XXVII Convegno UMI-CIIM, Roma 23-24 ottobre 2008
Insegnare la matematica: dalla formazione dei docenti
alla valutazione in uscita degli apprendimenti degli allievi

La preparazione metodologico–didattica di chi insegna matematica
Quale preparazione, come si valuta, quale ruolo degli insegnanti in servizio

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine
Co-Direttore Unità Operativa dell'Università di Udine del Master Didattica delle Scienze (DidSciUd)

Le note che proporremo non hanno ovviamente la pretesa di esaurire un campo di riflessione vasto e dalle numerose implicazioni. In questa sintesi abbiamo scelto di evidenziare particolarmente quattro aspetti: la preparazione storica, quella epistemologica, una riflessione didattica e alcune osservazioni collegate ai diversi strumenti di mediazione semiotica.

Storia… e geografia

«Nessuna teoria balza fuori dalla testa del teorico come Atena balzò dalla fronte di Zeus. Ci sono vaghe anticipazioni, parti incomplete di quella che potrebbe diventare una teoria» (Feyerabend, 1996, p. 129). La dimensione storica della matematica ha un'importanza ben precisa in un'ottica didattica, anche se considerare la storia della matematica come una specie di «laboratorio in cui esplorare lo sviluppo della conoscenza matematica» (Radford, 1997, p. 26) richiederebbe l'accettazione di un punto di vista teorico per giustificare il collegamento tra lo sviluppo concettuale nella storia e quello moderno (problemi rilevanti sono connessi all'interpretazione dei dati storici, inevitabilmente condotta alla luce dei nostri attuali paradigmi culturali: Gadamer, 2000).

Se inoltre è vero che «gli oggetti matematici sono strumenti intellettuali e cognitivi che ci permettono di riflettere e di agire sul mondo» (Radford & Empey, 2007, p. 250, trad. nostra), è anche innegabile che tali strumenti riflettono le concezioni di chi li elabora, di chi li inquadra in regole e convenzioni, di chi li usa. All'origine e al centro della matematica stanno gli esseri umani, persone che sono vissute e vivono all'interno di varie società, con differenti esigenze e tradizioni culturali. Sarebbe difficile immaginare che culture di base radicalmente diverse abbiano prodotto, nella storia, le stesse idee matematiche e possano comportare, oggi, gli stessi percorsi per avvicinarsi a quello che indichiamo con "fare matematica" (si veda il contributo di L. Grugnetti e L. Rogers in Fauvel & van Maanen, 2000). Una dimensione geografica non può dunque essere trascurata, anche per l'influenza che, quasi simmetricamente, la matematica può esercitare sui suoi utilizzatori.

Epistemologia… ed ermeneutica

Se per molti versi è innegabile che un certo tipo di matematica, nella società occidentale, venga posta alla base dello sviluppo tecnologico, ciò non significa che solo quella sia "la matematica che serve". Ogni forma di matematica ha un ruolo nella cultura in cui essa è stata sviluppata ed elaborata. Un'eventuale preferenza accordata a una forma di matematica è una *scelta*, non l'obbligatoria contemplazione di una realtà "là fuori", per usare la celebre espressione di Richard Rorty (1931–2007: Rorty, 2003, p. 11; Bagni, 2008). Un dialogo è sempre possibile e auspicabile: una "conversazione" sviluppata sul piano dell'ermeneutica e non dell'epistemologia tradizionale (Rorty, 2004, pp. 631–637; Melucci, 2000, pp. 81–82) può essere mantenuta anche con chi avesse fatto scelte diverse dalla nostra. Un esempio storico–geografico contribuirà a illustrare quanto ora affermato.

L'indiano Bhaskara (1114–1185), si occupò del valore del *kha–hara*, una frazione avente denominatore nullo. Egli scrisse in *Bijaganita* (cit. in Datta & Singh, 1935, p. 243, trad. nostra):

> Una quantità divisa per zero diventa una frazione il cui denominatore è zero [*kha–hara*]. Questa frazione viene denominata quantità infinita. In questa quantità avente zero come divisore non c'è alcu-

> na alterazione, sebbene molti possano essere aggiunti o tolti, così come nessun cambiamento può aver luogo nella divinità immutabile quando i mondi vengono creati o distrutti.

