Rimini, Seminario Nazionale 2009

Interpretazione e didattica della matematica
Una prospettiva ermeneutica

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario
Parte II
Ragionamento diagrammatico

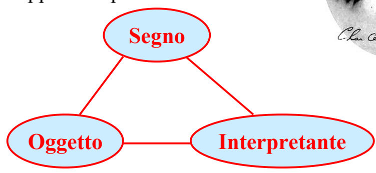
Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(***Elogio della Follia*, 39**)

Interpretare, ma che cosa?
Secondo Peirce, "tutto è segno"

- Per Sriraman & English (2006) la varietà di teorie in didattica della matematica si lega alle differenze tra le prospettive ontologiche ed epistemologiche.
- La posizione ***ontologica*** di una teoria consiste nello specificare il modo in cui essa affronta la questione della natura dei propri oggetti concettuali.
- La posizione ***epistemologica*** consiste nello specificare il modo in cui, secondo essa, questi oggetti possono (o non possono) essere conosciuti.
- L'approccio di **Charles S. Peirce** ci sarà molto utile **didatticamente** – anche se più tardi **discuteremo criticamente la sua posizione epistemologica.**

Peirce e la semiosi illimitata
Un celebre "triangolo"

- Il **triangolo semiotico** è alla base dell'approccio peirceano:



- L'**oggetto** è rappresentato da un **segno** (***icona***, ***indice*** **o** ***simbolo*** a seconda che si abbia una rassomiglianza, una connessione causale o una convenzione) e suscita un **interpretante**, cioè una reazione in chi interpreta.

Peirce e la semiosi illimitata
Un celebre "triangolo"

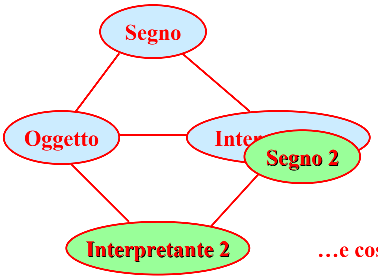
- Per Peirce il segno non fa conoscere direttamente un (nuovo) oggetto; quest'ultimo deve essere già in qualche modo accessibile all'interprete, in modo che il segno porti ulteriore informazione su di esso e susciti un interpretante.
- L'interpretante non è dunque una sorta di realtà da contemplare per comprendere il segno e quindi per conoscere l'oggetto.
- Fondamentale è **l'aspetto attivo, inferenziale**: Peirce introduce il segno come **mediazione fra l'oggetto e l'interpretante.**

Peirce e la semiosi illimitata
Un celebre "triangolo"

- Ad esempio:

Peirce e la semiosi illimitata
Un celebre "triangolo"

- Dunque l'interpretante **è a sua volta un segno** e può essere interpretato:



…e così via!

Peirce e la semiosi illimitata
Un celebre "triangolo"

- Ad esempio:

…e così via!

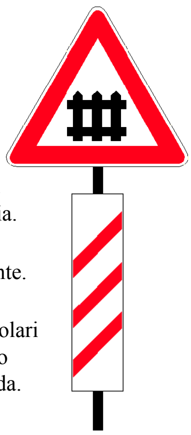
Matematica e segni
nella semiotica peirceana

- «Le parole, sebbene indubitabilmente necessarie al pensiero già sviluppato, giocano un ruolo solo secondario nel processo; mentre il **diagramma**, o icona, che può venire manipolato e sul quale si possono fare esperimenti, è importantissimo. […] A cosa servono questi diagrammi? Servono per compierci sopra esperimenti. […] **Non esiste ragionamento che non abbia la natura del ragionamento diagrammatico o matematico**; e dunque non dobbiamo ammettere alcun concetto che non sia suscettibile di venire rappresentato in forma diagrammatica» (Peirce, MS 956).

Matematica e segni:
icone, ma non solo

- «**Pure icone – così come puri indici o puri simboli – non si danno nella realtà attuale.** Esse rimangono un limite del pensiero–segno, carattere più o meno predominante in un oggetto effettivo, ma mai del tutto privo di mescolanza con le altre due entità […]
- **Un diagramma matematico è essenzialmente iconico nel suo rappresentare la configurazione relazionale** degli elementi in questione, ma necessita tuttavia di indici per ancorarsi agli elementi raffigurati, e non può prescindere da un carattere simbolico che gli permetta di proporsi quale garante di una legge generale» (Marietti, 2001, p. 36).

