Rimini, Seminario Nazionale 2009

Interpretazione e didattica della matematica
Una prospettiva ermeneutica

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario
Parte IV
Dall'assenza alla presenza

- **Dialettica assenza–presenza: la lezione di Hegel**
- **Esempio. Torniamo a Bombelli**
- **Esempio. Bacchette da calcolo e mezzi semiotici di oggettificazione**
- **Verso una conclusione: la catena e i segni (oltre Peirce)**

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)

Un "segno" atipico

- Dopo aver introdotto e discusso alcune posizioni riconducibili, in diversi modi, all'**interpretazione** della matematica, della sua storia e dei segni mediante i quali essa viene espressa, in questa sezione ci occuperemo di un altro momento in cui ricercatori, insegnanti e studenti di matematica sono chiamati a "interpretare".
- Anticipiamo che il "segno" di cui andremo ad occuparci dovrà essere considerato per molti versi atipico. Ma, come vedremo, il suo ruolo nell'elaborazione e nella trasmissione del sapere matematico potrà risultare vivace e stimolante.
- **Questo "segno" è l'*assenza*.**

La dialettica di Hegel

- **Premessa:** la nostra posizione è, generalmente, ben lontana dall'idealismo. Tuttavia la **dialettica hegeliana** ci porta verso considerazioni delle quali una riflessione sulla matematica e sulla sua didattica può tener conto, qualsiasi sia l'approccio teorico.
- Ad esempio, con la celebre **sintesi degli opposti**, ci insegna che non si comprende un concetto senza la sua negazione. Dunque **la stessa "presenza" diventa inscindibile dalla considerazione di un'"assenza".**

La lezione di Hegel

- Anche nei processi di insegnamento–apprendimento, dunque, una **"mancanza"** può essere assai feconda.
- Uno studente può infatti domandarsi: che cosa ci potrebbe (ci dovrebbe) essere *qui?* Proprio il fatto di non trovare un elemento (concetto, definizione etc.) può **costituire il punto di partenza per una ricerca.** Ma quanto noteremo avrà risvolti anche più generali.
- In una teoria formata, la "mancanza" di un teorema può essere considerata come provvisoria: "manca" una cosa che in effetti è presente, "c'è" già.
- Si va al **platonismo**? Ciò che manca è "là fuori"…
- Ma l'oggetto della "scoperta" preesiste all'azione del soggetto o "nasce con essa"?

Torniamo all'assenza…

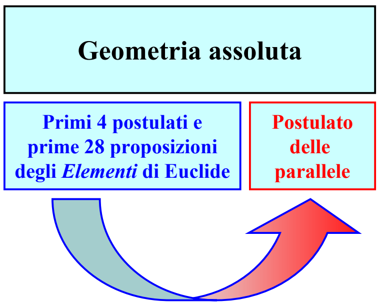
- Abbiamo notato che in ambito didattico la percezione di un'assenza può indurre motivazione. Il suo ruolo può però essere più tipicamente teorico: possiamo "colmare un'assenza" operando all'interno di una teoria o uscendo da essa, ad esempio intervenendo su di un assioma.
- Partiamo, per fissare le idee, dalla constatazione di un'assenza: l'introduzione dell'elemento X (assente, attualmente) potrebbe "funzionare" per giungere a Y. **La supposta efficacia deve però essere verificata**: possono essere necessarie correzioni. Ad esempio, X potrebbe non rivelarsi sufficiente per farci giungere a Y (e verrebbe abbandonato o ripreso per altri scopi).

Bombelli e l’algebra del Rinascimento

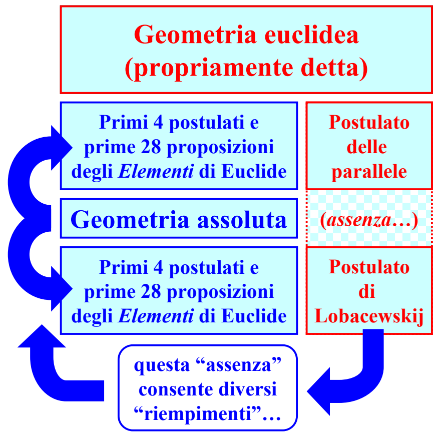
- L’introduzione di *i* avvenne in quanto consentì di trovare una radice reale di equazioni di terzo grado.
- Ad esempio, l’esistenza della radice $x = 4$ per $x^3 = 15x+4$ era constatabile con una verifica in ambito reale; **mancava però il procedimento per trovare tale radice: e questo procedimento, com’è noto, richiede spesso il ricorso a quantità immaginarie.**
- Storicamente, il nuovo “oggetto” *i* non è stato dunque introdotto per dare una soluzione alla $x^2+1 = 0$. In quest’ultimo caso l’assenza di una soluzione è meno problematica: non c’è infatti alcun “risultato” (come la radice $x = 4$ per $x^3 = 15x+4$) da raggiungere…
- **E didatticamente?** Riprenderemo questo esempio!