Non sarebbe ovviamente possibile far riferimento agli stessi "principi generali" (Feyerabend, 2003) nell'accostare l'argomentazione di un indiano che descrive le caratteristiche del reciproco di 0 pensando all'immensità della divinità alle considerazioni di un moderno matematico occidentale basate sul concetto di limite. Il matematico comprenderebbe forse l'argomentazione dell'indiano (e viceversa), la considererebbe curiosa, magari divertente: tra i due personaggi, dunque, non sarebbe inibito il dialogo, quella che Rorty (2004) chiama una conversazione. Tuttavia non potrebbe essere raggiunto un accordo razionale, a causa della rilevata mancanza di principi generali "matematici" di riferimento condivisi e per la plausibile mancanza di una comune concezione di "razionalità".

Didattica… e didattiche

Quale ruolo didattico attribuire a considerazioni come quelle ora proposte? In che senso può o deve essere inteso un confronto dialettico tra forme diverse di matematica e di razionalità? Quali livelli scolastici possono essere interessati da un percorso del genere? Una dettagliata discussione di ciò esula dagli scopi di queste brevi note. Ci limitiamo a segnalare che già nell'ambito dei programmi tradizionali è possibile parlare di matematiche al plurale (le geometrie non euclidee, ad esempio, possono essere sviluppate in questo senso). La possibilità di introdurre e giustificare in modo vario una proposizione sulla base di diversi standard di rigore, anch'essi peraltro da inquadrare storicamente e geograficamente (D'Amore, 2005), può fornire occasione per riflessioni significative.

Semiotica… e artefatti

Nella stessa direzione, e più particolarmente, è opportuno garantire la necessaria attenzione ai processi semiotici di formazione delle idee matematiche, ad esempio collegando l'uso dei segni, secondo la classificazione di Charles S. Peirce (1839–1914) icone, indici o simboli, a scelte culturalmente situate e non assimilabili a un unico atteggiamento standardizzato (Bagni, 2007). Tutto ciò porta dunque a considerare importanti questioni legate aicontesti socio–culturali. Dato che il processo semiotico si basa in termini essenziali sull'interpretante, cioè sulla reazione suscitata nell'interprete, appare evidente il ruolo di chi si trova ad interpretare un segno. E questo interprete–operatore non è un soggetto astratto, bensì una persona viva, inserita in una comunità culturale, con un bagaglio di tradizioni, di credenze, di usi. Alcune culture, ad esempio, hanno riservato e riservano un ruolo preminente alla rappresentazione iconica o ai riferimenti concreti (Bagni, 2006).

Nonostante spesso la matematica sia considerata dai punti di vista simbolico e iconico, una prospettiva indicale è di notevole importanza (si pensi al ruolo di mediazione connesso all'uso di artefatti: Bartolini Bussi & Maschietto, 2006), in vari livelli scolastici, anche con riferimento ad allievi molto giovani. La considerazione di una prospettiva indicale può peraltro riflettersi in un costrutto teorico introdotto alcuni anni fa da Y. Chevallard (1989) che scrive: «La quantità di matematica cristallizzata presente in un oggetto è […] quanto io chiamo grado (o contenuto, o tenore) matematico di tale oggetto» (Chevallard, 1989, p. 50, trad. nostra). Al tenore matematico dell'oggetto si affianca il suo "valore" aggiunto, cioè la quota di attività e di tempo necessaria a un operatore per utilizzare tale oggetto; e «mentre il grado degli strumenti matematici aumenta progressivamente, il loro valore matematico […] diminuisce» (Chevallard, 1989, p. 52). Dal punto di vista didattico, il ricorso all'indicalità può essere considerato un tentativo di utilizzare strumenti con un minore grado matematico. Ciò può avere alcuni aspetti degni di nota: il ricorso a strumenti dal grado matematico (eccessivamente) elevato può comportare un inutile appesantimento della trattazione. Se si fa inoltre riferimento a un'attività matematica, è plausibile supporre che una risoluzione con uno strumento con un minore grado matematico richieda un maggiore "valore" aggiunto da parte dell'operatore.

Verso una conclusione

Radford ed Empey (2007, p. 250), dopo aver ribadito che «gli oggetti matematici non sono entità preesistenti, ma piuttosto oggetti concettuali generati nel corso dell'attività umana», sottolineano che «la matematica è molto più di una forma di produzione del sapere – una pratica di teorizzazione. Se è vero che le persone creano la matematica, non è meno vero che, viceversa, la matematica influenza i modi di essere, di vivere e di pensare delle persone»: dunque «la matematica crea le condizioni per il sorgere di certe forme di soggettività e di comprensione».

