Rimini, Seminario Nazionale 2009

Interpretazione e didattica della matematica
Una prospettiva ermeneutica

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

---

*«L'insegnamento–apprendimento
si può interpretare
in chiave ermeneutica:
che cosa sarebbe
altrimenti il passaggio
dal savoir savant
al savoir de l'élève?»*

*Francesco Speranza
(1932-1998)
Appello all'ermeneutica*

Sommario
*Interpretazione e
didattica della matematica*

- Giovedì (15.00–16.30)
  Parte I
  Ermeneutica, presupposizioni
- Giovedì (17.00–18.30)
  Parte II
  Ragionamento diagrammatico
- Venerdì (9.00–10.30)
  Parte III
  Categorie faneroscopiche
- Venerdì (11.00–12.30)
  Parte IV
  Dall'assenza alla presenza

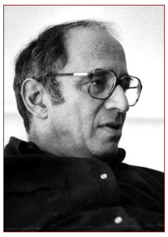
Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)

Sommario
Parte I
Ermeneutica, presupposizioni

- **Il circolo ermeneutico:
  storia e didattica**
- **Dall'epistemologia
  all'ermeneutica:
  tra incommensurabilità
  e interpretazione**
- **Esempio.
  Rafael Bombelli
  e i numeri complessi**
- **Esempio.
  Le serie numeriche,
  una sequenza di
  presupposizioni**

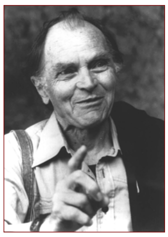
Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)

Scienza, paradigmi e "fatti" secondo Kuhn



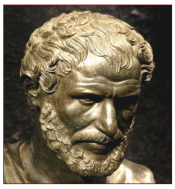
- Per **Thomas Kuhn** (1922–1996) la scienza non progredisce gradualmente verso la "verità", bensì è soggetta a rivoluzioni.
- Kuhn chiama **scienza *normale*** quella sviluppata con riferimento ai paradigmi di un periodo storico; la **scienza *anormale*** porta invece alla revisione radicale di essi.
- Quali "anomalie" portano gli scienziati e la comunità scientifica a introdurre e ad accettare tali variazioni?
- Un motivo (l'unico?) è un disaccordo con i **"fatti".**

La critica: Feyerabend



- Per **Paul Feyerabend** (1924-1994; 2003, p. 32) tutto ciò è accettabile «sempre che esistano fatti e siano disponibili indipendentemente dalla considerazione o meno di alternative alla teoria che deve essere verificata».
- **Avrebbe dunque senso, alla luce di quanto notato, riferirsi a dei "fatti" in termini assoluti?**
- «**Non ci sono due atti distinti** – l'osservazione di un fenomeno e la sua espressione con l'aiuto di una sua formulazione verbale appropriata – **ma soltanto uno**» (Feyerabend, 2003, p. 60).

Ogni forma di linguaggio richiede un’interpretazione: anche i linguaggi apparentemente più oggettivi…



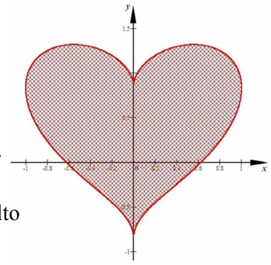
- *Il linguaggio e la logica arcaica* è un’opera fondamentale (1925) di Ernst Hoffmann (1880–1952) il cui viene esaminata l’iniziale contrapposizione tra il λόγος e gli ’έπεα (Eraclito, Parmenide).
- I singoli ’έπεα non devono essere considerati isolatamente, in quanto ciò può causare contraddizioni. Vanno **interpretati** nel linguaggio, all’interno del λόγος: questa corretta interpretazione **consente di dare un senso non contraddittorio alla parola e di comprendere il discorso.**

Dai fatti al linguaggio: verso l’interpretazione

- Alcuni linguaggi sono di… non immediata interpretazione. Ad esempio il “messaggio”:

$$x^2 + \frac{\left(6y - 5\sqrt{|x|}\right)^2}{25} \le 1$$

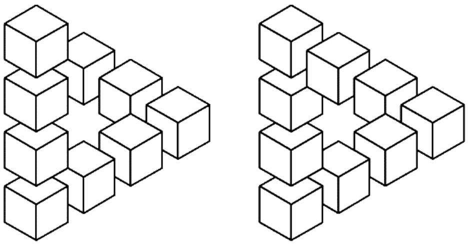
difficilmente può essere letto in termini romantici.



- **Eppure…**
- Ma ci sono linguaggi molto più immediati!