Il Postulato delle Parallele

- Fino all’inizio dell’Ottocento, i tentativi di dimostrare il Postulato delle Parallele presupponevano che esso fosse, in effetti, un teorema della Geometria Assoluta (coincidente, quindi, con la Geometria Euclidea).
- **Secondo tale approccio, ciò che “mancava” era una *dimostrazione*; ma i matematici di allora si erano concentrati sull’assenza sbagliata…**
- Il punto cruciale per l’ottenimento di una corretta impostazione della questione fu il riconoscimento della differenza tra Geometria Assoluta e Geometria Euclidea: la seconda accetta il Postulato delle Parallele nella forma data negli *Elementi*, la prima prescinde sia da esso che dalle sue negazioni.



- Il “postulato delle parallele” era considerato un **teorema** della geometria euclidea e la sua dimostrazione veniva cercata applicando i primi 4 postulati e le prime 28 proposizioni degli *Elementi*.



Le geometrie non–euclidee

- Scorporando il Quinto Postulato di Euclide dalla Geometria Assoluta si è creato **un vuoto, un’assenza assai feconda.**
- **Tale vuoto ha infatti potuto essere colmato sia in senso euclideo che non–euclideo!**
- Il radicale mutamento della prospettiva teorica che si collega al passaggio dalla concezione di un’unica geometria (quella euclidea) all’accettazione di prospettive non–euclidee porta a una variazione di “principi generali” tale da richiedere, seguendo Rorty, il superamento di un approccio epistemologico in favore di un dialogo ermeneutico?

Le geometrie non–euclidee

- Un confronto sul piano dell’epistemologia richiede il riferimento a principi generali tale da chiarire **che cosa consente un accordo razionale**; un confronto ermeneutico richiede un dialogo e basta.
- Tra **Euclide**, che chiamò “postulato” il Postulato delle Parallele (pur ricorrendovi, negli *Elementi*, il più tardi possibile), i geometri che affrontarono il problema della sua dimostrabilità, **d’Alembert** che classificò “scandalosa” la mancanza di una chiarificazione della situazione, **Gauss**, che tacque per paura delle “strida dei beoti”, e infine **Lobacewskij** e **Riemann**, non c’è una variazione dei “principi generali”: non cambia ciò che consente di raggiungere un accordo razionale.

Assenza e incommensurabilità?

- Cambia la concezione dell'"unica geometria", ma ciò non sembra implicare un passaggio dal confronto epistemologico a quello sul piano dell'ermeneutica.
- Possiamo dunque domandarci: **colmando una lacuna, introducendo una nuova definizione o un nuovo assioma, si possono cambiare (in qualche senso) i principi generali, ottenendo un nuovo impianto teorico incommensurabile con il precedente?**
- Tutto ciò appare difficile, a rischio di incoerenza.

Spunto

Affermare però un' impossibilità, qui, richiederebbe una dimostrazione. Anche altri esempi possono essere studiati in chiave didattica

Sommario
Parte IV
Dall'assenza alla presenza

- **Dialettica assenza–presenza: la lezione di Hegel**
- **Esempio. Torniamo a Bombelli**
- **Esempio. Bacchette da calcolo e mezzi semiotici di oggettificazione**
- **Verso una conclusione: la catena e i segni (oltre Peirce)**

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)

Una riflessione neo–peirceana

- Abbiamo parlato di "oggetti matematici": Peirce distingue l'**Oggetto Immediato** (quello dal quale ha origine o prosegue il processo di semiosi illimitata) e l'**Oggetto Dinamico** (che si forma nella semiosi progressivamente).
- Il limite a cui tende il processo è detto da Peirce **Interpretante Logico Finale** ed è un *habit change* (non un segno, altrimenti susciterebbe un nuovo interpretante).

Oggetto Immediato

Oggetto Dinamico
(si evolve: interpretante che diventa segno etc.)

Interpretante Logico Finale (*habit change*)

Una riflessione neo–peirceana

- Le caratteristiche (e il ruolo) dell'**Oggetto Dinamico** si definiscono progressivamente.
- **L'Interpretante Logico Finale** è l'atteggiamento che la conoscenza completa dell'oggetto in gioco induce (ma è possibile tale "completezza"?).
- Quello più difficile da focalizzare è il punto di partenza!
- Esiste in matematica (e nella didattica) un **Primo Oggetto?**

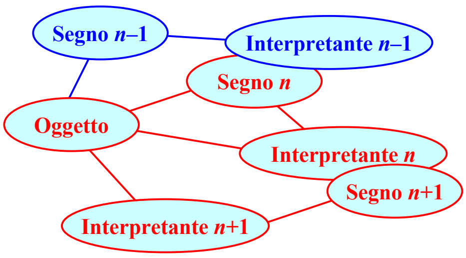
Oggetto Immediato

Oggetto Dinamico
(si evolve: interpretante che diventa segno etc.)