Un esempio elementare:
icone, ma non solo



- Il segnale di passaggio a livello: **icona, indice o simbolo?**
- **componente iconica:**
  – il cancelletto raffigurato ricorda un tratto di recinzione ferroviaria.
- **componente indicale:**
  – è realizzato in materiale riflettente.
- **componente simbolica:**
  – i segnali di pericolo sono triangolari
  – in generale, l'apparato semiotico è previsto dal Codice della Strada.
- Torniamo agli insiemi…

Sommario
Parte II
Ragionamento diagrammatico

- **La semiotica di Peirce e il ragionamento diagrammatico**
- **Esempio. Rappresentazione di insiemi e diagrammi da interpretare**
- **Esempio. Numeri e immagini**
- **Esempio. Problemi di efficienza e il metodo dei tableaux**

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)

Insiemi e diagrammi

- La presentazione didattica dei primi elementi della teoria intuitiva degli insiemi propone situazioni interessanti. Vengono utilizzati più registri:

verbali	"insieme, elemento, appartenenza, sottoinsieme, inclusione" etc.
simbolici	lettere, $\in$, $\subseteq$, $\cap$, $\cup$, $\varnothing$ etc.
visuali	diagrammi di Eulero-Venn etc.

- **Seguendo Peirce,** l'uso di simboli o termini generali può essere vicino al segno **simbolico.**
- Un diagramma di Eulero ha una componente **iconica.**
- Un esempio concreto (un sacchetto contenente alcuni oggetti) può evocare una componente **indicale.**

Introduciamo le esperienze didattiche

- La presenza di **diversi registri** è fondamentale: «Il funzionamento cognitivo della mente umana è inseparabile dall'esistenza di una varietà di registri semiotici di rappresentazione» (R. Duval).
- «I diagrammi possono avere un **ruolo evocativo** notevole, ma non sono né il concetto di insieme né quello di collezione né una loro approssimazione. […]
- Come proporre la situazione se l'elemento indicato dal punto è a sua volta una collezione? L'idea di indicare **un elemento con una regione interna** non va bene perché **fa confondere l'appartenenza con la relazione di sottocollezione**, che è tutt'altra cosa» (R. Ferro; si veda anche: Freudenthal, 1983).

Un primo esempio

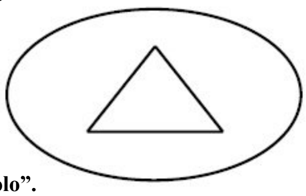
- I registri semiotici non hanno solo un ruolo pratico (consentire di risolvere esercizi), ma anche **una dimensione sociale e storica che determina, almeno in parte, il modo con cui essi ci "influenzano" quando li impieghiamo.**
- I diagrammi di Eulero–Venn *geometrizzano* la struttura predicativa delle espressioni fondamentali delle relazioni insiemistiche. Sono uno strumento didattico importante, ma possono completamente "rimpiazzare" tale struttura predicativa?
- Vedremo due case studies grazie ai quali rifletteremo sulle difficoltà incontrate dagli studenti nella distinzione dei concetti di **inclusione** e **appartenenza.**

Un primo esempio

- Presenteremo il primo case study mediante la trascrizione di un breve estratto registrato (1'.30"). Due allieve della prima classe di una Scuola Media a Treviso, S. e G. (11 anni), vengono invitate dall'insegnante a **rappresentare un insieme mediante un diagramma di Eulero–Venn.**
- Al momento dell'esperienza (avvenuta in classe, durante un'ora di lezione, ma in un'occasione non valutativa), gli allievi conoscevano le nozioni fondamentali di insieme, appartenenza, sottoinsieme nonché le rappresentazioni con i diagrammi di Eulero–Venn.
- L'insegnante scrive alla lavagna…

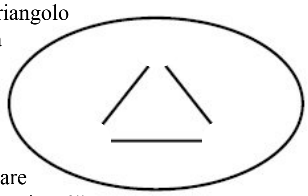
Un primo esempio

- ***Rappresentare mediante una figura l'insieme dei lati di un triangolo***
- Le due allieve, S. e G., sono alla lavagna; la prima cercherà due volte di eseguire l'esercizio, mentre G. proporrà alcuni commenti.
- S. (*disegna*): "Ecco!"
- Insegnante: "Non è sbagliato, hai fatto un bel disegno. Però potrebbe essere **un insieme con un elemento solo".**



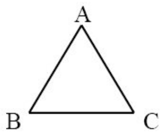
Un primo esempio

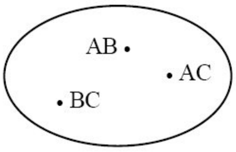
- S.: "Perché uno? Ho fatto tre lati".
- Ins.: "Sì, ma fanno parte del triangolo: è un triangolo che ti viene in mente, tutta la figura, non i tre lati".
- G.: "Eh, anch'io ci vedo il triangolo e no i tre lati!"
- S. : "E cosa devo fare? Devo romperlo?" (*Disegna*).
- G.: "No, non è un triangolo **e l'esercizio diceva triangolo".**
- Ins.: "Andava bene se si interpreta bene la figura. Provi a pensare a un'altra rappresentazione?"