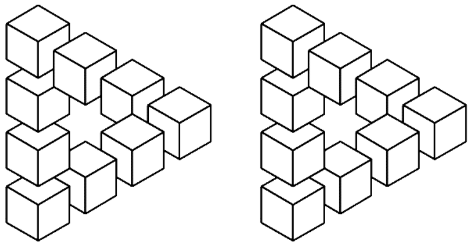
Linguaggi da interpretare “Guardiamo” una figura…

- Si osservi la figura a sinistra: nessun problema, è un insieme di cubetti…
- Ma se la figura fosse **quella a destra?**

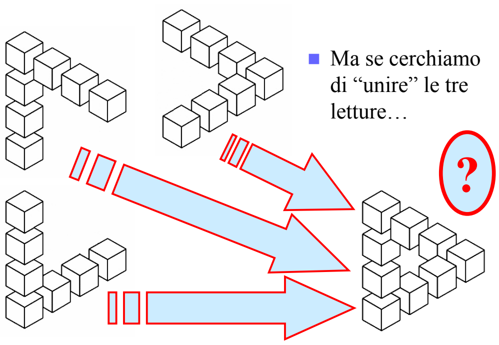


Linguaggi da interpretare “Guardiamo” una figura…

- Se eliminiamo due cubetti da uno dei tre lati, l’ambiguità si dissolve…



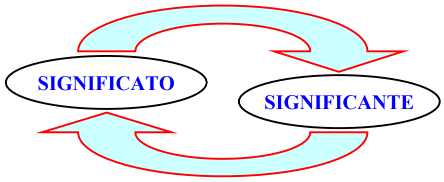
Linguaggi da interpretare “Guardiamo” una figura…



- Ma se cerchiamo di “unire” le tre letture…

Un processo a due facce tra significato e significante

- Del resto **René Thom** (1923–2002, M. Fields 1958) notava: «Nell’interazione *Significato–Significante* è chiaro che il significato emette, genera il significante. **Ma il significante genera nuovamente il significato ogni volta che noi interpretiamo il segno»** (1974).

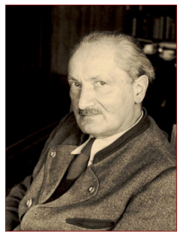


Interpretazione… circolare

- Friedrich Schleiermacher (1768-1834) segnalò un «circolo apparente, per il quale il particolare può comprendersi solo partendo dall'universale di cui è parte e viceversa».
- Scrisse inoltre (*Hermeneutik*, 144/455).

  «Partendo dall'inizio di un'opera e progredendo a poco a poco, **la comprensione graduale di ogni singolo elemento e delle parti della totalità che a partire da essa si organizzano è sempre soltanto qualcosa di provvisorio.** […] Solo che quanto più avanziamo tanto più tutto ciò che precede viene anche illuminato da ciò che segue».

Il circolo ermeneutico e la filosofia di Heidegger



- Dunque, nota Matthias Jung, «a partire dal circolo chiuso si giunge a **una spirale aperta,** costituita da ripetuti cammini interpretativi che devono essere sempre ritenuti passibili di una nuova revisione».
- Il problema fu ripreso in termini decisivi da **Martin Heidegger (1889-1976)** che determina la svolta grazie alla quale la comprensione non viene più ad essere orientata sul solo modello della spiegazione teoretica dei testi, bensì sullo stesso rapporto che gli esseri umani hanno con il mondo.

Il circolo ermeneutico e la filosofia di Heidegger

- Heidegger in *Essere e tempo* scrive: «l'interpretazione deve sempre muoversi nel compreso e nutrirsi di esso [e] le regole più elementari della logica ci insegnano che il *circolo* è *circulus vitiosus*»; tuttavia se si riconosce nel circolo ermeneutico «*un circolo vizioso e se si mira ad evitarlo o semplicemente lo si "sente" come un'irrimediabile imperfezione, si fraintende la comprensione da capo a fondo*».
- Dunque una simile posizione sarebbe sbagliata e fuorviante: **«l'importante non sta nell'uscir fuori dal circolo, ma nello starvi dentro nella maniera giusta».**

Il ruolo chiave delle pre–supposizioni

- Queste considerazioni capovolgono una posizione talvolta assunta secondo la quale la presenza di una **"pre-supposizione"** va considerata negativamente, (come scarsa disponibilità ad una valutazione serena).
- Le pre-supposizioni, per Giovanni Reale (Introduzione a *Verità e Metodo* di Gadamer), sono invece

  «*ciò che mette in moto il circolo*; e la scientificità della ricerca si realizza nella misura in cui i pre-concetti vengono via via rinnovati e sostituiti nel corso del lavoro di interpretazione, […] sempre più in sintonia con l'oggetto che viene indagato».

Storia (anche *storia della matematica*) L'importanza dell'interpretazione

- Riflettiamo anche sul **ruolo della storia** e sulla sua importanza per la matematica e la sua didattica.
- Afferma **Hans–Georg Gadamer (1900–2002):** «*Pensare storicamente* significa *portare a compimento quella **trasposizione che i concetti del passato subiscono*** quando noi cerchiamo di pensare in base ad essi. Il pensare storicamente comporta sempre costitutivamente una **mediazione** tra quei concetti e il proprio pensiero».
- «L'esperienza della tradizione storica […] comunica sempre una verità, della quale si tratta di *partecipare*».