Interpretante Logico Finale (*habit change*)

I segni e l'oggetto

- Ogni fase del processo (a parte l'ultima) porta alla produzione di **un nuovo interpretante *n* che diventa segno *n*+1 e si "collega" con l'oggetto.**
- Ma il processo può essere visto **in senso ascendente?**



I segni e l'oggetto

- **L'oggettualizzazione delle procedure** (Sfard, 1991; Giusti, 1999) consente di ridimensionare l'importanza di un "oggetto matematico" – anche se **un oggetto resta necessario nell'impostazione di Peirce.**
- Per Sfard (1991), **nella formazione dei concetti le concezioni operative precedono quelle strutturali.**
- Nella fase di **interiorizzazione** si opera con i processi che porteranno al nuovo concetto.
- Nella **condensazione** si pensa al processo in termini unitari (avviene in una scatola nera).
- Quando si è in grado di concepirlo un oggetto a sé stante, si dice che il concetto ha finalmente raggiunto la **reificazione.**

I segni e l'oggetto

- Radford (1997) tuttavia nota che Sfard non prende le distanze dall'**ipotesi di Piaget e Garcia** sulle relazioni tra ontogenesi e filogenesi.
- Alcune posizioni sociologiche sono critiche: già Werner (1948) sottolineò differenze fondamentali tra filogenesi e ontogenesi. Lo sviluppo del bambino avviene in un ambiente culturale: **il collegamento tra ontogenesi e filogenesi è solo formale.**
- Otte nota che «lo sviluppo della conoscenza non avviene all'interno dell'evoluzione naturale, bensì si inquadra nello sviluppo socio–culturale [e] **la conoscenza è necessariamente conoscenza sociale».**
- Riprenderemo presto questo punto.

La radice del processo di semiosi

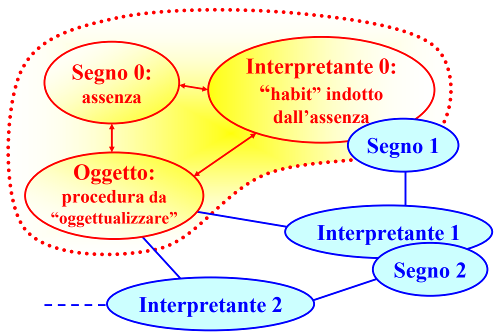
- Si pone comunque il problema del **"primo segno"** (ovvero dei **primi segni**): quale segno **non può essere considerato interpretante di segni precedenti?**
- Forse il nostro oggetto "procedura oggettualizzata" può avere come primo segno **un atteggiamento (*habit*) originario dal quale prende le mosse la (ovvero una) catena di segni.**
- **La semiosi illimitata, dunque, troverebbe un primo e un ultimo anello in due "non–segni" analoghi.**
- Parlare di "atteggiamento" è ancora troppo vago: **un atteggiamento, in generale, può essere indotto come interpretante da un segno precedente.**
- **Il "primo segno" deve essere precisato meglio…**

La radice del processo di semiosi

- Abbiamo sopra visto che "l'assenza" può essere considerato un segno, sebbene *sui generis*.
- Si potrebbe dunque ipotizzare che proprio **la constatazione di un'assenza sia il punto da cui prende le mosse la semiosi illimitata.**
- Ciò sarebbe influenzato da importanti elementi:
  - **la teoria in cui si opera**
  - **i soggetti coinvolti (studenti, insegnante)**
  - **il contesto socio–culturale (ambiente, credenze, concezione della matematica etc.)**
- Naturalmente non è detto che, dato un qualsiasi "oggetto matematico", un "punto di partenza" del genere ora descritto **esista** e **sia unico.**

La radice del processo di semiosi

- Ipotizziamo un diagramma (che andrà precisato!):

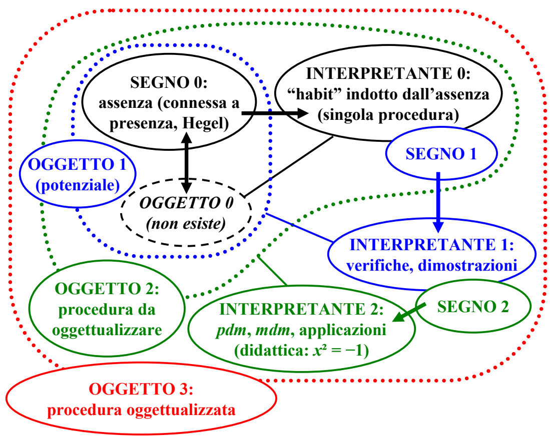


La radice del processo di semiosi

- Il punto di partenza della catena sarebbe una sorta di "oggetto–segno–interpretante", senza una precisa scansione cronologica:

  sarebbe un **atteggiamento** (*habit*) collegato con l'**assenza** di un oggetto, una **procedura** (che sarà) **oggettualizzata** ovvero, inizialmente, **da oggettualizzare.**
- Proponiamo un esempio riferito all'introduzione di *i* che avvenne, come sopra ricordato citando **Bombelli,** in quanto consentì di trovare una radice reale di equazioni di terzo grado

  (e come rilevato, **talvolta** l'itinerario "storico" può riflettersi in percorsi di apprendimento!).



