I.C. Tavagnacco, 16 febbraio 2009
Progetto Lauree Scientifiche

Matematica e strumenti

Spunti per un'ermeneutica dell'apprendimento

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

«I giovani non si orientano nel numero che sarebbe ragionevole e auspicabile verso le professioni e i saperi scientifici. Negli anni precedenti le immatricolazioni universitarie in quei settori sono **calate mediamente di oltre il 55%,** con un leggero, ma insufficiente, recupero negli ultimi due anni. Le indagini internazionali (IEA, OCSE) rivelano lacune assai preoccupanti nelle nostre giovani generazioni e nel paese. Questi e molti altri allarmanti indicatori ci mostrano una grave crisi di civiltà. Siamo di fronte ad una pericolosa perdita di peso internazionale, alla contrazione delle opportunità offerte alle nostre giovani generazioni, al rischio della marginalizzazione italiana nella società mondiale della conoscenza» (Doc. 2007 Gruppo di lavoro per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica, Luigi Berlinguer).

Matematica, una situazione delicata

- Secondo dati del MPI, il 42% degli studenti delle scuole secondarie di II grado viene promosso con debiti.
- L'anno scorso **i debiti in matematica hanno toccato (nella media nazionale) il 44%,** con punta del 51,3% nei licei scientifici.
- Per le situazioni normative (abbastanza diversificate) e i dati in altri paesi europei si veda la banca dati per i sistemi informativi Eurybase della rete Eurydice, www.eurydice.org.

Matematica, una sfida per la scuola

- L'Unione Matematica Italiana, con gli organismi ministeriali e con la Società Italiana di Statistica, ha predisposto negli ultimi anni alcune riflessioni:
- **Matematica 2001.** Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. Scuola Primaria e Secondaria di I grado
- **Matematica 2003.** Attività didattiche e prove di verifica. Ciclo secondario
- **Matematica 2004.** La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica. Ciclo secondario: 5ª classe.

Matematica, una sfida per la scuola

- Nei **provvedimenti per incentivare le scelte universitarie scientifiche** sarà quindi indispensabile tenere conto di una rivalutazione della matematica e, in generale, di tutte le discipline scientifiche.
- Alcuni progetti offrono importanti modelli culturali, metodologici e istituzionali:
- **PON–SeT** (soprattutto Italia meridionale e isole),
- i progetti promossi dal Ministero della Pubblica Istruzione come **ISS** (Insegnare Scienze Sperimentali, dedicato a fisica, chimica e scienze naturali, ma con riflessi anche in ambito matematico)…

Matematica, una sfida per la scuola

- … e più specificamente **Mat@bel** (per la formazione in presenza e a distanza di docenti di matematica)
- il **Progetto Lauree Scientifiche**, promosso dal Ministero dell'Università e della Ricerca.
- La **XVII Settimana della Cultura scientifica e tecnologica** (19–25 Marzo 2007), varata dal Ministero dell'Università e della Ricerca e dal Ministero della Pubblica Istruzione, è stata dedicata a "La natura e la civiltà delle macchine" e ha dato opportunità anche in sede locale di sviluppare interessanti iniziative collegate alla matematica.

Matematica, matematiche e programmi

- Sarebbe difficile riassumere gli obiettivi stabiliti per l'area logico–matematica nei programmi scolastici italiani, anche perché essi risentono chiaramente dei momenti in cui tali programmi sono stati elaborati.
- Una riflessione sull'insegnamento–apprendimento della matematica nella scuola italiana che possa risultare organica e per qualche verso completa rischierebbe dunque di essere utopistica.
- Si tenga inoltre presente che **ogni trasposizione didattica sottintende una posizione epistemologica:** proporremo qualche riflessione in tal senso.

Perché la situazione è così difficile?

- **Una matematica senza storia,**
- **Una matematica senza geografia,**
- **Una matematica "là fuori"**

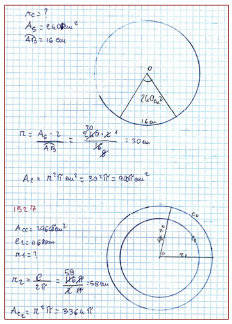
è senza dubbio
una matematica ben poco attraente!