I contesti storico-culturali

- Ogni cultura ha determinato lo sviluppo della propria matematica: **tentare l'omologazione ("vista" oggi) di esperienze diverse è pericoloso;** approcci storico-culturali ovvero antropologici ci chiedono invece di stabilire come i contesti culturali abbiano influenzato le esperienze matematiche.
- La collocazione di un'opera in un contesto *ha* un senso, ma **non si riduce al tentativo di riprodurre le caratteristiche di un periodo passato.**
- Con Gadamer, **«l'essenza dello spirito storico non consiste nella restituzione del passato, ma nella *mediazione, operata dal pensiero, con la vita presente*».**

Sommario

Parte I

Ermeneutica, presupposizioni

- **Il circolo ermeneutico: storia e didattica**
- **Dall'epistemologia all'ermeneutica: tra incommensurabilità e interpretazione**
- **Esempio. Rafael Bombelli e i numeri complessi**
- **Esempio. Le serie numeriche, una sequenza di presupposizioni**

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più

Erasmo da Rotterdam

(*Elogio della Follia*, 39)

Incommensurabilità nella storia (e nella geografia)

- Iniziamo con una provocazione…
- L'indiano **Bhaskara** (1114-1185), si occupa del *kha-hara*, frazione con denominatore 0. Scrisse in *Bijaganita*:
- «Una quantità divisa per zero diventa *kha-hara*. Questa frazione è denominata **quantità infinita.** In questa **quantità con zero come divisore non c'è alcuna alterazione, sebbene molti possano essere aggiunti o tolti,** così come nessun cambiamento può aver luogo nella divinità immutabile quando i mondi vengono creati o distrutti, anche se numerosi ordini di esseri vengono assorbiti o creati».

Incommensurabilità nella storia (e nella geografia)

- Come possiamo esprimere tali considerazioni mediante una scrittura moderna?
- Una **prima** ipotesi può essere:

$$\frac{1}{0}+5=\frac{1+5\cdot 0}{0}=\frac{1+0}{0}=\frac{1}{0}$$

scrittura "matematicamente scorretta" ma che esprime (in termini non del tutto banali) la visione di Bhaskara.

- Prima di archiviare **con il giusto sdegno** la scrittura precedente, occupiamoci ancora un po' del suo significato. **Cerchiamo di interpretarla…**

Incommensurabilità nella storia (e nella geografia)

Il "guaio" è che 1/0 non "esiste" – se esistesse…

- L'insolita "addizione" di "1/0" e di 5 si basa sulle **"nostre" regole** usuali dell'addizione di razionali.
- Quando si scrive

$$\frac{1}{0}+5=\frac{1+5\cdot 0}{0}=\frac{1+0}{0}=\frac{1}{0}$$

si portano "1/0" e "5" allo "stesso denominatore" (li si rende, in qualche modo, "analoghi") e li si somma.

- Per una scrittura corretta dovremmo ricorrere al **concetto di limite** e sostituire al "reciproco di zero":

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

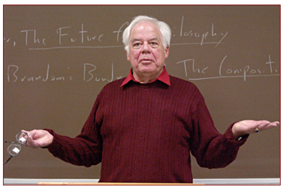
Incommensurabilità nella storia (e nella geografia)

- Tuttavia sarebbe **lecito (in che senso, con quali accorgimenti) interpretare Bhaskara alla luce di Cauchy e di Weierstrass?**
- Non sembra plausibile ipotizzare un consapevole tentativo di Bhaskara di introdurre l'"infinito" nel sistema numerico (un simile tentativo comporterebbe peraltro evidenti problemi, in quanto finirebbe per suggerire che 0 moltiplicato per "infinito" potrebbe essere uguagliato a ogni numero n, implicando così un'imbarazzante… uguaglianza di tutti i numeri).

Incommensurabilità nella storia (e nella geografia)

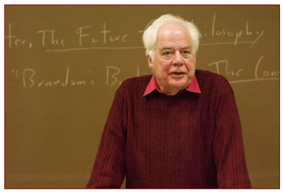
- In effetti non potremmo far riferimento agli stessi "principi generali" nell'accostare **l'argomentazione di un indiano che descrive le caratteristiche del reciproco di 0 pensando all'immensità della divinità** alle considerazioni di un moderno matematico che introduce (con la definizione "dell'ε-δ" o topologicamente) il concetto di limite.
- Il moderno matematico occidentale comprenderebbe l'argomentazione dell'indiano (e forse viceversa), la considererebbe curiosa, magari divertente. **Tra i due, dunque, non è inibito il dialogo; tuttavia non potrebbe essere raggiunto un accordo razionale.**

Richard Rorty (1931–2007): discorso normale, discorso anormale



- Secondo Rorty, **due contributi si dicono commensurabili quando possono essere considerati nell'ambito di uno stesso quadro che consente un "accordo razionale"** e indica ai partecipanti alla discussione come raggiungere tale accordo. Tra contributi incommensurabili allo stesso discorso non si può impostare un confronto sul piano dell'***epistemologia*** (intesa come ***confronto razionale***).