La **radice** del processo di semiosi

- Quanto ora ipotizzato non esaurisce l'evoluzione dell'"oggetto" (né storicamente, né didatticamente).
- Con il progredire della catena semiosica cambia il **ground** della rappresentazione. Si sviluppa la **componente formale;** l'oggetto può assumere caratteristiche di rigore, diventare **"matematico"**.
- Parallelamente si evolvono **l'ambiente sociale, il contesto culturale…**
- Per adesso vediamo un altro esempio.

Spunto

Ulteriori riflessioni potranno essere dedicate all'analisi di queste possibilità con riferimento alla matematica e alla sua didattica

Sommario
Parte IV
Dall'assenza alla presenza

- **Dialettica assenza–presenza: la lezione di Hegel**
- **Esempio. Torniamo a Bombelli**
- **Esempio. Bacchette da calcolo e mezzi semiotici di oggettificazione**
- **Verso una conclusione: la catena e i segni (oltre Peirce)**

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)

Dalle dita ai **bastoncini:** le bacchette da calcolo

- Per indicare i numeri usando **bastoncini** possiamo riferirci alle dita della mano: un dito, due dita…

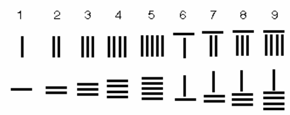
- A 5 unità (corrispondenti a 5 dita) qualcosa cambia: dobbiamo ricorrere all'altra mano, **ma indicare che abbiamo già considerato una mano completa**.

- **Prima di raggiungere il 10 dobbiamo** prepararci ad una situazione importante: per evitare di restare bloccati (avendo esaurito le dita delle mani, come aggiungeremo altre unità?) introdurremo le **decine**.

I numeri in Cina
Disposizioni *Tsung* e *Heng*

- Le **decine** si indicano con bacchette **poste a sinistra**. Fino al XII sec. lo **zero** era uno spazio vuoto: **questa assenza ha reso opportuno l'uso di due gruppi di simboli**: si utilizzavano per le decine disposizioni (*Heng*) diverse da quelle per le unità (*Tsung*):

- Per le centinaia le disposizioni usate erano *Tsung*, per le migliaia *Heng* etc.
- Riassumendo:



Che cos'è l'*algebra*?
Algebra cinese e carattere posizionale

- In Cina l'algebra è presente dal II sec. a.C. in forma retorica o sincopata (ideogrammi monosillabici per quantità e operazioni) con un importante **"carattere posizionale"** (Needham 1959, p. 112).
- La **tavola da calcolo algebrica** cinese era impostata in modo che **determinate posizioni fossero occupate sempre da particolari tipi di grandezze** (incognite, potenze etc.)
- …e tale convenzione può considerarsi un importante **artefatto secondario** (secondo Wartofsky) da abbinare all'artefatto primario, lo strumento vero e proprio.

Le formule algebriche e la classificazione **peirceana**

- Torniamo ai nostri segni dell'algebra: sono "simboli"?
- Secondo **Peirce**, **una formula algebrica «è un'icona,** ed è resa tale dalle regole di commutazione, associazione e distribuzione dei simboli».
- Ciò « può sembrare a prima vista una classificazione arbitraria; perché potrebbe […] essere considerata come un segno convenzionale composto. Ma non è così: perché una proprietà altamente distintiva dell'icona è che **attraverso osservazione diretta di essa si possono scoprire riguardo al suo oggetto verità nuove oltre a quelle sufficienti a determinare la costruzione dell'icona stessa»** (Peirce, *MS* 787).

Le formule algebriche e la classificazione peirceana

- Pensiamo ad esempio all'equazione: $x^2+8x = 105$
  La "trattiamo" come un segno simbolico?
- Pensiamo sempre ai significati che i singoli segni convenzionalmente esprimerebbero ("il quadrato dell'incognita aumentato dell'incognita per 8")? Pensiamo, ad esempio, a una "realtà" geometrica?
- Oppure **la trattiamo iconicamente**, applicando regole evocate dalla semplice "osservazione" della scrittura?

Un segno può contenere più componenti della classificazione peirceana: i segni dell'algebra sono "icone complesse" (Bakker & Hoffmann, 2005)

Calcolo e tabelle: *Chiu Chang*, "nove capitoli sulle arti matematiche"

- Consideriamo il **problema** seguente che riprende, con variazioni numeriche, un problema del capitolo VIII (***Fang Cheng***) del ***Chiu Chang*** (precedente al I sec.):
- Cinque covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 19 sheng. Tre covoni di grano di tipo A aggiunti a due covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 12 sheng. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?
- **Oggi** indicheremmo rispettivamente con x e con y (in sheng) i rendimenti di un covone di tipo A e di un covone di tipo B ed imposteremmo un sistema…

Il problema del *Chiu Chang* porta ad un sistema lineare

- Consideriamo il sistema di equazioni lineari costituito da:
  $$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$
- Riportiamo in una tabella i coefficienti e i termini noti.

