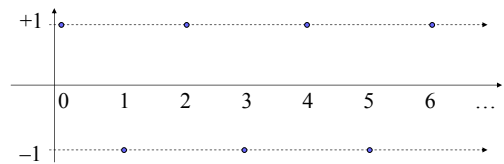
- Definizione. La successione $b(n)$ si dice **convergente** al limite l se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice k tale che, per ogni $i > k$, risulta: $l - \varepsilon < b(n) < l + \varepsilon$
[il valore di $b(n)$, da un certo punto (k) in poi, si discosta da l meno di una tolleranza (ε) a piacere]



Alcune definizioni per il concetto di limite

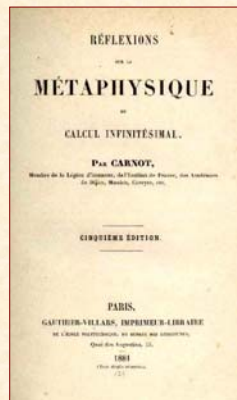
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) = \text{non esiste}$$

- Una successione come $c(n)$ che non sia convergente né divergente (positivamente, a $+\infty$, né negativamente, a $-\infty$) si dice **indeterminata**: non ammette alcun limite.
- Ad esempio, $c(n)$ continua ad oscillare tra $+1$ e -1 :

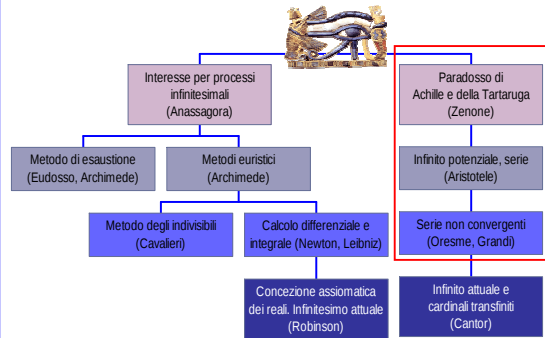


Sommario

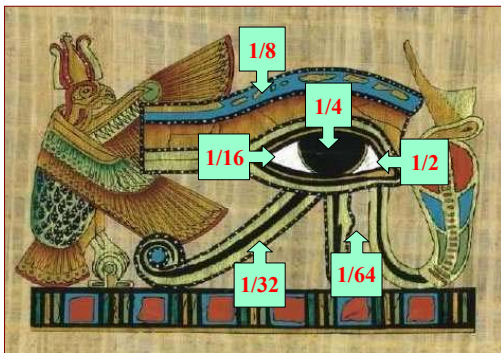
- Matematica e storia: riferimenti teorici
- Incontriamo l'analisi: le frazioni continue
- Successioni numeriche: il concetto di limite
- Serie numeriche: il concetto di somma**
- Riflessioni conclusive: verso le funzioni



Storia "non sequenziale" del Calcolo Sublime



Finito ed infinito: l'occhio di Horus



Gli Egiziani e le (prime) potenze di 1/2



$$\begin{aligned} & (1/2) + (1/4) + \\ & + (1/8) + (1/16) + \\ & + (1/32) + (1/64) = \\ & = 1! \end{aligned}$$

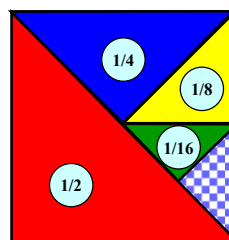
Il risultato esatto sarebbe: $63/64$ (cioè: $1 - 1/64$).

- Un primo abbozzo di procedimento "infinitesimale", ma interrotto dopo soltanto 6 addendi, quando le quantità coinvolte diventano "troppo piccole" (minori di $1/64$).
- Invece si potrebbe procedere, considerando dunque un numero molto più elevato di addendi: **quanti?**

Riflettiamo sull'ultimo esempio

- $1 + (1/2) + (1/4) + (1/8) + (1/16) + (1/32) + (1/64) + \dots$ supera ogni $k > 0$, qualsiasi sia il k considerato?
 - **La risposta è no.** Basta $k = 2$: la somma non supererà mai 2, qualsiasi sia il numero di addendi considerati:
 - 1 per arrivare a 2 dovremmo aggiungere 1 aggiungiamo **la metà** di ciò che manca: $1/2$
 - $1 + 1/2$ per arrivare a 2 dovremmo aggiungere $1/2$ aggiungiamo **la metà** di ciò che manca: $1/4$
- e via di seguito: aggiungiamo **sempre la metà di ciò che manca... quindi non supereremo mai 2!**

Completiamo la “scomposizione” dell’occhio di Horus



- Quello rosso è un triangolo rettangolo isoscele con il cateto unitario.
- Qual è la sua area? $1/2$
- E del triangolo blu? $1/4$
- E del triangolo giallo? $1/8$
- E del verde? $1/16$
- E proseguendo così?