Richard Rorty (1931–2007): discorso normale, discorso anormale



- Subentra allora, per Rorty, la possibilità dell'***ermeneutica***, che «non è il nome di una disciplina, né un modo di conseguire i risultati che l'epistemologia non ha raggiunto. Al contrario, nell'ermeneutica si esprime la speranza che lo spazio culturale lasciato dall'abbandono dell'epistemologia non venga riempito – che la nostra cultura diventi tale che in essa non si avverta più l'esigenza di cogenze definitive e ultime».

Torniamo alla matematica indiana

- Seguiamo Rorty ed operiamo «in una cultura diversa», **nella cultura del matematico indiano.** Possiamo cercare «un'epistemologia scritta all'interno di quella cultura».
- Ciò sarebbe utile «per determinare se i detentori di quella cultura abbiano espresso qualche verità interessante» secondo i modelli «del discorso normale del nostro tempo e dei nostri luoghi».
- Ma un accostamento **epistemologico** alla matematica indiana non pare possibile (per le mie capacità!).
- È inutile cercare l'argomentazione originale pensando che sia "confrontabile" con la nostra…

Torniamo alla matematica indiana

- Allora possiamo (dobbiamo) interpretare il discorso per noi incommensurabile in modo da "tradurlo" senza farlo «sembrare delle stupidaggini».
- Abbiamo visto che la scrittura

$$\frac{1}{0}+5=\frac{1+5\cdot 0}{0}=\frac{1+0}{0}=\frac{1}{0}$$

non appare una traduzione corretta dal punto di vista della "nostra" matematica.
- Inoltre questa traduzione appare povera rispetto alla ricchezza della fonte originale – che bisognerebbe peraltro valutare anche al di là del semplice testo.

Torniamo alla matematica indiana

- Abbiamo ottenuto l'espressione sopra riportata con le **"nostre" regole** per addizionale i razionali…
- … secondo un'impostazione che può essere utilizzata didatticamente (iconicità delle espressioni algebriche).

$$\frac{1}{2}+5=\frac{1+5\cdot 2}{2}=\frac{1+10}{2}=\frac{11}{2}$$

$$\frac{1}{0}+5=\frac{1+5\cdot 0}{0}=\frac{1+0}{0}=\frac{1}{0}$$

Torniamo alla matematica indiana

- **Ciò (1) è estraneo allo spirito originale e (2) per noi, non "salva" la correttezza della scrittura in esame.**
- Se interpretiamo "1/0" attraverso il limite di $1/x$ possiamo sistemare la nostra espressione:

$$\frac{1}{0}+5=\frac{1+5\cdot 0}{0}=\frac{1+0}{0}=\frac{1}{0} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}+5=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

non scandalizzerebbe alcun matematico (insegnante, studente) dei giorni nostri.
- Ma quest'ultima scrittura **non** si accorda con lo spunto indiano. Abbiamo imposto «i modelli del discorso normale del nostro tempo e dei nostri luoghi» (Rorty).

Un approccio ermeneutico: dialogo, non sovrapposizione…

- L'antica cultura matematica indiana ha una ricchezza che non può essere condensata in poche formule.
- La nostra reazione nell'accostarci ad essa non deve puntare ad una sua "normalizzazione".
- Da un lato non possiamo guardare a una tradizione diversa cercando di "comprenderne" il vocabolario (sulla base del nostro)…
- **…ma incommensurabilità non significa irriducibilità!**
- E ciò rivaluta un (attualissimo) **aspetto interculturale.**

Sommario
Parte I
Ermeneutica, presupposizioni

- **Il circolo ermeneutico: storia e didattica**
- **Dall'epistemologia all'ermeneutica: tra incommensurabilità e interpretazione**
- **Esempio. Rafael Bombelli e i numeri complessi**
- **Esempio. Le serie numeriche, una sequenza di presupposizioni**

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)

Presupposizioni, un primo esempio: l'introduzione di un… "errore"

- L'introduzione dei numeri immaginari, nella scuola secondaria, è un momento importante del curriculum.
- All'allievo, già a lungo bersagliato da regole che impediscono di estrarre la radice quadrata di un numero negativo, viene improvvisamente chiesto di accettare la presenza, nel proprio mondo matematico, di **un "oggetto" nuovo,** la preoccupante "radice quadrata di –1", alla quale viene assegnata la denominazione *i*.
- Questa fase del percorso di apprendimento è delicata e **può essere fonte di incoerenze nel pensiero degli studenti.**