Per "fare matematica"… *… serve qualcosa?*

"Give us enough chalk"
(André Weil)

Matematica e strumenti, un abbinamento… naturale!

- Potremmo confondere, a prima vista, il "quaderno di italiano" e il "quaderno di storia", o scambiare gli appunti di letteratura latina con quelli di filosofia: **ma i disegni del quaderno di geometria sono inconfondibili.**
- E ovviamente per realizzare tali disegni servono degli **strumenti!**



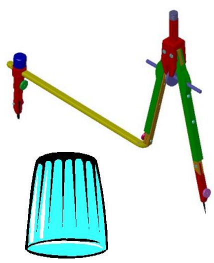
Il cerchio, il compasso, il bicchiere…

- Fin dai tempi più antichi l'uomo avrà individuato una figura "interessante" (un cerchio) ad esempio nella sezione di un tronco d'albero (un cilindro può rotolare facilmente).
- Oggi, i nostri allievi chiamati a tracciare una circonferenza possono usare sia il compasso… che, ad esempio, un (meno nobile) bicchiere.

Ma che differenza c'è tra l'uso del *compasso* e l'uso del *bicchiere?*

Il cerchio, il compasso, il bicchiere…

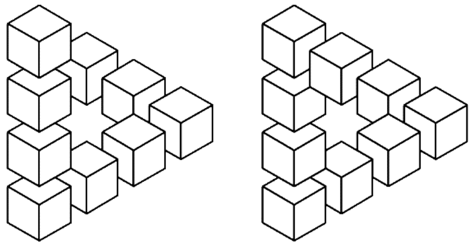
- La principale differenza tra i due modi di procedere, e tra i due strumenti da utilizzare, è così riassumibile: **il compasso "incorpora" la definizione euclidea di circonferenza.**
- **È dunque necessario "interpretare" lo strumento!**



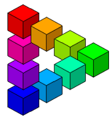
Ma che differenza c'è tra l'uso del *compasso* e l'uso del *bicchiere?*

Strumenti da interpretare
“Guardiamo” una figura…

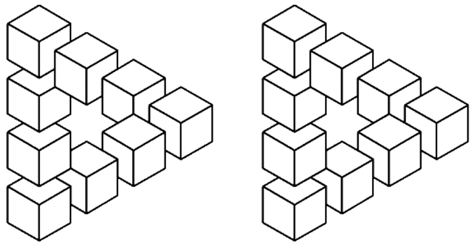
- Osserviamo la figura qui sotto a sinistra: nessun problema nel percepire un insieme di cubetti…
- **Ma se quella a destra (*Opus 1*, O. Reutersvärd)?**



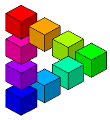
Strumenti da interpretare
“Guardiamo” una figura…

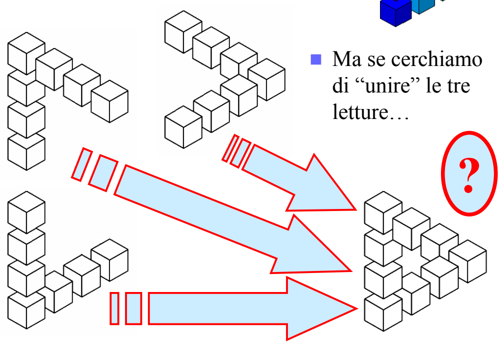


- Se eliminiamo due cubetti da uno dei tre lati, l’ambiguità si dissolve…



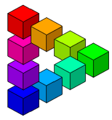
Strumenti da interpretare
“Guardiamo” una figura…





- Ma se cerchiamo di “unire” le tre letture…

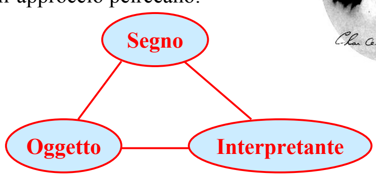
Strumenti da interpretare
“Guardiamo” una figura…



- Un punto chiave è il seguente:
  non esistono figure “oggettive”, universalmente efficaci
  secondo regole e modalità fisse
  e valide per tutte le tradizioni culturali.
- La matematica richiede l’interpretazione di segni, di immagini, la gestione (contemporanea) di diversi registri rappresentativi.
- E tutto ciò non può essere considerato indipendentemente da un contesto socio-culturale.

