Rimini, Seminario Nazionale 2009

Interpretazione e didattica della matematica
Una prospettiva ermeneutica

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario
Parte III
Categorie faneroscopiche

- **Ragionamento teorematico e ragionamento corollariale**
- **Esempio. Geometria e triangoli di cartone**
- **Esempio. Il "meccanismo" di Wittgenstein**
- **Strumenti iconicamente consistenti**

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)

Tre categorie "faneroscopiche" (o fenomenologiche – da φανερόν)

- Peirce introduce le categorie della **primità, secondità** e **terzità** che riprendono le categorie kantiane
  – della possibilità,
  – dell'esistenza,
  – della necessità,
  anche se assumono una portata più vasta.
- In Peirce sono nello stesso tempo **modalità in cui si organizza la nostra attività conoscitiva e categorie della realtà.**
- Sono categorie che ritroviamo a ogni livello del reale, della nostra esperienza e delle scienze.

Tre categorie "faneroscopiche" (o fenomenologiche – da φανερόν)

- La **Primità** come categoria dell'esperienza è un *feeling*, non ancora individuato come appartenente a un ben preciso esistente. È la categoria del presente immediato, dell'immediatamente dato.
- La **Secondità** è collegata a ciò che accade e che quasi vincola il soggetto. È la categoria dell'appena percepito, dunque del passato.
- La **Terzità** riprende la mediazione, l'interpretazione, la ragione; sintetizza gli aspetti precedenti (pura qualità e fatto), ma non si riduce ad essi. Può collegarsi al futuro, in quanto una finalità influisce sull'azione con la mediazione della coscienza.

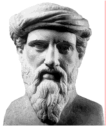
Matematica e segni nella semiotica peirceana

- **L'icona si collega alla primità, l'indice alla secondità, il simbolo alla terzità.**
- **Il simbolo ha un ruolo molto importante: è un segno convenzionale che denota l'oggetto in virtù di una relazione di carattere mentale.** Esso si collega al contesto culturale in cui è elaborato (e interpretato) e possiede un'intrinseca significazione cognitiva di cui le icone e gli indici sono privi.
- **Il simbolo si basa però essenzialmente sull'aspetto convenzionale**, che non rispecchia l'**universalità** e la **certezza** dell'**inferenza matematica.**

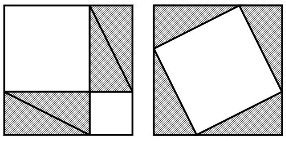
Una fase iconica tra due momenti simbolici?

- Il diagramma ha le caratteristiche di un'icona, ma **dovrà associarsi (come ogni segno) a un interpretante** e questo è **simbolico ed è generale**:
  – il diagramma-icona **è interpretante dell'enunciato simbolico** che traduce secondo alcune convenzioni (un'intenzione, dice Peirce);
  – questo diagamma-icona **determina infine un nuovo interpretante simbolico e universale** quando è recepito alla luce della stessa intenzione.
- L'aspetto didattico può collocarsi in questo quadro teorico con caratteristiche specifiche: **il ruolo dell'indice potrà essere rivalutato didatticamente.**

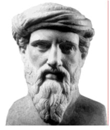
Una fase iconica
tra due momenti simbolici?

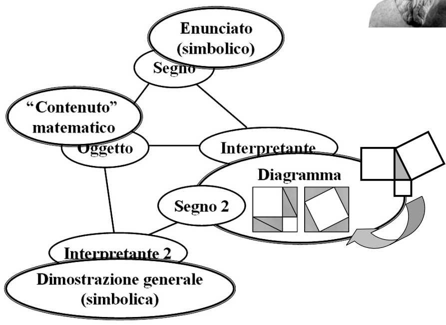


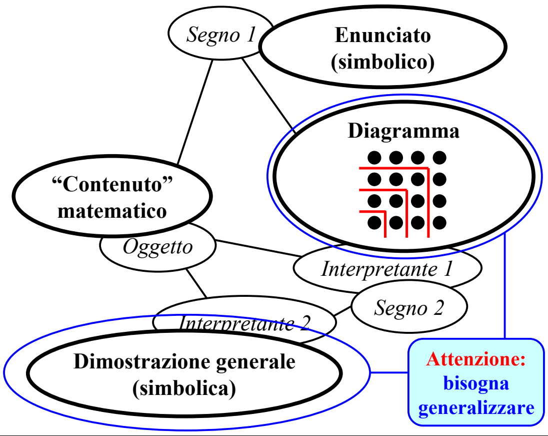
- Consideriamo il teorema di Pitagora:
- **Enunciato** (universale): in **ogni** triangolo rettangolo il quadrato costruito sull’ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.
- Da qui passiamo ad un **interpretante iconico…**
- **Diagramma:** il quadrato a sinistra e il quadrato a destra sono congruenti e il confronto delle loro scomposizioni verificare il teorema **(per questo caso).**