5	3	19
3	2	12

- Operiamo ora per modificare la tabella sapendo che:

Regole: **(1)** si possono variare **in proporzione** tutti i termini delle righe e **(2)** a una riga si può sostituire la riga ottenuta **sommando** o **sottraendo i termini** corrispondenti di due righe.

Il problema del *Chiu Chang* porta ad un sistema lineare

Una possibilità è operare sulle righe per rendere uguali i primi elementi:

1	0	2
mcm = 15		
0	1	3

- moltiplichiamo la prima riga per 3,
- e la seconda per 5.
- Ora alla seconda riga sottraiamo la prima,
- moltiplichiamo questa seconda riga per 9
- e alla prima riga sottraiamo la seconda.
- Infine si divide la prima riga per 15 e la seconda per 9.

Il problema del *Chiu Chang* porta ad un sistema lineare

- Eravamo partiti da un sistema di equazioni lineari:
  $$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$
- e siamo pervenuti alla sua soluzione:
  $$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

1	0	**2**
0	**1**	**3**
coeff. di x	coeff. di y	rendim. (sheng)

- Un'esperienza didattica è stata realizzata nella Scuola Media (2005).

Una verifica sperimentale nella Scuola Media

- Descriveremo sinteticamente alcuni risultati di un'esperienza didattica condotta in una **classe I media** (allievi di 11-12 anni) a Treviso.
- Al momento dell'esperienza gli allievi **non avevano trattato i numeri negativi né le equazioni**. Solo alcuni di essi avevano qualche esperienza (risalente alla scuola primaria) con esercizi del tipo: "indovina un numero sapendo che…"
- L'esperienza si è svolta in aula, durante un'ora di lezione, alla presenza dell'insegnante di matematica e dello sperimentatore (che non è mai intervenuto).

Una verifica sperimentale nella Scuola Media

- Era stata precedentemente introdotta alla classe la **rappresentazione dei numeri con le bacchette**; gli allievi hanno avuto occasione di esercitarsi.
- In una **tabella corredata con etichette**, realizzata su di un banco, era stato poi rappresentato il problema: “due pacchetti uguali contengono, in tutto, quattro biscotti. Quanti biscotti ci sono in ciascun pacchetto?”
- Era stato poi mostrato che dividendo per 2 i numeri in tutte le caselle della tabella si ottiene la soluzione.

I	II
pacchetti	biscotti

Una verifica sperimentale nella Scuola Media

- Gli allievi sono stati suddivisi in sei gruppi di tre.
- Durante la risoluzione, il ruolo dell’insegnante è stato di controllo (passando tra i vari gruppi): ha segnalato eventuali errori, ma non ha dato suggerimenti.

Problema, ispirato al *Chiu Chang*

Cinque covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 19 sheng. Tre covoni di grano di tipo A aggiunti a due covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 12 sheng. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?

Una verifica sperimentale nella Scuola Media

- Riassumiamo il procedimento.
- Significativi sono alcuni **ampi gesti con le mani**: **“adesso posso fare questi meno quelli”** (indicando le righe).
- Indicativa, inoltre, è una frase pronunciata da F. (l’allieva che ha più attivamente collaborato con S.): **“Si riesce quando due diventano uguali”**.

I		II
covoni tipo A	covoni tipo B	grano
	I	III

Una verifica sperimentale nella Scuola Media

- Dunque S. e F. **hanno utilizzato solamente la regola che consente di sottrarre una riga dall’altra**.
- Ma tale modo di procedere **non è sempre applicabile** (gli allievi **non** avevano trattato i numeri negativi).
- Allo stesso gruppo è stato proposto **un altro problema**:
- Quattro covoni di grano di tipo A aggiunti a un covone di grano di tipo B hanno il rendimento di 6 sheng. Due covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 8 sheng. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?

Una verifica sperimentale nella Scuola Media

- Ecco un breve cenno alla risoluzione.
- Dopo una fase di perplessità (**“non si può togliere questi da quelli, non ce ne sono abbastanza”**), S. applicherà la regola che consente di moltiplicare gli elementi di una riga per k>0 (in questo caso: la prima riga per k = 3).
- F. ribadisce: **“Sì, sì, bisogna far diventare questo… …uguale a questi!”** e il procedimento può proseguire.

I		I
covoni tipo A	covoni tipo B	grano
	I	II

C’è l’aspetto iconico, ma anche la componente indicale

Una componente indicale, legata alla concretezza, in questo caso è prevalente

- L’uso frequente di **espressioni deittiche** (“questi”, “quelli”) accompagnato dalla **marcata fase gestuale** ci sembra interessante (come evidenziato ad esempio in: Steinbring, 2002).
- Le allieve hanno preferito la “regola” (artefatto secondario) più direttamente **legata alla presenza fisica dei bastoncini (“fare questi meno quelli”)**.
- Il ricorso all’altra “regola” è stato suggerito dalla possibilità di applicare la “regola della sottrazione” (infatti **“si riesce quando due diventano uguali”**).