Una formazione attenta agli aspetti segnalati non appare semplice da molti punti di vista (basti ricordare quello, delicato, della sua valutazione): si tratta di creare una sensibilità a una problematica vasta e complessa, sensibilità che potrà avvalersi in modo significativo del ruolo degli insegnanti in servizio. Sarà importante ancorare la riflessione epistemologica e metodologica ad argomenti significativi dei programmi. Sottolineiamo inoltre che alcune esperienze di formazione (ad esempio il Master in Didattica delle Scienze, attualmente in corso, soprattutto in alcune sedi, come quella di Udine) tengono conto di considerazioni come quelle delineate, anche in un'ottica interdisciplinare.

La riflessione nella matematica e sulla matematica sta rivedendo le concezioni del passato sulla certezza, sulla precisione, sul rigore. Gian–Carlo Rota (1932–1999) ha osservato che «forse sono le nostre idee vittoriane sulla necessità della certezza di assiomatizzazione che sono ingenue e non realistiche. Forse il nostro compito consiste nel vivere rigorosamente con l'incertezza» (Kac, Rota & Schwarz, 1986, p. 3; trad. in Lerda, 2007, p. 98); e lo stesso Rota non esita a puntare l'indice contro l'«attuale follia per la precisione» (Kac, Rota & Schwarz, 1986, p. 264; trad. in Lerda, 2007, p. 98). Non intendiamo sostenere che la matematica dei nostri giorni possa pensarsi ridotta a una forma di follia: una matematica intesa alla stregua di una "follia" ci porterebbe almeno ad affermare, con il Bardo, *Though this be madness, yet there is method in 't* (*Hamlet*, Atto II). Ma in un momento in cui la matematica sta riflettendo sulla propria natura interna, la sua didattica non può ostinarsi a parlare «il linguaggio del passato» (Melucci, 2000, p. 19). Sarebbe questa la vera follia.

Alcuni riferimenti bibliografici

Bagni, G.T. (2006). *Linguaggio, storia e didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Bagni, G.T. (2007). *Rappresentare la matematica. Simboli, parole, artefatti e figure.* Roma: Aracne.

Bagni, G.T. (2008). Richard Rorty (1931–2007) and his legacy for mathematics educators. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 1, 1–2.

Bartolini Bussi, M.G. & Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Collana Convergenze. Berlin: Springer.

Chevallard, Y. (1989). Implicit Mathematics: Its Impact on Societal Needs and Demands. In J. Malone, H. Burkhardt & C. Keitel (Eds). *The Mathematics Curriculum: towards the year 2000* (pp. 49–57). Perth: Curtin University of Technology.

D'Amore, B. (2005). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (Nyaya). *For the Learning of Mathematics* 25, 2, 26-32.

Datta, B. & Singh, A. (1935). *History of Hindu Mathematics: a source book.* Lahore: Motilal Banarsi Das.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds) (2000). *History in mathematics education. ICMI Study*. Dodrecht: Kluwer.

Feyerabend, P.K. (1996). *Ambiguità e armonia*. Roma-Bari: Laterza.

Feyerabend, P.K. (2003). *Contro il metodo*. Milano: Feltrinelli (1975, *Against method. Outline of an anarchistic theory of knowledge*. London: Verso).

Gadamer, H.G. (2000). *Verità e metodo*. Milano: Bompiani (1960, *Wahrheit und Methode: Grundzüge einer philosophischen Hermeneutik*. Tübingen: Mohr).

Kac, M., Rota, G.C. & Schwarz, T.T. (1986). *Discrete Thoughts*. Boston: Birkhäuser.

Lerda, F. (2007). *Intelligenza, conoscenza, realtà*. Soveria Mannelli: Rubbettino.

Melucci, A. (2000). *Culture in gioco. Differenze per sopravvivere.* Milano: Il Saggiatore.

Radford, L.: 1997, On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics* 17, 1, 26-33.

Radford, L. & Empey, H. (2007). Culture, knowledge and the Self: Mathematics and the formation of new social sensibilities in the Renaissance and medieval Islam. *Revista Brasileira de História da Matemática*. Festschrift Ubiratan D'Ambrosio, Especial 1, 231–254.

Rorty, R. (2003). *La filosofia dopo la filosofia*. Roma–Bari: Laterza (1989, *Contingency, irony, and solidarity*. Cambridge: Cambridge University Press).

Rorty, R. (2004). *La filosofia e lo specchio della natura*. Milano: Bompiani (1979, *Philosophy and the mirror of nature*. Princeton: Princeton University Press).