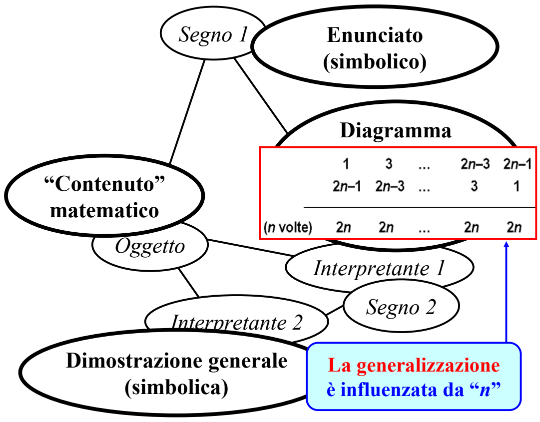


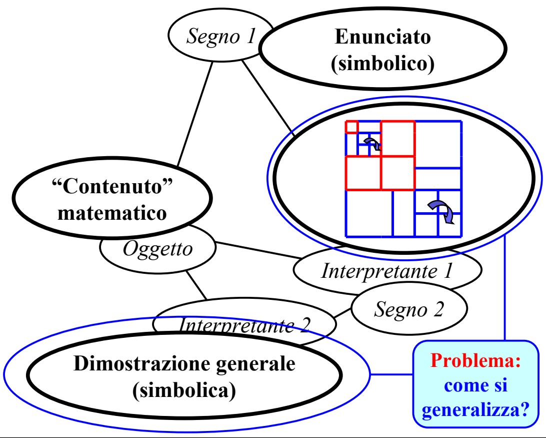
Una fase iconica
tra due momenti simbolici?











Una fase iconica
tra due momenti simbolici?

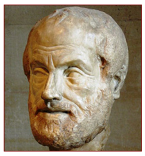
- Anticipiamo delle considerazioni che riprenderemo:
  - **Uno stesso segno può essere interpretato** in modi diversi: può essere attribuita maggiore o minore importanza agli aspetti iconici, indicali, simbolici.
  - **Ciò dipende dal segno, ma anche da chi è chiamato a interpretare,** dai contesti socio–culturali che hanno alle spalle i nostri allievi (problema che supera l’ambiente scolastico).
  - **Da ciò dipende il comportamento degli allievi,** il loro apprendimento.
- Vedremo alcuni esempi e l’analisi semiotica di una situazione di insegnamento–apprendimento.

Sommario
Parte III
Categorie faneroscopiche

- **Ragionamento teorematico e ragionamento corollariale**
- **Esempio. Geometria e triangoli di cartone**
- **Esempio. Il “meccanismo” di Wittgenstein**
- **Strumenti iconicamente consistenti**

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)

A lezione di geometria da Aristotele

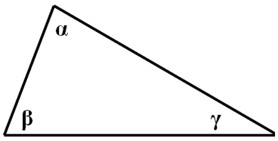


- **Aristotele** afferma che «i teoremi di geometria si dimostrano per mezzo dell’atto, infatti si dimostrano operando delle divisioni nelle figure. Se queste divisioni fossero già operate, quei teoremi sarebbero immediatamente evidenti; invece sono contenute nelle figure solo in potenza». (*Metafisica* Θ 9, 1051 a 21-27) e quindi:
- **«Perché gli angoli del triangolo assommano a due retti?** Perché gli angoli intorno a un punto su di una retta sono due retti. Se, infatti, fosse già tracciata la parallela ad un lato del triangolo, alla semplice visione la cosa risulterebbe immediatamente evidente».