Riflessioni sull'algebra cinese
Diagrammi e gioco

- La rappresentazione ottenuta con le bacchette sulla tavola da calcolo è costituita da un complesso di segni, relazioni spaziali, regole incorporate.
- **È qualcosa che porta a costruire il (un) linguaggio algebrico?**
- Il linguaggio algebrico è specifico e difficilmente può essere costruito in modo "spontaneo": ha richiesto millenni, nella storia della nostra disciplina… (P. Boero, intervento a Rimini 2008).

Riflessioni sull'algebra cinese
Diagrammi e gioco

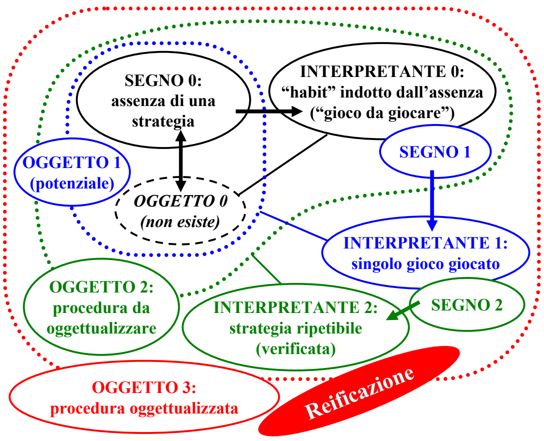
- Gli allievi si accostano alla rappresentazione ottenuta come ad un gioco.
- Dunque **potrebbe essere il gioco stesso (che, per l'allievo, è dotato di significato in quanto "gioco nuovo") a conferire significato al procedimento.**
- Del resto **"per esprimere le relazioni algebriche non sono sempre indispensabili i tipici segni dell'algebra"** (Steinbring, 2002, p. 20).

Riflessioni sull'algebra cinese
Diagrammi e gioco

- L'aspetto fondamentale è l'approccio alle regole di elaborazione delle tabelle.
- Gli allievi applicano delle regole "grafiche", **fortemente legate alla disposizione (iconica)** degli elementi nello spazio della tavola da calcolo.
- Con Peirce ripetiamo: «una proprietà altamente distintiva dell'icona è che **attraverso osservazione diretta di essa si possono scoprire riguardo al suo oggetto verità nuove oltre a quelle sufficienti a determinare la costruzione dell'icona stessa**».
- E non dimentichiamo la concretezza dell'indice: nel contesto cinese i numeri erano espressi da **bacchette!**

Segni e interpreti
Ricordiamo quanto sopra notato

- **Uno stesso segno può essere interpretato** in modi diversi: può essere attribuita maggiore o minore importanza agli aspetti iconici, indicali, simbolici (il **ground** può essere ben diverso…).
- **Ciò dipende dal segno, ma anche da chi è chiamato a interpretare,** dai contesti socio–culturale che hanno alle spalle i nostri allievi.
- **Da ciò dipende il comportamento degli allievi,** il loro apprendimento.
- Ciò non deve essere trascurato anche in relazione a situazioni di interculturalità: potrebbe essere **un'occasione perduta per tutti** gli studenti…



Sommario
Parte IV
Dall'assenza alla presenza

- **Dialettica assenza–presenza: la lezione di Hegel**
- **Esempio. Torniamo a Bombelli**
- **Esempio. Bacchette da calcolo e mezzi semiotici di oggettificazione**
- **Verso una conclusione: la catena e i segni (oltre Peirce)**

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)

Riprendiamo criticamente Sfard: il ruolo del contesto culturale

- A. Sfard ha pubblicato (New York, 2008) *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*, Cambridge Un. Press.
- Il volume è interessante e si stacca dai precedenti approcci dell'Autrice (1991, 1998), tenendo conto di alcune posizioni del "secondo" Wittgenstein.
- Tuttavia Sfard descrive ancora la reificazione di processi discorsivi "pensando al contenuto matematico", piuttosto che al ruolo degli individui. **La conoscenza prodotta sembra essere in qualche modo il riflesso di un sapere "pre–esistente", senza una chiara connessione alla cultura.**

Riprendiamo criticamente Peirce: il ruolo del contesto culturale

- Torniamo a Peirce. Egli ha ragione quando afferma che il significato si connette in qualche modo all'esperienza. Ma il suo concetto di conoscenza **risente del punto di vista di un singolo, "in prima persona".**
- La comunità, secondo Peirce, è definita dalla *comune logica* (CP 5.354). **Esiste una comunità di persone pensanti in quanto esiste una logica oggettiva.**
- Secondo Peirce, quindi, noi viviamo in un mondo i cui oggetti sono intelligibili e semioticamente conoscibili, sebbene per conoscerli dobbiamo impegnarci in un processo di semiosi illimitata…