Un primo esempio

- S.: “Ancora con quei disegni lì?”
- Ins.: “Sì, coi diagrammi di Eulero–Venn”.
- S. (*dopo qualche istante*): “Mm, no”.
- Insegnante: “Senti, cerco di darti un’idea. Ti ricordi che quando facciamo geometria usiamo le lettere per dare i nomi ai punti e ai lati? Proviamo anche qui. Eh, ti va?” (*Disegna le figure*).



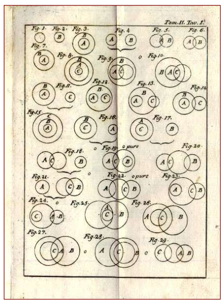


Un primo esempio

- Le tre rappresentazioni sono caratterizzate da una diversa “somiglianza” alla situazione (geometrica, ma al contempo… insiemistica) alla quale si riferiscono, **da una diversa componente iconica:**
- nella I, gli elementi dell’insieme sono *riprodotti* come **segmenti** e come **lati di un (particolare) triangolo**;
- nella II, gli elementi restano **segmenti**, ma vengono disegnati in una posizione che non corrisponde completamente a quella dei lati di un triangolo;
- nella III, gli elementi sono rappresentati da punti singoli, isolati. La loro interpretazione come segmenti e come lati di un triangolo richiede una figura esplicativa, esterna alla rappresentazione.

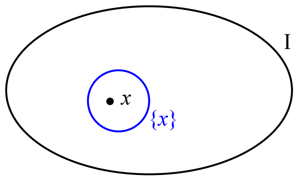
Un primo esempio

- I diagrammi di Eulero–Venn non sono solamente contenitori nei quali collocare gli elementi: ridurre tale rappresentazione a frasi come “l’elemento *a* è *nell’*insieme A”, suggerite dalla rappresentazione, può essere semplicistico.
- Inoltre si noti l’affermazione dell’insegnante secondo la quale **una rappresentazione va *interpretata*** (“La tua risposta andava bene se si interpreta bene la figura”).



Verso il secondo esempio…

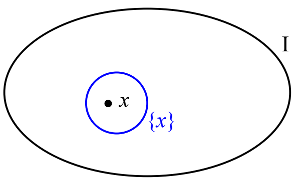
- Proseguiamo. In generale è fondamentale considerare la differenza tra:
- **appartenenza**: $x \in \mathrm{I}$
- **inclusione**: $\{x\} \subseteq \mathrm{I}$
- **appartenenza all’insieme delle parti**: $\{x\} \in \wp(\mathrm{I})$



- L’appartenenza coinvolge oggetti **di diverso genere**; l’inclusione si definisce tra oggetti **dello stesso tipo**.

Termini “delicati”

- Parlando di **“insiemi e linguaggio”,** Marchini nota:
- «I concetti matematici, spesso frutto di precisazioni e di analisi approfondite, essendo **ispirati da situazioni esperienziali**, [hanno] conservato nomi ed appellativi di uso comune; ma interpretarli in modo intuitivo può dar luogo ad errori o incomprensioni».



Un termine potenzialmente ambiguo: **“contiene”.**

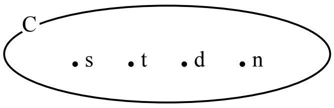
Un secondo esempio: il caso di K.

- **K.**, 15 anni, frequenta il primo anno del corso di Ginnasio-Liceo Classico (IV ginnasio, Treviso, Italia). Il suo profitto è medio–alto in tutte le materie.

  A K. erano stati introdotti (con definizioni e simboli):
- **insiemi, elementi**: «Si usa la parola *insieme* per indicare un raggruppamento, una raccolta, una collezione di *elementi*: questi possono essere oggetti, individui, simboli, numeri, figure geometriche etc. Riterremo che gli elementi di un insieme siano ben definiti e distinti tra loro. […] Generalmente gli insiemi si indicano con lettere **maiuscole;** gli elementi di un insieme si indicano con **minuscole.** La scrittura $a \in \mathrm{A}$ si legge a appartiene ad A» (*dal libro di K.*).

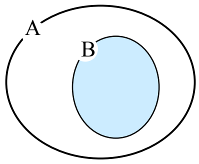
Il libro di K.