A lezione di geometria da Aristotele

Prova 1

- Aristotele fa riferimento a questa figura:

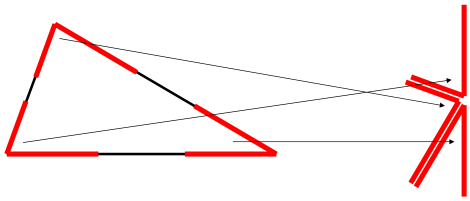


- **Intervenendo creativamente** la dimostrazione risulta semplice, ricordando le congruenze degli angoli alterni interni e degli angoli corrispondenti formati da una coppia di parallele tagliate da una trasversale.

Aristotele nella pratica didattica

Prova 2

- Ma torniamo al triangolo e operiamo qualche taglio…

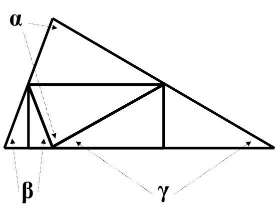


- Dopo aver ritagliato i tre angoli del triangolo (riprodotto ad esempio in cartoncino) possiamo **collocarli in modo di formare un angolo piatto.**

Aristotele nella pratica didattica

Prova 3

- In alternativa, eseguiamo alcune **piegature**:

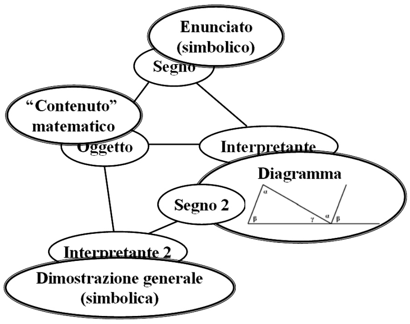


possiamo parlare, in questo caso e nel caso precedente, di una vera e propria “dimostrazione”?
Oppure si tratta di verifiche di “casi particolari”?

- Esamineremo ora i procedimenti schematizzati **in un’ottica peirceana:** quali sono, ad esempio, le differenze?

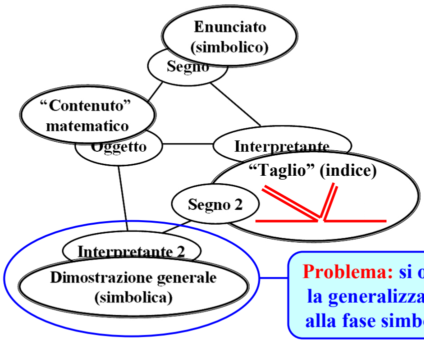
Un’analisi semiotica nella pratica didattica

Prova 1



Un'analisi semiotica nella pratica didattica

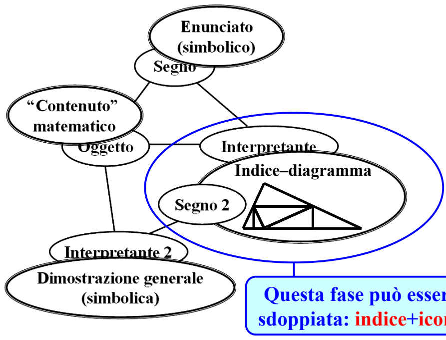
Prova 2



Problema: si ottiene la generalizzazione alla fase simbolica?

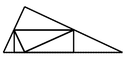
Un'analisi semiotica nella pratica didattica

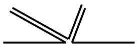
Prova 3



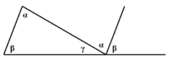
Questa fase può essere sdoppiata: indice+icona

Ma a quali allievi ci rivolgiamo? In quali famiglie, in quali contesti socio–culturali (anche fuori dalla scuola) vivono?

- Diverse strategie risolutive, basate su diverse impostazioni semiotiche, **fanno diversamente ricorso al "coinvolgimento creativo" dell'allievo** (P. Boero, intervento a Rimini 2008).
- Ad esempio, la dimostrazione "mista" 

  e più ancora quella indicale 

  "coinvolgono" l'allievo in termini ben diversi di quanto non faccia la dimostrazione "aristotelica"



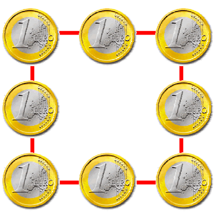
che appare dunque **impositiva,** non "critica" ma calata dall'alto.