Peirce: segno, oggetto
interpretante

- Il **triangolo semiotico** è alla base dell’approccio peirceano:



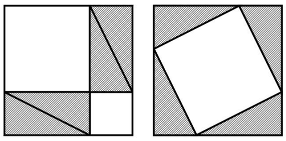
- L’**oggetto** è rappresentato da un **segno** (*icona*, *indice* o *simbolo* a seconda che si abbia una rassomiglianza, una connessione causale o una convenzione) e suscita un **interpretante**, cioè una reazione in chi interpreta.

Matematica e segni
nella semiotica peirceana

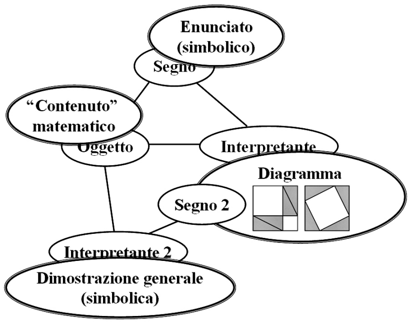
- Il **diagramma** rappresenta iconicamente la relazione matematica: rimane tuttavia **il problema dell’individualità dell’oggetto sul quale si sviluppa la dimostrazione contrapposta all’universalità delle conclusioni.**
- Il diagramma-icona tracciato per dimostrare ad esempio un teorema geometrico **è interpretante dell’enunciato simbolico** che traduce secondo alcune convenzioni (un’intenzione, dice Peirce).
- Questo diagamma-icona **determina infine un nuovo interpretante simbolico e universale (la dimostrazione)**.

Una fase iconica tra due momenti simbolici?

- Consideriamo il teorema di Pitagora:
- **Enunciato** (universale): in **ogni** triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.
- Da qui passiamo ad un **interpretante iconico…**
- **Diagramma:** il quadrato a sinistra e il quadrato a destra sono congruenti e il confronto delle loro scomposizioni verificare il teorema **(per questo caso).**

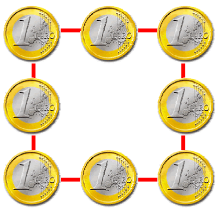


Una fase iconica tra due momenti simbolici?



Non solo icone (o simboli): giochiamo con alcune monete…

- Disponiamo le monete in modo che ogni lato del quadrato ne comprenda tre.
- Come possiamo fare per formare con le stesse otto monete un quadrato con **quattro monete per lato?**
- Se consideriamo le monete come dei **"punti–posizione"** (iconicità) l'esercizio è impossibile.
- Ma considerandole (indicalità) concrete **monete…**



La didattica della matematica verso una pluralità di segni

- Alcune considerazioni didatticamente molto importanti:
  - **uno stesso segno può essere interpretato** in modi diversi: può essere attribuita maggiore o minore importanza agli aspetti iconici, indicali, simbolici.
  - **ciò dipende dal segno, ma anche da chi è chiamato a interpretare,** dai contesti socio–culturali che hanno alle spalle i nostri allievi (problema che supera l'ambiente scolastico).
  - **da ciò dipende il comportamento degli allievi, dunque** il loro apprendimento.

Euclide: la geometria greca rinuncia agli "strumenti"?

- Ci resta da capire che cos'è l'"oggetto" che sta alla base delle rappresentazioni (segni) della matematica.
- Consideriamo la **definizione euclidea di cerchio** (*Elementi*, I, Def. XV) come figura piana racchiusa da una linea (circonferenza) tale che i segmenti tirati da un punto interno ad essa siano tutti uguali:
- «Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea [, cioè sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro».

Euclide: la geometria greca rinuncia agli "strumenti"?

- Essa è molto vicina alla moderna nozione di luogo geometrico e può apparire diversa dalla **definizione euclidea di sfera** (*Elementi*, Libro XI, Definizione XIV) che si riferisce alla figura solida generata da un semicerchio quando questa ruota attorno al proprio diametro:
- «Sfera è la figura che viene compresa quando, restando immobile il diametro di un semicerchio, si faccia ruotare il semicerchio intorno al diametro finché non ritorni nuovamente nella stessa posizione da cui si cominciò a farlo muovere».