- **i diagrammi di Eulero-Venn**: «Si dà una rappresentazione geometrica: si delimita con una linea chiusa una regione del piano e si rappresentano gli elementi dell'insieme **mediante punti all'interno di tale regione** (eventualmente indicando il nome di ciascun elemento accanto al punto che lo rappresenta)».
- Riportiamo inoltre l'esempio indicato, riguardante l'insieme C delle consonanti della parola *studente*:



Il libro di K.

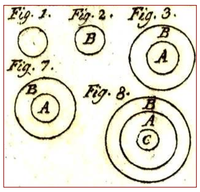
- **sottoinsiemi**: «Considerati due insiemi A e B si dice che B è un *sottoinsieme* di A quando ogni elemento di B appartiene anche ad A.
  In simboli si scrive $B \subseteq A$ che si legge B è contenuto in A o è uguale ad A o B è incluso in A o è uguale ad A» [disegno riportato].



- **insieme delle parti**: «Dato un insieme A si definisce *insieme delle parti* di A quell'insieme, indicato con $\wp(A)$, che ha per elementi tutti i possibili sottoinsiemi di A. […] In generale, se A contiene n elementi, $\wp(A)$ ha 2^n elementi».

Il libro di K.

- Oltre all'uso ambiguo di *contiene*, si noti il ricorso diverso ai diagrammi di Eulero–Venn nei due esempi:
  nel primo, gli elementi sono indicati da **singoli punti**;
  nel secondo, **tutti i punti** della parte interna sono considerati elementi (come in Eulero).

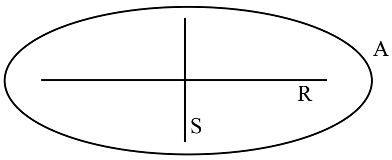


- Presenteremo la trascrizione di due brevi estratti registrati: nel primo (1'.30"), a K. viene richiesto di risolvere, alla lavagna, un esercizio. Nel secondo (1'.30"), K. riconsidererà la propria risoluzione.

Il caso di K.

- Durante un'esercitazione orale in classe (non in un'occasione di valutazione), a K. viene proposto l'**esercizio** seguente:
  I è l'insieme dei punti del piano. R è l'insieme dei punti di una retta data nel piano. S è l'insieme dei punti di una retta data nel piano perpendicolare alla precedente. A è l'insieme che ha per elementi R e S.
  A appartiene all'insieme delle parti di I?
- La traccia dell'esercizio, dettata dallo sperimentatore (che non era l'insegnante di matematica nella classe di K.), è stata scritta sulla lavagna dall'allieva, che è stata poi lasciata libera di procedere per la sua risoluzione.

Il caso di K.



- K. (senza parlare) **traccia sulla lavagna due rette perpendicolari**, che contrassegna con R e con S.
- Immediatamente dopo, K. racchiude quanto tracciato con una linea ellittica e contrassegna l'insieme ottenuto con A.

Il caso di K.

- K.: "Questo è l'insieme A". (*Rilegge velocemente la traccia dell'esercizio*). "Devo vedere se A appartiene all'insieme delle parti di I".
- K. (*dopo aver guardato lo sperimentatore*): "L'insieme delle parti di I contiene i sottoinsiemi di I. Le figure che posso disegnare sono fatte di punti, cioè tutte le figure del piano sono degli elementi dell'insieme delle parti di I".
- K. (*dopo una decina di secondi*): "A contiene le due rette (*indica le rette*) ed è una figura del piano".
- K. (*fissa lo sperimentatore*): "Dunque A è un elemento dell'insieme delle parti di I".

Il… sillogismo di K.

["L'insieme delle parti di I **contiene** sottoinsiemi J di I"].

- "Tutte le figure del piano sono degli elementi dell'insieme delle parti di I".
- "**A contiene le due rette** ed è una figura del piano".
- "Dunque A è un elemento dell'insieme delle parti di I".

K. sembra interpretare: J∈℘(I)

K. sembra interpretare: R⊆A, S⊆A

Il ragionamento sembra funzionare...

Note sul comportamento di K.

- Ma in una prima fase K. ha utilizzato il termine "contiene" con riferimento all'**appartenenza**.
- Invece nella seconda fase K. ha utilizzato il termine "contiene" con riferimento all'**inclusione**.
- **Perché?**
  Ripercorriamo la "risoluzione" con riferimento ai registri rappresentativi coinvolti:
- l'esercizio dato è **espresso verbalmente**
- subito K. traduce la situazione in **un registro visuale**
- quindi continua a riferirsi a quanto ha tracciato e parla dell'insieme A dicendo **"le due rette".**

icona, alla Peirce

simbolo, alla Peirce

Note sul comportamento di K.