Sommario
Parte III
Categorie faneroscopiche

- **Ragionamento teorematico e ragionamento corollariale**
- **Esempio. Geometria e triangoli di cartone**
- **Esempio. Il "meccanismo" di Wittgenstein**
- **Strumenti iconicamente consistenti**

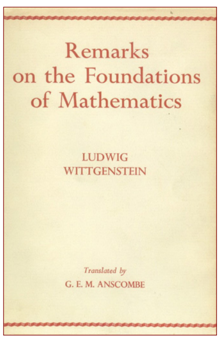
Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)

Per ricordare il ruolo dell'indicalità giochiamo con alcune monete…

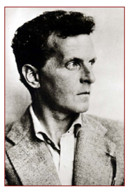


- Disponiamo le monete in modo che ogni lato del quadrato ne comprenda tre.
- Come possiamo fare per formare con le stesse monete un quadrato con **quattro monete per lato?**
- Se consideriamo le monete come dei **"punti–posizione"** (primità) l'esercizio è impossibile.
- Considerandole **concretamente…**

In alcuni passi delle *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica…*



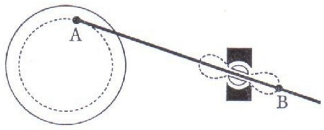
- …opera pubblicata (1956) postuma cinquantun anni fa, Ludwig Wittgenstein descrive un dispositivo meccanico **mediante il quale è possibile "suggerire" la dimostrazione di una proposizione.**



- Un primo accenno è nella **III parte:** «supponiamo che io abbia davanti a me le fasi del movimento di

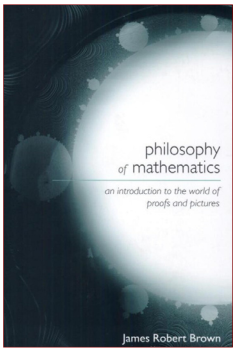
sotto forma di immagine. **Questo mi aiuta a formulare una proposizione che io ricavo, per così dire, dalla lettura di quest'immagine.** […] È strano che dalla lettura di un'*immagine* si debba poter ricavare una proposizione. Tuttavia la proposizione non tratta dell'immagine che io vedo. Non dice che in quest'immagine si può vedere questo e quest'altro. Ma non dice nemmeno che cosa farà il meccanismo reale, per quanto lo faccia capire».

- E nella **V parte:** «considera un meccanismo.



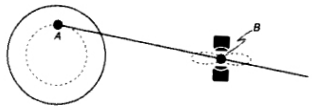
Mentre A descrive un cerchio, B descrive una figura a forma di otto. Questa proposizione la scriviamo come una proposizione della cinematica. **Mettendo in moto il meccanismo, il suo movimento mi prova la proposizione,** come farebbe una costruzione disegnata sulla carta. La proposizione corrisponde, poniamo, a un'immagine del meccanismo in cui siano disegnate le traiettorie descritte dai punti A e B. Dunque, per un certo aspetto, la proposizione è un'immagine di quel movimento».

Ma non tutti hanno apprezzato il meccanismo di Wittgenstein…

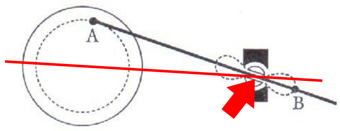


- Tra il funzionamento fisico e la proposizione matematica si colloca dunque **la mediazione della rappresentazione** visuale…
- e proprio questo collegamento può essere discusso in termini critici, come fa brillantemente **James Robert Brown.**

- **Una figura "corretta"** (per Brown) sarebbe simile a:

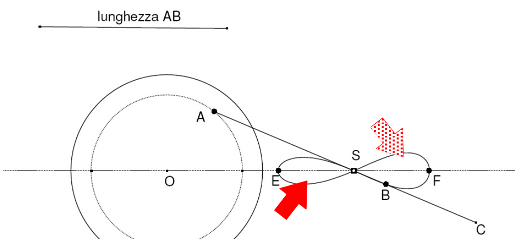


- – la figura descritta da B dovrebbe risultare **simmetrica** rispetto



alla retta passante per il centro del cerchio e per il punto per il quale AB è vincolato a passare;
- – inoltre, quando A si trova nella posizione indicata, «B, invece di essere disegnato nella posizione a destra, dovrebbe trovarsi **al centro**» della figura "a otto".