Uno sguardo alla storia
Le equazioni di terzo grado

- La risoluzione delle equazioni di terzo grado si collega a **Gerolamo Cardano**, l'autore di *Ars Magna* (1545), e a **Nicolò Fontana Tartaglia** che scrisse *Quesiti et invenzioni diverse* (1546).
- La contesa per la priorità è celebre; il primo a individuare la tecnica risolutiva, fu probabilmente (1515) il bolognese **Scipione del Ferro**, il quale morì senza rendere pubblico ilo proprio risultato.
- Un ruolo essenziale (lo riprenderemo) va riconosciuto al **contesto storico–culturale in cui si sviluppano nuovi mezzi semiotici** (l'"algebra sincopata").

Equazioni di III grado nel XV secolo: la poesia "algebrica" di Tartaglia

- Quando che 'l cubo con le cose appresso se agguaglia à qualche numero discreto trovan dui altri differenti in esso. — $x^3+px = q$, $p>0$, $q>0$, $q = u-v$
- Da poi terrai questo per consueto che 'l lor produtto sempre sia uguale al terzo cubo delle cose neto. — $uv = (p/3)^3$
- El residuo poi suo generale delli lor lati cubi ben sottratti **varrà la tua cosa principale**. — $\boxed{x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}}$

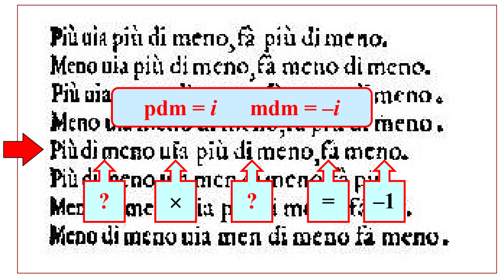
Questa semplificazione è delicata

L'*Algebra* di Bombelli

- La semplificazione dei radicali doppi fu studiata in alcuni casi particolari da **Rafael Bombelli** (1526-1573).
- Bombelli, bolognese (è stato trovato il certificato di battesimo a Borgo Panigale), pubblicò il proprio capolavoro, ***Algebra***, nel 1572-1579.


L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

“Più di meno” e “meno di meno”



Più uia più di meno, fà più di meno.
Meno uia più di meno, fà meno di meno.
Più uia … meno.
Meno … meno.
Più di meno uia più di meno, fà meno.
Più di meno … fà più …
Meno … meno uia … fà …
Meno di meno uia men di meno fà meno.

- Queste “regole” si trovano a pagina 179 di *Algebra.*
- **Come le possiamo interpretare modernamente?**

Un esempio di risoluzione alla Bombelli–Cardano

- La risoluzione dell’equazione modernamente scritta:

$$x^3 = 15x+4$$

  coinvolge la radice quadrata di $(q/2)^2-(p/3)^3 = -121$ e si conclude con la somma di radicali doppi:

$$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$

- Si prova quindi, sviluppando i cubi dei binomi, che è possibile scrivere:

$$2+11i = (2+i)^3 \qquad \text{e} \qquad 2-11i = (2-i)^3$$

- Dunque la soluzione **reale** **(ovvero complessa con parte immaginaria nulla)** dell’equazione proposta è:

$$x = (2+i) + (2-i) = 4$$

Un esempio di risoluzione alla Bombelli–Cardano

- Questa è la risoluzione dell’equazione ora esaminata che si trova nell’*Algebra* di Bombelli, a p. 294.

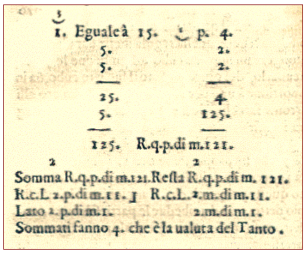
$x^3 = 15x+4$

$x^3 = px+q$

$(q/2)^2-(p/3)^3 = -121$

$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$

$x = (2+i) + (2-i) = 4$



1. Eguale à 15. p. 4.
5. 2.
5. 2.
25. 4
5. 125.
125. R.q.p.di m.121.
Somma R.q.p.di m.121. Resta R.q.p.di m. 121.
R.c.L. 2.p.di m.11. R.c.L. 2.m.di m.11.
Lato 2.p.di m.1. 2.m.di m.1.
Sommati fanno 4. che è la ualuta del Tanto.

Un esempio di risoluzione alla Bombelli–Cardano

- Il procedimento precedente non si svolge interamente nell’ambito dei reali: **il risultato ottenuto, tuttavia, è reale, come i coefficienti dell’equazione data.**
- Una verifica della soluzione $x = 4$ nell’equazione $x^3 = 15x+4$ (che porta all’identità: $64 = 15\cdot 4+4$) è dunque possibile senza uscire dall’ambito dei reali.
- Diversa sarebbe la situazione dell’equazione: $x^2 = -1$. **Il ruolo degli immaginari, qui, è rilevante:** il risultato dell’equazione (a coefficienti reali) è non reale e la sua accettazione dopo una verifica diretta richiede la considerazione di numeri immaginari.