Registro **simbolico** **(simbolo, P.)**

A = {R; S} (*sarebbe* giusto)

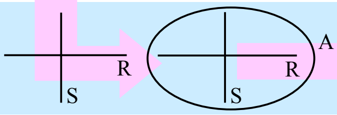
A = R∪S (sbagliato!)

Registro **verbale** **(simbolo, P.)**

R (dato)
S (dato)

A insieme che ha per elementi R e S

Registro **visuale** **(icona, P.)**



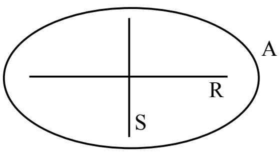
- Nota bene: K. **non** utilizza i simboli insiemistici.

Note sul comportamento di K.

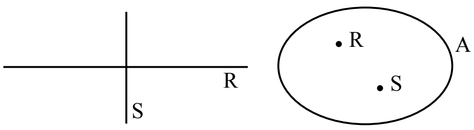
- L'uso di **un** registro visuale (segni iconici) sembra impedire a K. di apprezzare la sfumatura chiave:
  A è l'insieme che ha per elementi **i due oggetti R e S**.
- Invece K. considera la "figura" A = R∪S:
  le due rette perpendicolari considerate hanno indotto **la considerazione di una "figura unica"**.
- Sottolineiamo che si tratta di ***un*** uso del registro visuale (diverso da quello corretto dei diagrammi di Eulero-Venn!).
- In un certo senso, può essere la componente iconica a indurre una qualche difficoltà interpretativa.

Note sul comportamento di K.

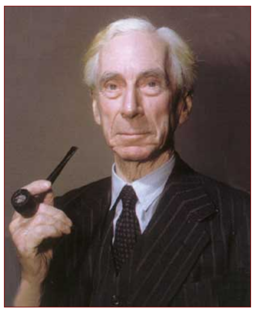
- **Questa** situazione (alla quale si riferisce K.) ha erroneamente indotto l'allieva a considerare R, S come sottoinsiemi di A.



- La seguente, **in cui il diagramma viene utilizzato con una minore componente iconica**, suggerirebbe invece l'appartenenza.



Dopo la diagnosi, la terapia…



Bertrand Russell direbbe:

- oggetti tipo 0: punti
- oggetti tipo 1: R, S
- oggetti tipo 2: ℘(I), A
  E l'appartenenza **non** può coinvolgere elementi dello stesso tipo!
- Ma il ricorso alla **Teoria dei Tipi** non appare una scelta consigliabile…
- Causerebbe problemi anche dal punto di vista didattico:
  …di che tipo è l'insieme vuoto?

Dopo la diagnosi, la terapia…

- Non ci sembra opportuno ricorrere a impostazioni concettuali particolari.
- È necessario il **controllo delle componenti iconica, indicale e simbolica dei segni impiegati**.
- Nel caso esaminato, l'uso di espressioni simboliche, se il loro significato è correttamente compreso, può risultare incisivo. Ad esempio:
- per definizione: $\{R; S\} \in \wp(I)$ significa $\{R; S\} \subseteq I$
- cioè: $R \in I$ e $S \in I$
- **nel nostro caso: ciò non è vero**
- dunque: $\{R; S\} \notin \wp(I)$.

Reazioni di K. alla terapia

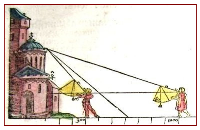
- Sperim.: "Torniamo alle definizioni che conosci". (*Cancella il disegno alla lavagna e scrive*):
  $\{R; S\} \in \wp(I)$ significa $\{R; S\} \subseteq I$ cioè $R \in I$ e $S \in I$
- Sperim.: "Adesso pensa a $R \in I$ e $S \in I$: è vero o non è vero?"
- K.: "I è il piano, R e S sono le rette" (*sta per disegnarle ancora*).
- Sperim.: "Non disegnare, stavolta, pensaci su. Hai detto che I è il piano: non puoi essere più precisa?".
- K. (*dopo alcuni secondi, rilegge la traccia*): "Cioè I è l'insieme dei punti del piano. Non è una cosa sola, è un insieme, scritto con la maiuscola".

Reazioni di K. alla terapia

- Sperim.: "Ed è un insieme di che cosa?".
- K.: "Di punti. Di punti del piano".
- Sperim.: "Dunque rispondi: R, S sono elementi di I?".
- K. (*un po' incerta*): "No, R e S sono insiemi, non elementi. Sono scritti con le maiuscole".
- L'argomentazione di K. non è convincente: sembra basata su di un'alternativa tra "insiemi" ed "elementi".
- L'uso tradizionale delle lettere **minuscole** (per gli elementi) e delle lettere **maiuscole** (per gli insiemi) può avere alcune controindicazioni importanti. Si rischia di "suddividere" gli "oggetti matematici" in **due categorie ben separate**.