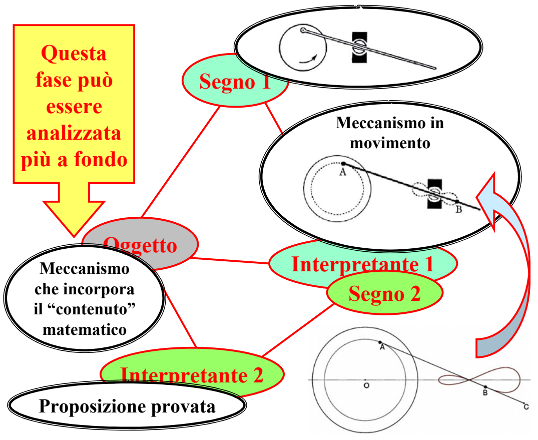
- Non possiamo ottenere una "figure-eight" **simmetrica** rispetto al punto S; una figura… quasi simmetrica è:

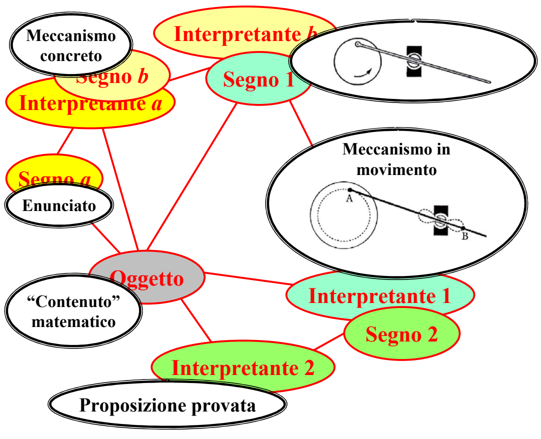


(dove ES=SF, ma la parte destra…
… è più estesa della sinistra).

Una critica alle conclusioni di Brown

- Brown conclude che **«non è necessario che il disegno sia accurato; esso deve solamente condurre al senso», platonisticamente inteso.**
- A parte la datazione dei paragrafi, nella parte III si parla dell'immagine come di un **aiuto a formulare una proposizione**, ed essa **«non dice nemmeno che cosa farà il meccanismo reale, per quanto lo faccia capire» (Brown si limita a questo?)**
- Ma nell'ultima parte si passa **dal "suggerimento" dato dall'immagine alla concreta "messa in moto" del meccanismo!**

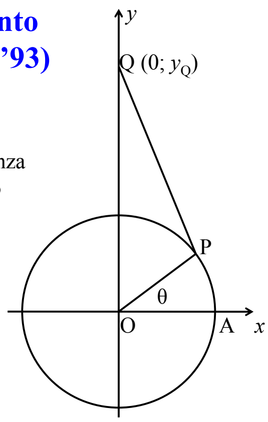




Problema (uno spunto dalla maturità '92–'93)

Prima versione

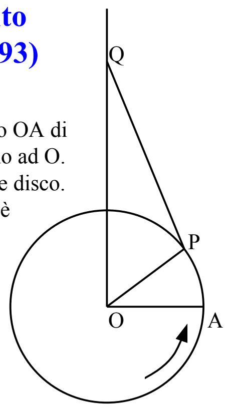
- Il punto P (cosθ; senθ) appartiene alla circonferenza di centro O (0; 0) e raggio OA con A (1; 0). Il punto Q (0; y_Q) appartiene al semiasse maggiore delle ordinate e PQ è il doppio del raggio. **Determinare il massimo e il minimo assunti da y_Q al variare di θ.**



Problema (uno spunto dalla maturità '92–'93)

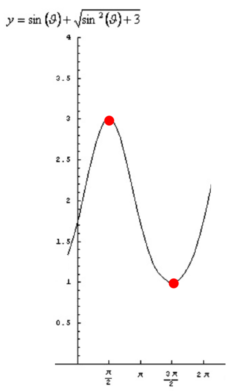
Seconda versione

- Il disco di centro O e raggio OA di misura unitaria ruota intorno ad O. P appartiene al bordo di tale disco. Una semiretta di origine O è perpendicolare a OA. Una sbarra PQ è lunga il doppio del raggio e Q è vincolato a muoversi sulla semiretta data. **Trovare i valori massimo e minimo assunti da OQ.**



Qual è il comportamento degli allievi?