- Possiamo dunque affermare: $(1/2) + (1/4) + (1/8) + (1/16) + (1/32) + (1/64) + (1/128) + \dots \leq 1$ anzi, più addendi consideriamo, più ci avviciniamo a 1.

La Proposizione 23 della Quadratura della Parabola

- Nella *Quadratura della Parabola*, **Archimede di Siracusa** (287-212 a.C.) fa implicitamente riferimento alla **serie geometrica di ragione 1/4** nella proposizione seguente:
- **Proposizione 23.** Se alcune grandezze si pongono ordinatamente nel rapporto quadruplo [se ciascuna è quadrupla della seguente], tutte le grandezze [sommate insieme] più ancora la terza parte della più piccola saranno i quattro terzi della maggiore.

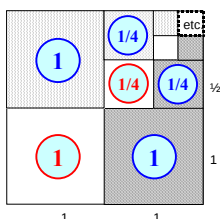
Una serie convergente in una proposizione archimedeica

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{3} &= \frac{4}{3} \\
 \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} &= \frac{4}{3} \\
 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} &= \frac{4}{3} \\
 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{64} &= \frac{4}{3} \\
 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n} &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n}
 \end{aligned}$$



Visualizziamo ancora la situazione

- Il quadrato di area 4 viene suddiviso nelle tre successioni di quadrati (costituite da elementi ordinatamente congruenti) di figure **puntinate**, **bianche** e **tratteggiate**.
- Consideriamo le aree dei quadrati: **1** (per i più grandi), **1/4** (per i seguenti), **1/16**, ...
- Dunque la “somma di tutte le aree” per 3 è 4 (l’area totale) e questa “somma” è $4/3$.

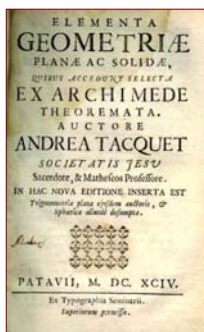


Serie numeriche tra il XVI e il XVII secolo

- La formula per la somma di una serie geometrica compare in *Varia responsa* (1593) di **F. Viète** (1540-1603) ed era nota a **P. de Fermat** (1601-1665).
- Fu pubblicata nel 1655 anche da **J. Wallis** (1616-1703) in *Arithmetica infinitorum* e da **A. Tacquet** (1612-1660).



Tacquet: finito e infinito



- A. Tacquet notava:
- “Con facilità si passa da una **progressione finita alla progressione infinita**. E c'è da stupirsi che gli Aritmetici che conoscevano il teorema sulle progressioni finite abbiano ignorato quello sulle progressioni infinite, che si deduce immediatamente”.

Che cosa **non** si deve fare (attualizzando Tacquet...)

- Il passaggio da **finito** a **infinito** è fondamentale dal punto di vista **cognitivo** (in Lakoff & Nuñez, 2000, esso costituisce la *Basic Metaphor of Infinity*).
- **Ma da un punto di vista epistemologico c'è una delicatissima rottura!**
- Addizionare infiniti addendi **non equivale a realizzare un'addizione** propriamente detta.
- Un'addizione ha sempre **un risultato**; una serie può essere **convergente, divergente, indeterminata**.

Un passo indietro nel tempo: Nicola d'Oresme (1323-1382)

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$



Le (infinite) parentesi contengono 2, 4, 8, 16, ... addendi: **la serie è divergente** in quanto la somma di ciascuna parentesi è maggiore di 1/2 (anche se questa serie cresce molto lentamente: per superare **20** servono **272 400 200 termini**).

L'abate Guido Grandi (1671-1742)

- “Mettendo in modo diverso le parentesi nell'espressione $1-1+1-1+\dots$ **io posso, volendo, ottenere 0 o 1**.”
- Ma allora l'idea della creazione *ex nihilo* è perfettamente plausibile” (G. Grandi, 1703).



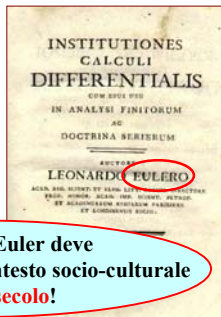
È possibile giustificare l'affermazione di Grandi?

- $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0+0+0+\dots = 0$
 - $1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\dots = 1+0+0+0+\dots = 1$
 - Ma allora qual è “la somma” di $1-1+1-1+\dots$?
 - **Grandi suggerisce 1/2**. Una sua “dimostrazione” (errata) potrebbe essere la seguente:
- $$1-1+1-1+\dots = s$$
- $$1-(1-1+1-1+\dots) = s$$
- $$1-s = s \quad \text{da cui infine: } s = 1/2$$

L'abate Grandi era un buon matematico, **però stavolta...**



Anche grandissimi matematici “inciamparono” su Grandi



... tuttavia L. Euler deve essere inquadrato nel contesto socio-culturale del XVIII secolo!