Euclide: la geometria greca rinuncia agli “strumenti”?

- Quest’ultima descrizione, nota Enrico Giusti (1999, p. 23), «evoca più il tornio dell’operaio che il compasso del geometra».
- Sulla base di ciò avanziamo un’ipotesi per interpretare le definizioni euclidee…
- … che gli oggetti matematici provengano non dall’astrazione di oggetti reali, dei quali essi descriverebbero le caratteristiche, bensì (Sfard) **da un processo di oggettificazione di procedure.**

Riprendiamo criticamente Peirce: il ruolo del contesto culturale

- Torniamo a Peirce. Egli ha ragione quando afferma che il significato si connette in qualche modo all’esperienza. Ma il suo concetto di conoscenza **risente del punto di vista di un singolo, “in prima persona”.**
- La comunità, secondo Peirce, è definita dalla *comune logica* (CP 5.354). **Esiste una comunità di persone pensanti in quanto esiste una logica oggettiva.**
- Secondo Peirce, quindi, noi viviamo in un mondo i cui oggetti sono intelligibili e semioticamente conoscibili, sebbene per conoscerli dobbiamo impegnarci in un processo di semiosi illimitata…

Riprendiamo criticamente Peirce il ruolo del contesto culturale

- …tuttavia a dispetto dell’accento posto sulla pratica, il pragmatismo di Peirce «è del tutto razionalistico» (Smith, 1983, p. 49). L’individuo è una sorta di astrazione: **l’essere umano, per Peirce, non è un prodotto della storia e della cultura, né lo è la sua conoscenza del mondo** (seguo: Radford, 2006).
- Ma la natura culturale del linguaggio ci fa notare che **l’interpretazione non può ridursi a un atto in cui *qualcuno* (il soggetto) si riferisce a *qualcosa* (l’oggetto).** Ciò causerebbe una deriva solipsistica in contrasto con la presenza di oggetti ideali in una rete di categorie culturali (Luria, 1984, p. 62).

Riprendiamo criticamente Peirce: il ruolo del contesto culturale

- Secondo Radford ed Empey, **«gli oggetti matematici non sono entità preesistenti, ma piuttosto oggetti concettuali generati nel corso dell’attività umana»** (vale anche per oggetti non iconicamente consistenti).
- Si noti che «la matematica è molto più di una forma di produzione del sapere – una pratica di teorizzazione. **Se è vero che le persone creano la matematica, non è meno vero che, viceversa, la matematica influenza i modi di essere, di vivere e di pensare delle persone»:** dunque «la matematica crea le condizioni per il sorgere di certe forme di soggettività e di comprensione» (Radford & Empey, 2007, p. 250).

Ancora uno spunto di Heidegger

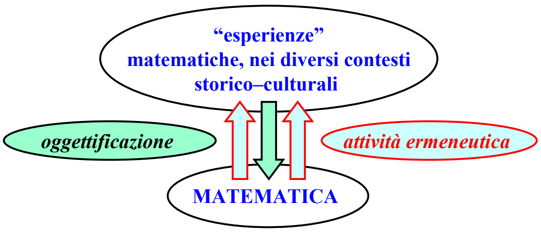
- Secondo Heidegger (*Wegmarken*, ma 1927) possiamo considerare due tipi di scienza: **la pura scienza dell’essere** (filosofia) **e le “scienze positive”:**
- «Ci sono necessariamente due possibilità fondamentali di scienza: scienze degli enti o scienze ontiche e *la* scienza dell’essere o scienza ontologica, la filosofia. Le scienze ontiche hanno sempre per tema un ente dato che in un certo modo è già sempre svelato *prima* dello svelamento scientifico. **Le scienze di un ente dato, di un positum, noi le chiamiamo scienze positive»** (Heidegger, 1987).
- Per considerare la matematica come una scienza positiva, **è necessario precisarne il *positum*.**

Dal *positum* alla matematica Un’ipotesi per un percorso

- Come prima possibilità, potremmo identificare il *positum* della matematica con le **“esperienze matematiche”** (cioè con attività storicamente e culturalmente collocate i cui oggetti, metodi e scopi siano inquadrabili in un sistema di pensiero teorico detto “matematica”).
- Ma in questo caso la “matematica” stessa sarebbe parte di tali esperienze, **con una progressiva articolazione storica e culturale** (Heidegger, 1987). E tutto ciò fa riferimento a una “definizione di matematica” che inevitabilmente varia nella storia e nelle culture.