- Risolvendo il problema nella prima versione, gli allievi (studenti di 5° anno del Liceo Scientifico) tendono **a ricavare e a studiare la funzione** $y = \sin\theta + (\sin^2\theta + 3)^{1/2}$
- Tale funzione è:
  - massima per θ = π/2 e in tale caso risulta $y = 3$
  - minima per θ = 3π/2 e in tale caso risulta $y = 1$



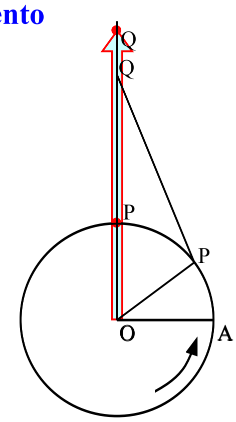
Qual è il comportamento degli allievi?

- Il precedente procedimento viene spesso eluso quando la risoluzione si riferisce alla seconda versione della traccia. [Geogebra]
- In tale caso molti allievi danno le risposte:

  $y_{max} = 3$

  $y_{min} = 1$

  senza **ricorrere allo studio di funzione (superfluo).**



Qual è il comportamento degli allievi?

- Naturalmente è importante considerare l'influenza del **contratto didattico**: nella prima versione, la presenza di un riferimento cartesiano, l'indicazione della variabile θ e della funzione $f(\theta)$ inducono gli allievi a inquadrare il problema come un tradizionale "studio di funzione".
- È peraltro interessante osservare che il riferimento ad un "disco" rotante, dunque ad un meccanismo concreto, svincola gli allievi dall'applicazione di **una procedura sostanzialmente non necessaria.**
- **La secondità si rivela didatticamente utile…**

Un costrutto teorico di Chevallard: tenore matematico *vs.* valore aggiunto

- La considerazione di una **prospettiva indicale** può utilmente riflettersi in un costrutto teorico introdotto da Yves Chevallard (1989) che scrive (trad. nostra): «La quantità di matematica cristallizzata presente in un oggetto è precisamente quanto io chiamo **grado (o contenuto, o tenore) matematico di tale oggetto».**
- Al *tenore matematico* dell'oggetto si affianca il *valore* di esso, la quota di attività e tempo necessaria per utilizzare tale oggetto; spesso «mentre il grado degli strumenti matematici aumenta, il loro valore matematico […] diminuisce».

Un costrutto teorico di Chevallard: tenore matematico *vs.* valore aggiunto

- Questo duplice processo (anche dal punto di vista storico e sociale, suggerisce Chevallard) porta a una progressiva «"semplificazione" degli oggetti matematici, consistente nell'incorporare in essi (esplicita) matematica, ovvero nel mutare matematica "viva" in matematica morta, cristallizzata».
- Dal punto di vista didattico, **il ricorso all'indicalità può essere considerato un tentativo di utilizzare uno strumento con un minore grado matematico.**
- Ciò può avere aspetti degni di nota…

Un costrutto teorico di Chevallard: tenore matematico *vs.* valore aggiunto

- Innanzitutto il ricorso a uno strumento dal grado matematico (troppo) elevato può comportare un inutile approfondimento della trattazione (nel caso visto, lo studio di funzione appare "sovradimensionato" rispetto a quanto richiesto dalla traccia).
- Se si fa poi riferimento a una certa attività matematica, è plausibile supporre che una risoluzione con uno strumento caratterizzato da un **minore grado matematico** richieda un **maggiore "valore aggiunto" da parte dell'operatore.**
- Ad esempio…

Un costrutto teorico di Chevallard: tenore matematico *vs.* valore aggiunto

- Un allievo chiamato a cercare le soluzioni reali dell'equazione (di secondo grado):

  $$(x+1)^2 + 4 = 0$$

  può:

  (1) ricondurre l'equazione data alla "forma canonica" e procedere con la "formula risolutiva" generale: $x_{1,2} = [-b\pm(b^2-4ac)]/2a$

  (2) **oppure** notare che una somma di due numeri positivi non può essere nulla… **(minore tenore matematico, maggiore "valore aggiunto").**
- Ulteriori ricerche potranno essere dedicate a ciò.

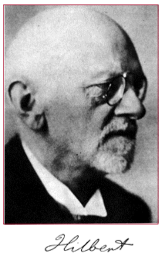
Sommario
Parte III
Categorie faneroscopiche

- **Ragionamento teorematico e ragionamento corollariale**
- **Esempio.**
  Geometria e triangoli di cartone
- **Esempio.**
  Il "meccanismo" di Wittgenstein
- **Strumenti iconicamente consistenti**

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)

“Oggetti” matematici e visualizzazione

- Spesso ad un “oggetto” matematico (concetto, definizione, strumento, procedura) è associata un’interpretazione visuale. **Sempre,** secondo Peirce!
- Agli “oggetti” della **geometria** (punto, retta, piano) vengono tradizionalmente collegate immagini ben precise…
- **…anche se Hilbert suggeriva il ricorso a sedie, tavoli e boccali da birra.**
- Questo rapporto tra “oggetto” matematico e rappresentazione visuale merita di essere approfondito.