Ma la “dimostrazione” di $1-1+1-1+\dots = 1/2$ non va!

- Le proprietà formali delle operazioni aritmetiche potrebbero **non valere per le addizioni di infiniti addendi**.
- Non è lecito** “supporre” che una somma s esista!
- La serie di Grandi **non è una serie convergente**.
- Non è neanche una serie divergente (che ha per “somma” l’infinito, come la serie armonica).
- Si tratta di una serie indeterminata, che non ha alcuna somma** (la cui successione delle somme parziali non ammette limite).

Varignon e Riccati criticano Grandi

- Già nel 1715 **Pierre de Varignon** (1654-1722) nella memoria *Précautions à prendre dans l’usage des Suites infinies* osservò che lo sviluppo (con $a>0$, $b>0$):

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \dots + \dots$$

richiede che sia: $b<a$.

- Si considerano finalmente questioni di convergenza.
- Anche **Jacopo Riccati** (1676-1754) contesta Grandi.
- Ma la convergenza sarà studiata correttamente solo da **Gauss**.



Nota: **Frobenius** (Hölder, Cesàro) e la “somma” di serie non convergenti



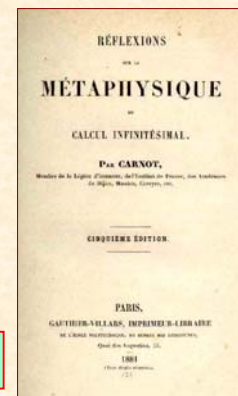
- La serie di Grandi è **indeterminata**, ma **converge nel senso di Georg Frobenius** (1849-1917).
- Tale nozione riprende idee di Daniel Bernoulli (1700-1782) e Joseph Raabe (1801-1859) ed è stata generalizzata da Ludwig Otto Hölder (1859-1937) e da Ernesto Cesàro (1859-1906).

La serie di Grandi e la convergenza secondo **Frobenius** (Hölder, Cesàro)

- Data la serie $a_0+a_1+a_2+\dots$ consideriamo la successione delle somme parziali:
 $s_0 = a_0$ $s_1 = a_0+a_1$ $s_2 = a_0+a_1+a_2$...
- Per $n \geq 0$ si indica con σ_n la **media aritmetica** di $s_0, s_1, \dots, s_n$. La serie data converge secondo Frobenius se converge la successione $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$.
- Si verifica facilmente che la $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ nel caso della serie di Grandi è $1, 1/2, 2/3, 1/2, 3/5, 1/2, 4/7, \dots$ e converge a $1/2$.
- Si verifica ad esempio che la serie armonica non converge neppure secondo Frobenius.

Sommario

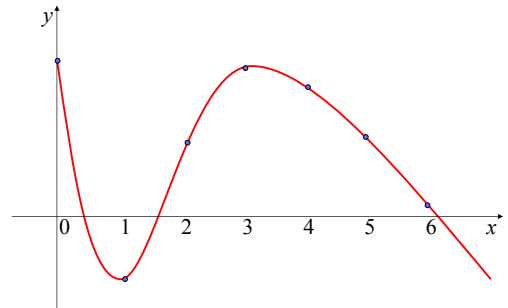
- Matematica e storia:** riferimenti teorici
- Incontriamo l’analisi:** le frazioni continue
- Successioni numeriche:** il concetto di limite
- Serie numeriche:** il concetto di somma
- Riflessioni conclusive:** verso le funzioni



Dalle successioni alle funzioni Una generalizzazione fondamentale

- Le successioni sono un caso particolare di **funzioni**.
- Una **funzione** è una legge che associa ad ogni elemento di un primo insieme ("dominio") **uno e un solo** elemento di un secondo insieme.
- Nel caso delle successioni il dominio è sempre quello dei numeri naturali (0, 1, 2, 3, 4, 5, ...).
- Ma nelle applicazioni spesso una variabile non è discreta, ma può **variare con continuità**.
- Le funzioni che considereremo avranno per dominio quello, essenzialmente più ampio, dei **numeri reali**.

Dalle successioni alle funzioni Una generalizzazione fondamentale



Dalle successioni alle funzioni Una generalizzazione fondamentale

- È possibile quindi considerare le curve piane, con tutte le loro caratteristiche geometriche.
- Il **Calcolo infinitesimale** si fonda dunque sulla **Geometria analitica** che ai tempi di Descartes realizzò la fusione dell'Algebra (dotata, dopo il Rinascimento, di uno strumento simbolico efficace) con la Geometria.



A tutti Voi grazie
dell'attenzione

Grazie a
Luis Radford (Canada)

Per risorse, materiali (scaricabili) e indicazioni bibliografiche si può consultare il sito di servizio per insegnanti e studenti:
www.syllogismos.it