La storia e un’esperienza didattica

- La risoluzione di un’equazione di III grado può far sì che gli allievi accettino la presenza degli immaginari.
- In un’esperienza didattica (Bagni, 2000) abbiamo notato che **la considerazione di quantità immaginarie nei passaggi del procedimento risolutivo di un’equazione, ma *non* nel risultato, viene talvolta accettata dagli allievi.**

La storia e un’esperienza didattica

- Il contratto didattico assegna notevole importanza alla **determinazione dell’esatto risultato finale**, e tale aspetto sembra far sì che nella stessa espressione del **risultato** dell’esercizio (la scrittura della soluzione dell’equazione) sia **assai pesante l’influenza delle “regole” precedentemente fissate.**
- Nei **passaggi intermedi**, invece, l’azione di regole e di proibizioni è meno coercitiva e una parte degli allievi si sente autorizzata a considerare non illecita la presenza di espressioni insolite e “rischiose”, dopo aver controllato la correttezza del risultato finale.

La storia e un'esperienza didattica

si tratta di una *presupposizione?*

- Alle considerazioni degli studenti dunque si affiancano e talvolta **si sovrappongono gli effetti determinati dalle clausole del contratto didattico.**
- I risultati del test indicano che un percorso di apprendimento potrebbe aver avuto luogo **in alcuni casi** (sebbene la percentuale sia ancora bassa).
- Assume un ruolo rilevante la constatazione seguente:

la considerazione della radice di –1 come "numero" può non essere causa di difficoltà particolari

- Essa consente di trovare una radice di un'equazione di terzo grado proposta: **questa sua efficacia viene ad essere una "garanzia" della sua plausibilità.**

Sommario
Parte I
Ermeneutica, presupposizioni

- **Il circolo ermeneutico: storia e didattica**
- **Dall'epistemologia all'ermeneutica: tra incommensurabilità e interpretazione**
- **Esempio. Rafael Bombelli e i numeri complessi**
- **Esempio. Le serie numeriche, una sequenza di presupposizioni**

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)

Un'addizione… "con infiniti addendi"

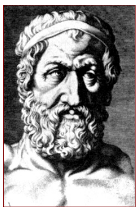
- L'introduzione delle **serie numeriche** è un altro momento delicato del curriculum matematico, in quanto il concetto di serie si sovrappone a quello di addizione (anche per la simbologia usata).
- Naturalmente **una serie non è riconducibile a un'addizione con… "tanti" addendi.**
- Uno degli elementi che possono allontanare questi due protagonisti della matematica insegnata e appresa nelle nostre aule è la presenza di un "risultato": un'addizione etc. ha sempre uno e un solo risultato…
- …mentre una serie può essere **convergente**, **divergente** o **indeterminata**.

Un'addizione… "con infiniti addendi"

- **L'allievo conosce il termine "infinito"** e anche questo fa sì che esso sia un accettabile risultato per queste "addizioni" (anche studenti giovani affermano con disinvoltura che "i numeri sono infiniti"; se chiedessimo di addizionare… tutti questi numeri, la risposta sarebbe: "la somma è infinita").
- **Spesso, quindi, una "somma di infiniti addendi" non nulli è considerata "infinitamente grande"**, in analogia con quanto accadrebbe addizionando infiniti addendi maggiori di un numero dato.
- Analizziamo un percorso di accostamento alle serie con l'aiuto alcuni "strumenti di lavoro"…

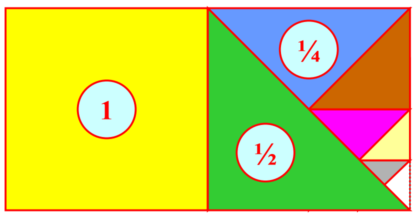
1 – Una "serie" antichissima: Zenone d'Elea

- Il paradosso di Achille e della Tartaruga si collega **se modernamente interpretato** a una **serie geometrica *convergente.***
- La velocità di Achille potrebbe essere il doppio di quella della Tartaruga e il vantaggio concesso dal primo alla seconda unitario (ad esempio di un metro).
- 1+1/2+1/4+1/8+… **non supererebbe 2,** qualsiasi sia la quantità di addendi: in ogni passo di questa "addizione" si aggiunge infatti **la metà di quanto servirebbe per raggiungere 2.**



1 – Una "serie" antichissima: Zenone d'Elea

- Non è difficile trovare qualche giustificazione di ciò utile in ambito didattico. Ad esempio possiamo "riempire" un rettangolo di base 2 e altezza 1…



2 – La serie armonica e Nicola d'Oresme (1323-1382)

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\dots$$

Ancora una volta sottolineiamo che si tratta di un'interpretazione moderna: nel XIV secolo, ad esempio, le concezioni dell'infinito e le stesse scritture erano diverse dalle nostre!