Registri visuali e icone

- L'allieva non si trova a proprio agio nell'applicare le definizioni formalmente. Anche dopo che lo Sperim. ha forzato l'uso del registro simbolico, K. **tende a riprendere il registro visuale**.



- I registri visuali rassicurano, aderiscono all'**esempio** (la **geometria**). Ma…
- **Non c'è "*un*" registro di un tipo dato:** **i simboli** sono generali, ma a volte hanno valore implicito (x non è x_0, n è naturale, p è primo).
- **I registri visuali possono avere diverse componenti (ad esempio simboliche).**
- **Tutto ciò va chiarito (negoziato).**

Registri visuali e icone

- Una classificazione rigida è difficilmente sostenibile **in un contesto culturale complesso e differenziato.**
- **Riassumendo,** il ragionamento diagrammatico (iconico) deve essere controllato in quanto:
  - fa riferimento a un **caso particolare** e richiede una generalizzazione (riprenderemo ciò tra poco);
  - può contribuire a porre l'accento su **elementi non rilevanti** rispetto al contenuto matematico in gioco.
- Eppure operativamente è:
  - **utile** per sviluppare un'argomentazione;
  - **spontaneo**, ovvero tale da indurre l'allievo a ricorrere ad esso (ad esempio per la geometria).

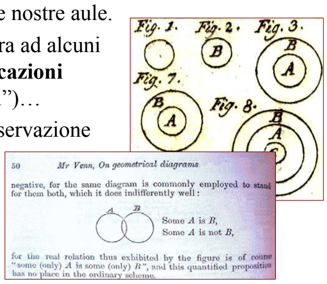
Sommario
Parte II
Ragionamento diagrammatico

- **La semiotica di Peirce e il ragionamento diagrammatico**
- **Esempio.**
  Rappresentazione di insiemi e diagrammi da interpretare
- **Esempio.**
  Numeri e immagini
- **Esempio.**
  Problemi di efficienza e il metodo dei tableaux

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)

Analisi semiotica
di qualche "dimostrazione"

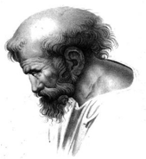
- Abbiamo esaminato qualche caratteristica della tradizionale rappresentazione didattica degli insiemi, da Eulero a Venn alle nostre aule.
- Ci dedicheremo ora ad alcuni esempi di **giustificazioni** (di "dimostrazioni")…
- …nonché a un'osservazione sull'**efficacia** di rappresentazioni iconiche.



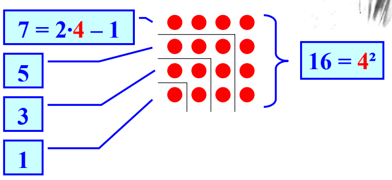
Analisi semiotica
di qualche "dimostrazione"

- La somma dei numeri naturali dispari da 1 a $2n–1$ (per n intero positivo qualsiasi) è n^2.
- Approccio simbolico: **dimostrazione per induzione**
  – per $n = 1$ si ha: $1 = 1^2$
  – dalla $1+3+…+(2n–1) = n^2$ si ricava:
  $1+3+…+(2n–1)+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$
- Nonostante le formule algebriche, per Peirce, abbiano una componente iconica, l'aspetto simbolico è legato ad esempio alla generalità.
- Alternativamente: **un approccio iconico**
  un approccio "misto"

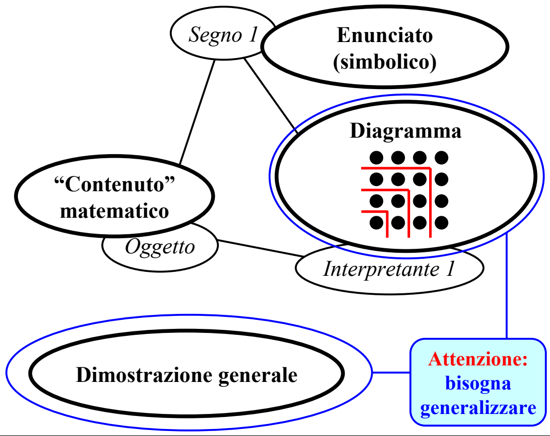
Analisi semiotica
di qualche "dimostrazione"



- Classico esempio (detto "pitagorico"):