“Oggetti” matematici e visualizzazione

- Abbiamo già visto che perfino l’**algebra**, spesso considerata tra i settori più astratti della matematica, ha per Peirce un’essenziale componente iconica.
- Date le matrici **A**($m \times p$) e **B**($p \times n$), si dice **prodotto AB** la **C**($m \times n$) tale che ogni elemento c_{ij} di **C** sia il prodotto della riga i-esima di **A** per la colonna j-esima di **B**. Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 9 & 1 \\ 6 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 3+7\cdot 6 & 2\cdot 2+7\cdot 5 & 2\cdot 9+7\cdot 8 & 2\cdot 1+7\cdot 4 \\ 3\cdot 3+4\cdot 6 & 3\cdot 2+4\cdot 5 & 3\cdot 9+4\cdot 8 & 3\cdot 1+4\cdot 4 \\ 1\cdot 3+5\cdot 6 & 1\cdot 2+5\cdot 5 & 1\cdot 9+5\cdot 8 & 1\cdot 1+5\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 39 & 74 & 30 \\ 33 & 26 & 59 & 19 \\ 33 & 27 & 49 & 21 \end{bmatrix}$$

Strumenti per il calcolo di un’area

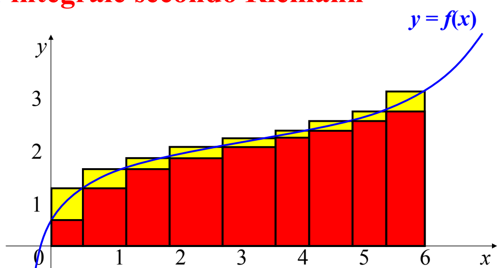
- Dopo geometria e algebra, un esempio dall’**analisi.**
- Si trovi **l’integrale secondo Riemann di f in [a; b]**

$$\int_a^b f(x)dx$$

Come sappiamo, si suddivide [a; b] in “intervallini” e si considerano le somme superiori e inferiori relative ad ogni possibile suddivisione (aree sottese dalle **“funzioni a scalini”, continue a tratti**) e si verifica la coincidenza dell’estremo sup delle somme inferiori e dell’estremo inf delle somme superiori.

- Se tali valori coincidono, la funzione in esame si dice **Riemann–integrabile in [a; b].**

L’area di parti di piano “qualsiasi”: l’integrale secondo Riemann



Così si calcola l’area sottesa dalla curva di equazione $y = f(x)$ tra $x = 0$ e $x = 6$

Qualche funzione però non è Riemann–integrabile

- Consideriamo la funzione $\chi_{[0;1]}\chi_Q$ definita in **R** che assume valore 1 se e solo se x è un reale razionale compreso tra 0 e 1 e vale 0 per ogni altro x reale.
- Si dimostra che $\chi_{[0;1]}\chi_Q$ **non è Riemann–integrabile in [0; 1]** (è “troppo discontinua”).
- Possiamo però considerare uno strumento analitico più generale: **l’integrale secondo Lebesgue.**
- L’integrazione secondo **Lebesgue** di una $x \rightarrow f(x)$ in [a; b] considera l’intervallo delle *ordinate* compreso tra l’estremo inferiore e l’estremo superiore di f in [a; b]).

Si dice *misura di Lebesgue* λ(I) di I⊆R l’estremo inferiore dell’insieme costituito dalle misure di tutti i ricoprimenti realizzati con famiglie finite o numerabili di segmenti, quando I è un insieme misurabile secondo Lebesgue

opera in esso la suddivisione:

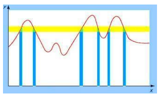
$$f(c) = f_0 \le f_1 \le f_2 \le f_3 \le f_4 \le \ldots \le f_n = f(d)$$