Riprendiamo criticamente Peirce il ruolo del contesto culturale

- …tuttavia a dispetto dell'accento posto sulla pratica, il pragmatismo di Peirce «è del tutto razionalistico» (Smith, 1983, p. 49). L'individuo è una sorta di astrazione: **l'essere umano, per Peirce, non è un prodotto della storia e della cultura, né lo è la sua conoscenza del mondo** (seguo: Radford, 2006).
- Ma la natura culturale del linguaggio ci fa notare che **l'interpretazione non può ridursi a un atto in cui *qualcuno* (il soggetto) si riferisce a *qualcosa* (l'oggetto).** Ciò causerebbe una deriva solipsistica in contrasto con la presenza di oggetti ideali in una rete di categorie culturali (Luria, 1984, p. 62).

Riprendiamo criticamente Peirce: il ruolo del contesto culturale

- Nell'ottica semiotico–culturale, l'interpretazione è **personale** (esperienza) **e culturale** (mezzi semiotici).
- **La conoscenza è il prodotto di una** ***prassi mediata cognitivo–riflessiva*** (plenaria Radford, CERME–6):
- **mediata**: ruolo mezzi semiotici di oggettificazione.
- **cognitiva**: oggetto e modalità della conoscenza risentono di processi di costruzione di significato e del tipo di razionalità.
- **riflessiva**: cognizione è riflessione sul mondo che si esplica nell'attività degli individui (Ilyenkov, 1977).

Riprendiamo criticamente Peirce: il ruolo del contesto culturale

- Per Radford ed Empey, «gli oggetti matematici non sono entità preesistenti, bensì **oggetti concettuali generati nel corso dell'attività umana»**.
- E «la matematica è più di una forma di produzione del sapere – una pratica di teorizzazione. **Se le persone creano la matematica, viceversa, la matematica influenza i modi di essere, di vivere e di pensare delle persone»,** cioè «crea le condizioni per il sorgere di certe forme di soggettività e di comprensione» (Radford & Empey, 2007, p. 250).

Ancora uno spunto di Heidegger

- Secondo Heidegger (*Wegmarken*, ma 1927) possiamo considerare due tipi di scienza: **la pura scienza dell'essere** (filosofia) **e le "scienze positive":**
- «Ci sono necessariamente due possibilità fondamentali di scienza: scienze degli enti o scienze ontiche e *la* scienza dell'essere o scienza ontologica, la filosofia. Le scienze ontiche hanno sempre per tema un ente dato che in un certo modo è già sempre svelato *prima* dello svelamento scientifico. **Le scienze di un ente dato, di un positum, noi le chiamiamo scienze positive»** (Heidegger, 1987).
- Per considerare la matematica come una scienza positiva, **è necessario precisarne il** ***positum*.**

Dal *positum* alla matematica
Un’ipotesi per un percorso

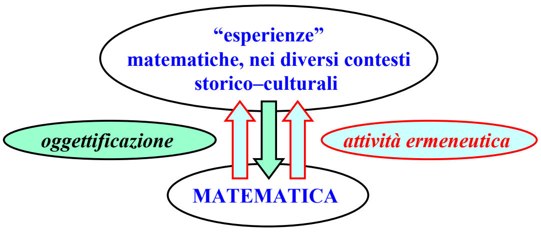
- Come prima possibilità, potremmo identificare il *positum* della matematica con le **“esperienze matematiche”** (cioè con attività storicamente e culturalmente collocate i cui oggetti, metodi e scopi siano inquadrabili in un sistema di pensiero teorico detto “matematica”).
- Ma in questo caso la “matematica” stessa sarebbe parte di tali esperienze, **con una progressiva articolazione storica e culturale** (Heidegger, 1987).
- E facendo riferimento a una concezione di matematica che varia nella storia e nelle culture le esperienze dovrebbero essere **“oggettificate”.**

Dal *positum* alla matematica
Un’ipotesi per un percorso

- È inoltre necessario interrogarsi sul significato del termine ***oggetto.***
- Per Kant l’oggetto è ciò che esiste e *sta di fronte* (*Gegenstand*) nell’esperienza delle scienze naturali. Tuttavia non ogni cosa che *sta di fronte* è un oggetto: ad esempio il “dovere morale” non lo è, e quando riflettiamo su di esso (pensando e parlando) non ne realizziamo un’oggettificazione.
- Più in generale, dunque, **l’esperienza di qualcosa in senso lato non può essere comunque collegata (soltanto!) a una forma di oggettificazione** (Heidegger, 1987, p. 29).