3 – Una proprietà… "liberamente" applicata

- Consideriamo la serie delle potenze di 1/2, sopra esaminata. Una volta che l'allievo ha constatato che il suo "risultato" non è "infinito", si pone il problema di capire *quale esso possa essere*.
- In effetti, le precedenti considerazioni hanno mostrato che 1+1/2+1/4+1/8+… non supererà 2, qualsiasi sia la quantità di addendi che si va a considerare; al più si nota che **più addendi si fanno entrare in gioco più la somma parziale si avvicina a 2.**
- **Ma è sufficiente ciò per concludere che la somma di "tutti gli infiniti addendi" è proprio 2?**

3 – Una proprietà… "liberamente" applicata

- Per ottenere un simile risultato si potrebbe essere tentati di procedere nel modo seguente: posto
  1+1/2+1/4+1/8+… = s
  si raccoglie ½ tra i termini dal secondo in poi:
  1+(1/2)(1+1/2+1/4+1/8+…) = s
- Dunque si ottiene:
  1+(1/2)s = s da cui: $\boldsymbol{s = 2}$
- Nel realizzare il raccoglimento a fattor comune di ½ abbiamo applicato alcune delle note proprietà delle operazioni aritmetiche: **ma è lecito operare così nel caso di una "addizione di infiniti addendi"?**

4 – La "creazione ex nihilo" nella serie di Grandi

- Il procedimento visto ci ha portato ad una conclusione corretta (la somma della serie data è 2), ma può costituire **un precedente pericoloso.**
- Guido Grandi (1671-1742) nel 1703 scrisse:
  «Mettendo in modo diverso le parentesi nell'espressione 1–1+1–1+… io posso, volendo, ottenere 0 o 1. Ma allora l'idea della creazione *ex nihilo* è perfettamente plausibile».
- Infatti: (1–1)+(1–1)+(1–1)+... = 0+0+0+... = 0
  1+(–1+1)+(–1+1)+... = 1+0+0+... = 1
- Tale serie era eguagliata dal Grandi e da altri a ½.

4 – La "creazione ex nihilo" nella serie di Grandi

- Si sa oggi che la successione delle somme parziali associata alla serie di Grandi **non ammette limite:** da ciò segue che **tale serie non ammette alcuna somma**
  (ma converge "secondo Cesaro": non ci occuperemo di ciò).
- È una serie **indeterminata**
  (dal punto di vista storico, anche qualche matematico del XVIII secolo aveva suggerito una simile conclusione: **Jacopo Riccati,** 1761, I, p. 87).

4 – La "creazione ex nihilo" nella serie di Grandi

- In termini elementari, la convergenza della serie di Grandi a 1/2 può ottenersi con un procedimento vicino a quello che, poco fa, ci ha condotto ad affermare che la somma delle potenze di 1/2 è 2. Posto:
  1–1+1–1+… = s
  si raccoglie –1 tra i termini dal secondo in poi:
  1–(1–1+1–...) = s
- Dunque si ottiene: 1–s = s da cui: s = ½
- **Questa volta, però, le conclusioni sono inaccettabili** (peraltro la stessa ammissione che 1–1+1–1+… indichi un numero s è, in questo caso, ingiustificata).

5 – Le inferenze secondo Peirce: deduzione, induzione, abduzione

- **Abduzione** è ormai una parola chiave nella didattica della matematica. Molti studi sono dedicati a questo tipo di inferenza.
- L'abduzione è una forma di ragionamento in cui **una conclusione viene accettata in quanto spiega (ovvero "genera") i dati disponibili.**
- [Tipico esempio: la diagnosi formulata sulla base dei sintomi].
- In senso più ampio, l'abduzione riguarda il processo che porta alla **formazione di ipotesi**: ciò si collega al ruolo delle presupposizioni.

5 – Le inferenze secondo Peirce: deduzione, induzione, abduzione

- Nel 1878 **C.S. Peirce** (1834–1914) illustrò i tre tipi di inferenza con un celebre esempio: disponiamo di un sacco con l'etichetta "Fagioli bianchi". Ciò significa tale sacco contiene soltanto fagioli bianchi (*regola*): estraendo una manciata di fagioli dal sacco (*caso*), si constata che sono tutti bianchi (*risultato*).
- Questa struttura è detta **deduzione**:

Regola **Tutti i fagioli in questo sacco sono bianchi**
Caso **Questi fagioli provengono da questo sacco**
▼
Risultato **Questi fagioli sono bianchi**