- Sia $\lambda(X_i)$ la **misura secondo Lebesgue** di $X_i \subseteq [a; b]$ costituito dalle controimmagini di $[f_i; f_{i+1}[$, ovvero dalle $x[a; b]$ tali che $f_i \le f(x) < f_{i+1}$
- Tenda ora a 0 dell’ampiezza del massimo intervallo $[f_i; f_{i+1}[$ (ciò comporta che $n \rightarrow +\infty$); se le somme:

$$s = \sum_{i=0}^{n} \lambda(X_i) f_i \qquad S = \sum_{i=0}^{n} \lambda(X_i) f_{i+1}$$

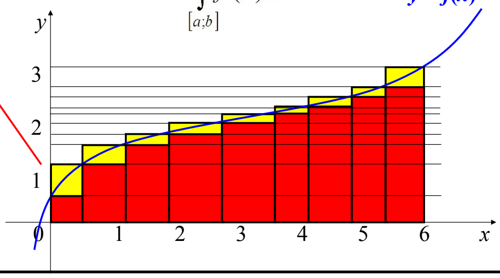
tendono ad un comune valore…

Questa **figura (nonostante la diversa costruzione) è simile alla precedente (integrale secondo Riemann)**



- …questo è detto **integrale secondo Lebesgue di f in $[a; b]$:**

$$\int_{[a;b]} f(x)d\lambda$$



Dato l'insieme I = $\{x \in R: 0 \leq x \leq 1 \wedge x \in Q\}$, si verifica che I è *misurabile secondo Lebesgue* e che $\lambda(I) = 0$

- **I grafici precedenti** e naturalmente le definizioni fanno capire che **se una funzione è Lebesgue–integrabile è anche Riemann–integrabile** e gli integrali hanno lo stesso valore.
- Consideriamo ancora la $\chi_{[0;1]}\chi_Q$ definita in tutto **R** che assume valore 1 se e solo se x è un reale razionale $0 \leq x \leq 1$ e vale 0 per ogni altro x reale.
- Abbiamo visto che essa **non è Riemann–integrabile** in [0; 1]. **È tuttavia Lebesgue–integrabile** e risulta:

$$\int_{[0;1]} \chi_{[0;1]}\chi_Q d\lambda = 0$$

Concentriamoci però su $\chi_{[0;1]}\chi_Q$

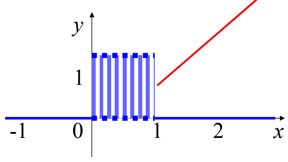
- La rappresentazione visuale di $\int_a^b f(x)dx$ non crea, in generale, problemi.

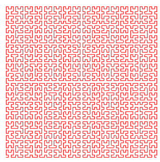
Disegni come questo sono pesantemente imprecisi dal punto di vista "iconico"!

- Ma qual è la rappresentazione visuale di

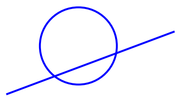
$$\int_{[0;1]} \chi_{[0;1]}\chi_Q d\lambda = 0 \ ?$$

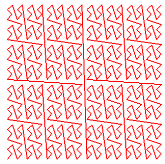
- Qual è **il grafico cartesiano** di $\chi_{[0;1]}\chi_Q$?
- **E l'area sottesa?**





Si pensi al concetto di "curva"…





ma **$\{x \in R: 0 \leq x \leq 1 \wedge x \in Q\}$ (Lebesgue**–misurabile)?

- In generale "oggetti" matematici di "livello elevato" sono meno suscettibili di un collegamento a segni di tipo iconico, sono meno **"iconicamente consistenti".**
- **Ma questa lettura è troppo semplicistica?**
- Certamente potrebbe essere interpretata nel senso di una maggiore o minore "facilità" di costruire rappresentazioni iconiche per una **(preesistente?)** conoscenza matematica…

Attenzione a un'assunzione implicita!

- **Questo è un punto essenziale:** da un lato è innegabile che l'integrale secondo Riemann sia rappresentabile iconicamente in modo assai meno problematico di quanto non accada per l'integrale secondo Lebesgue.
- Ma da un altro una simile affermazione aprirebbe questioni delicate sull'**ontologia** dei saperi matematici in gioco (esistono? e perché?) nonché sulla loro **epistemologia** (li possiamo conoscere? come? e li possiamo comunicare, insegnare?).

Spunto

Un interessante campo di indagine è lo studio della "consistenza iconica" dei contenuti nei processi di insegnamento–apprendimento

A tutti grazie dell'attenzione

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)