Dal *positum* alla matematica
Un’ipotesi per un percorso

- Bisogna dunque precisare in termini più dettagliati il passaggio dal *positum* alla matematica propriamente detta: è **soltanto un’oggettificazione?**

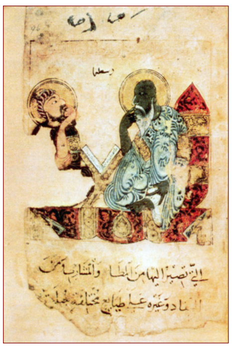


Dal *positum* alla matematica
Un’ipotesi per un percorso

- Un percorso che tenga conto dell’attività ermeneutica del soggetto può essere:
- **(I) Un’esigenza porta all’organizzazione di una prassi sociale** (una “esperienza matematica”, storicamente collocata, collegata alla forma di razionalità di una cultura).
- **(II) Tale prassi sociale viene espressa e manipolata semioticamente,** dunque mediata da linguaggi, segni, interazioni, artefatti.
- **(III) Ciò porta alla sua concettualizzazione,** dunque alla nascita di un elemento del sapere matematico (che però non deve intendersi in termini troppo oggettivi).

Dal *positum* alla matematica
Un’ipotesi per un percorso

- Questo schema non deve interpretarsi in termini definitivi, “bloccati”.
- **Il processo può ripetersi,** ad esempio se **altre esigenze** si manifestano in **contesti culturali nuovi.**
- Un elemento del sapere matematico può essere ripreso e portare a nuove concettualizzazioni.



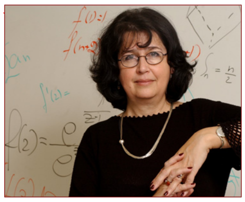
Dal *positum* alla matematica
Un’ipotesi per un percorso

- **Importante:** tutto ciò è vicino alla **filogenesi**. Ad esempio, l’algebra si sviluppa in una *co–evoluzione* (J.-P. Drouhard) che coinvolge problemi numerici, sistemi di rappresentazione e approcci strutturali.
- **Ma in ambito didattico** le cose cambiano: molte ricerche sono dedicate ai rapporti aritmetica–algebra.
- Dal punto di vista **ontogenetico** bisogna sottolineare il potere di trasformazione della conoscenza che agisce sia sull’oggetto che sul soggetto (Radford, 2008). **La relazione dialettica tra essi ci ha portato a dire che l’apprendimento è un processo di oggettificazione (*knowing*) e di soggettificazione (*being*).**

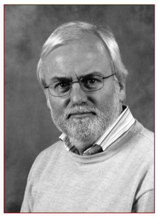
Per “concludere”… una critica

- Dunque quanto visto **non intende limitarsi a speculazioni**, ma deve essere applicato nella didattica.
- Scrive criticamente **Anna Sfard** (2008, p. xiv):
  «I seguaci socioculturalisti di Vygotskij non riescono a **comunicare le loro ricche idee in modo abbastanza chiaro da far sorgere un programma di studi ben definito.** L’incapacità di cogliere la complessità dei fenomeni umani può essere una questione di inadeguatezza dei nostri metodi analitici, una debolezza che, in assenza di definizioni esplicite e operative, sembra incurabile. […] Senza definizioni chiare si resta in balia delle metafore, di concetti creati per trasferire termini familiari in territori sconosciuti».

Per “concludere”…



- **Accetto tale critica**: uno stimolo per proseguire!
- Come ricordo la grande “reaction” (platonistica) alla plenaria di Radford da parte di **Heinz Steinbring**…



- …il quale evidenzia il ruolo della **comunicazione** (e in ciò ricorda la ***commognition***, «una combinazione di ***communication*** e ***cognition***: la comunicazione interpersonale e il pensiero individuale sono aspetti dello stesso fenomeno»: A. Sfard).

Per “concludere”…

- La mia “conclusione” è ancora generale: rivaluta **una posizione attiva del discente,** il quale nel fondamentale momento interpretativo, una fase che si rinnova continuamente,
  – costruisce un senso al sapere in gioco
  – e viene influenzato da tale sapere.
- E l’insegnante è una figura chiave a tale proposito: deve infatti seguire questa fase delicatissima con la necessaria consapevole prudenza.
- **Interpretare, quindi,**
  – per *costruire* (*knowing*)
  – e per *vivere* (*being*)
  il senso di un sapere.

Per “concludere”…

- Anche la matematica può insomma impostarsi su di un approccio ermeneutico: è un’**attività umana**, non l’accesso a una (o “alla”) Verità.
- **La matematica può certamente collegarsi al mondo reale; ma la matematica non “è la Verità”** (seguendo ancora idealmente Rorty).
- Il fatto che una proposizione venga classificata “vera” non significa che essa corrisponda…
- **…a qualcosa di vero, di assoluto, di bello che si trova “là fuori”.**

Per “concludere”…

- **A mio avviso, considerazioni come queste non devono (non possono) avere la pretesa di essere “conclusive”.**
- Chiudiamo dunque la nostra riflessione citando la serena espressione con cui **Gadamer** chiuse il poscritto all’edizione 1972 del proprio *Verità e metodo*:
  «Un cattivo ermeneuta è colui che si illude di dover avere l’ultima parola»

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)

A tutti grazie dell’attenzione

«Un cattivo ermeneuta è colui che si illude di dover avere l’ultima parola»