5 – Le inferenze secondo Peirce: deduzione, induzione, abduzione

- Illustriamo l'**induzione**: non conosciamo il contenuto del sacco (non c'è etichetta); per scoprirlo estraiamo una manciata del contenuto (*caso*) e notiamo che si tratta di fagioli bianchi (*risultato*). Questo ci fa supporre che il sacco contenga soltanto fagioli bianchi (*regola*). La regola generalizza il caso sperimentale, ma **non siamo certi** della sua validità:

Caso **Questi fagioli provengono da questo sacco**
Risultato **Questi fagioli sono bianchi**
▼
Regola **Tutti i fagioli di questo sacco sono bianchi (?)**

5 – Le inferenze secondo Peirce: deduzione, induzione, abduzione

- **Abduzione**: vediamo una manciata di fagioli bianchi su di un tavolo (*risultato*) e, accanto, un sacco con l'etichetta "Fagioli bianchi" (*regola*). Supponiamo allora che i fagioli provengano da quel sacco.
- La struttura logica è la seguente:

Risultato **Questi fagioli sono bianchi**
Regola **Tutti i fagioli di questo sacco sono bianchi**
▼
Caso **Questi fagioli provengono da questo sacco (?)**

- **Non siamo certi** della validità: il risultato potrebbe non essere un caso della regola che conosciamo.

Serie numeriche e presupposizioni

- **Quali sono le presupposizioni?**
- **Quali forme di inferenza (deduttiva, induttiva, abduttiva) possiamo evidenziare?**
- Seguiamo la formazione della presupposizioni…

♦ **Abduzione (*a*)** [alla base del punto (i)]

- *risultato* (*a*) la serie è indicata da un'espressione scritta con dei numeri e con il simbolo "+"
- *regola* (*a*) le addizioni vengono indicate da espressioni scritte con dei numeri e con il simbolo "+"
- → *caso* (*a*) la serie è un'addizione

Attenzione: potrebbe trattarsi di una semplice analogia: l'allievo non "cerca" una regola…

♦ **Abduzione (*b*)** [alla base del punto (ii)]

- *risultato* (*b*) una serie ha "infiniti addendi"
- *regola* (*b*) se la somma di una "addizione" supera ogni limitazione assegnata, allora tale addizione deve avere "infiniti addendi"
- → *caso* (*b*) la somma di una serie supera ogni limitazione assegnata
- Bisogna che l'allievo capisca che si tratta di **un'abduzione scorretta!**
- **Controesempio:** 1+1/2+1/4+1/8+…

Serie numeriche e presupposizioni

♦ **Induzione (*c*)** [alla base del nuovo punto (ii)]

- *caso* (*c*) 1+1/2+1/4+1/8+… ha term. gen. infinitesimo
- → *regola* (*c*) se una serie ha termine gen. infinitesimo ha "risultato finito"
- Si tratta di **un'induzione scorretta!**

Controesempio: la serie armonica 1+1/2+1/3+1/4+… ha il termine generale infinitesimo ma diverge (anche qui si potrebbero ipotizzare alcune inferenze).

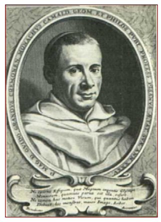
Serie numeriche e presupposizioni

♦ **Deduzione (*d*)** [alla base del nuovo punto (i)]

- *regola* (*d*) a tutte le comuni operazioni aritmetiche devono poter essere applicate le ben note proprietà
- *caso* (*d*) applicando le proprietà delle operazioni aritmetiche si ricava:

  1–1+1–1+… = 0
  1–1+1–1+… = 1
  1–1+1–1+… = ½

  e ciò è contraddittorio
- → *risultato* (*d*) la serie 1–1+1–1+… non è una comune addizione
- **Questa deduzione è corretta!**



Serie numeriche e presupposizioni

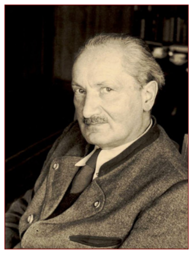
- Tutto ciò vale per la serie di Grandi. Nella mente dell'allievo può dunque scattare una generalizzazione.

♦ **Induzione (*e*)**

- *caso* (*e*) 1–1+1–1+… è una serie
- *risultato* (*e*) 1–1+1–1+… non è una comune addizione
- → *regola* (*e*) le serie numeriche non sono comuni addizioni
- Più propriamente, il processo si completa con l'istituzionalizzazione **da parte dell'insegnante.**

Riassumiamo: abduzione, ipotesi, presupposizioni

- L'inferenza abduttiva si basa sulla formulazione di un'ipotesi in grado di spiegare i dati disponibili…
- … tale ipotesi (assimilabile ad una presupposizione) **deve però essere controllata.**
- È indispensabile, ricordando Heidegger, ricorrere ad una presupposizione: ma bisogna che essa sia giustificata e passibile di revisione.
- **È quanto accade nella matematica, nella sua storia e nella sua didattica.**



A tutti grazie dell'attenzione

Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmo da Rotterdam
(*Elogio della Follia*, 39)