- **L'aspetto iconico è senz'altro prevalente!**
- Il punto da discutere è: in che modo si generalizza il procedimento a un intero positivo **qualsiasi?**
- Sulla base della stessa "intenzione convenzionale"…

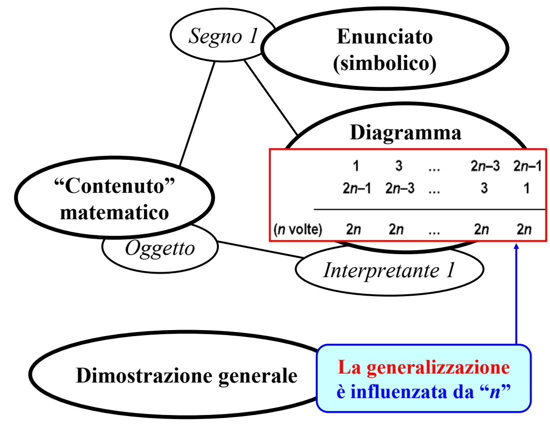


Analisi semiotica
di qualche "dimostrazione"

- **Altra possibilità** (vicina al "piccolo Gauss"):

	1	3	…	$2n–3$	$2n–1$
	$2n–1$	$2n–3$	…	3	1
(n volte)	$2n$	$2n$	…	$2n$	$2n$

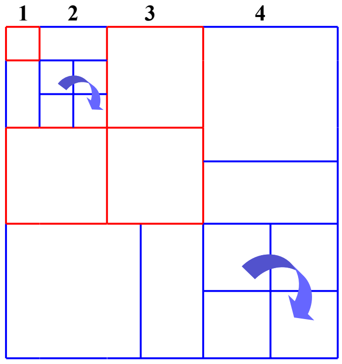
- Sotto la linea c'è "il doppio" di **$1+3+…+2n–1$** e il totale dei numeri sotto la linea è **$2n·n = 2·n^2$**
- **La componente iconica è ancora presente.**
- Il ricorso a **"…"** elude la dimostrazione per induzione.



Analisi semiotica di qualche “dimostrazione”

- Abbiamo visto alcune argomentazioni per provare che la somma dei primi n interi positivi dispari è n^2. **Il ricorso a diagrammi agevola l’approccio ma richiede un’attività di generalizzazione.**
- Occupiamoci ora di: $\mathbf{(1+2+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3}$
- La dimostrazione per induzione è **più impegnativa:**
  - per $n = 1$ si ha: $1^2 = 1^3$
  - dalla $(1+2+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$ si ricava: $[1+2+\ldots+n+(n+1)]^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3$ utilizzando l’identità: $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$
- Come si potrebbe procedere iconicamente?

- $\mathbf{1 \cdot 1^2 = 1^3}$ →
- $\mathbf{2 \cdot 2^2 = 2^3}$ →
- $\mathbf{3 \cdot 3^2 = 3^3}$ →
- $\mathbf{4 \cdot 4^2 = 4^3}$ →



- **Totale:** $\mathbf{(1+2+3+4)^2}$ (analogamente per casi successivi)

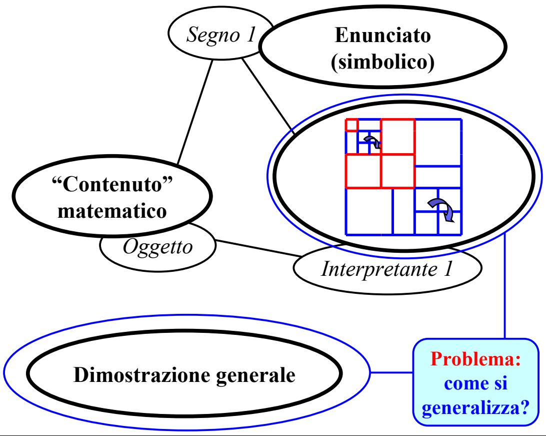


Diagramma e individualità
Attenzione alle dimostrazioni…

- Il **diagramma** rappresenta iconicamente la relazione matematica: l’icona costituita dal diagramma trasmette una caratteristica generale, pur essendo un soggetto individuale e osservabile (sul quale il matematico può operare per ottenere ulteriori caratteristiche generali del diagramma stesso).
- Rimane tuttavia **il problema dell’individualità dell’oggetto sul quale si sviluppa la dimostrazione contrapposta all’universalità delle conclusioni.**
- Una dimostrazione matematica, con la sua universalità, non può ridursi a un diagramma iconico. Riprenderemo questo punto.

Sommario
Parte II
Ragionamento diagrammatico

- **La semiotica di Peirce e il ragionamento diagrammatico**
- **Esempio. Rappresentazione di insiemi e diagrammi da interpretare**
- **Esempio. Numeri e immagini**
- **Esempio. Problemi di efficienza e il metodo dei tableaux**

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
***(Elogio della Follia*, 39)**

Evert W. Beth (1908-1964) e il metodo dei tableaux

- Con il **metodo dei tableaux** è possibile confutare una proposizione composta (mostrare che è falsa comunque si diano i valori di verità alle componenti).
- Si costruisce un grafo ad albero con la proposizione da confutare nel primo nodo e le regole seguenti:

Regola α	*Regola* β
$X \wedge Y$	$X \vee Y$
↓	↓
X	| |
Y	X Y

- Un ramo si dice **chiuso** se contiene una proposizione e la negata.
- Una confutazione è completa quando **tutti i suoi rami sono chiusi.**

Esempio di confutazione con il metodo dei tableaux

- $\{[A\wedge(\neg B)]\vee[C\wedge(\neg D)]\}\wedge\{[A\wedge(\neg A)]\wedge[B\vee(\neg D)]\}$

$\downarrow$

(α) $[A\wedge(\neg B)]\vee[C\wedge(\neg D)]$
$[A\wedge(\neg A)]\wedge[B\vee(\neg D)]$

$\downarrow$

(α) $[A\wedge(\neg B)]\vee[C\wedge(\neg D)]$
$A\wedge(\neg A)$
$B\vee(\neg D)$

$\downarrow$

(α) $[A\wedge(\neg B)]\vee[C\wedge(\neg D)]$
A
$\neg A$
$B\vee(\neg D)$

Questo ramo (l'unico) è chiuso perché contiene sia A che ¬A: la confutazione è completa!

Evitando le biforcazioni si guadagna tempo!

- Si noti che dopo il primo passaggio:
$\{[A\wedge(\neg B)]\vee[C\wedge(\neg D)]\}\wedge\{[A\wedge(\neg A)]\wedge[B\vee(\neg D)]\}$
$\downarrow$
$[A\wedge(\neg B)]\vee[C\wedge(\neg D)]$
$[A\wedge(\neg A)]\wedge[B\vee(\neg D)]$
- …avremmo potuto proseguire con una regola β (e analogamente dopo il secondo passaggio).
- Ma ciò avrebbe inserito delle biforcazioni e il procedimento sarebbe risultato più lungo.
- **La corretta valutazione dell'aspetto grafico consente di migliorare l'efficacia del metodo.**

Alternativamente… Le "tavole di verità"

- La confutazione precedente avrebbe potuto essere ottenuta anche mediante **l'assegnazione dei valori di verità ai quattro enunciati componenti A, B, C, D.**
- A **ciascuno** di essi sarebbe necessario attribuire **entrambi** i valori di verità, **V e F;** per ogni interpretazione verrebbe allora calcolato il valore di verità della proposizione composta:
$\{[A\wedge(\neg B)]\vee[C\wedge(\neg D)]\}\wedge\{[A\wedge(\neg A)]\wedge[B\vee(\neg D)]\}$
- Dunque sarebbe necessario esaminare 2^4 = **16 casi** distinti (cioè compilare una "tavola di verità" con ben 16 righe…).

A	B	C	D	…	$\{[A\wedge(\neg B)]\vee[C\wedge(\neg D)]\}\wedge\{[A\wedge(\neg A)]\wedge[B\vee(\neg D)]\}$
V	V	V	V	…	F
V	V	V	F	…	F
V	V	F	V	…	F
V	V	F	F	…	F
V	F	V	V	…	F
V	F	V	F	…	F
V	F	F	V	…	F
V	F	F	F	…	F
F	V	V	V	…	F
F	V	V	F	…	F
F	V	F	V	…	F
F	V	F	F	…	F
F	F	V	V	…	F
F	F	V	F	…	F
F	F	F	V	…	F
F	F	F	F	…	F

Altre 10 colonne intermedie!

Sempre "F": confutazione completata; ma… con una tabella 16×15

Riassumendo: segni e ragionamento diagrammatico

- La costruzione di un tableau semantico (almeno al semplice livello di calcolo delle proposizioni) non sembra essere l'elemento indispensabile che consente il salto di qualità tale da consentire il raggiungimento di un risultato. Ma **la possibilità di semplificare il procedimento risolutivo può essere (didatticamente, e non solo) decisiva.**
- Se la presenza di una presupposizione sottolinea una scelta (metodologica) che si suppone utile per affrontare una situazione, **l'adozione di un approccio diagrammatico potrebbe essere assimilata ad una presupposizione.**

A tutti grazie dell'attenzione

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)