Dal *positum* alla matematica
Un'ipotesi per un percorso

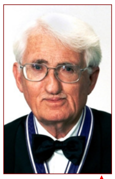
- È necessario precisare in termini più dettagliati il passaggio dal *positum* alla matematica propriamente detta: è **soltanto un'oggettificazione?**



Dal *positum* alla matematica
Un'ipotesi per un percorso

- È inoltre necessario interrogarsi sul significato del termine ***oggetto*.**
- Per Kant l'oggetto è ciò che esiste e *sta di fronte* (*Gegenstand*) nell'esperienza delle scienze naturali. Tuttavia non ogni cosa che *sta di fronte* è un oggetto: ad esempio il "dovere morale" non lo è, e quando riflettiamo su di esso (pensando e parlando) non ne realizziamo un'oggettificazione.
- Più in generale, dunque, **l'esperienza di qualcosa in senso lato non può essere comunque collegata (soltanto!) a una forma di oggettificazione** (Heidegger, 1987, p. 29).

Dal *positum* alla matematica
Un'ipotesi per un percorso

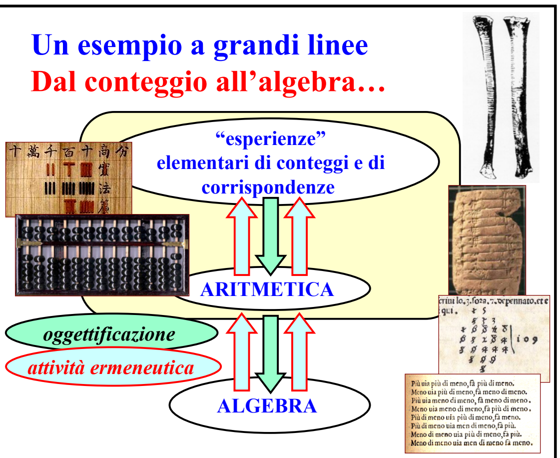


- Un percorso che tenga conto dell'attività ermeneutica del soggetto può essere:
- **(I) Un'esigenza porta all'organizzazione di una prassi sociale** (una "esperienza matematica", storicamente collocata, collegata alla forma di **razionalità** di una cultura).
- **(II) Tale prassi sociale viene espressa e manipolata semioticamente,** dunque mediata da linguaggi, segni, interazioni, artefatti.
- **(III) Ciò porta alla sua concettualizzazione,** dunque alla nascita di un elemento del sapere matematico (che però non deve intendersi in termini troppo oggettivi).

Dal *positum* alla matematica
Un'ipotesi per un percorso

- Questo schema non deve interpretarsi in termini definitivi, "bloccati".
- **Il processo può ripetersi,** ad esempio se **altre esigenze** si manifestano in **contesti culturali nuovi.**
- Un elemento del sapere matematico può essere ripreso e portare a nuove concettualizzazioni.

Un esempio a grandi linee
Dal conteggio all'algebra…



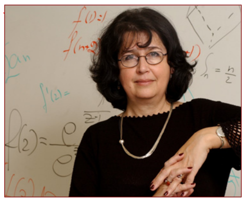
Un esempio a grandi linee
Dal conteggio all'algebra…

- **Importante:** tutto ciò è vicino alla **filogenesi.**
- **In ambito propriamente didattico** le cose possono cambiare: molte ricerche hanno studiato e studiano i rapporti aritmetica–algebra.
- Ricordiamo che dal punto di vista **ontogenetico** è essenziale sottolineare il potere di trasformazione della conoscenza che agisce sia sull'oggetto che sul soggetto (Radford, 2008). La **relazione dialettica tra essi ci ha portato a dire che l'apprendimento è un processo di oggettificazione** (***knowing***) **e di soggettificazione** (***being***).

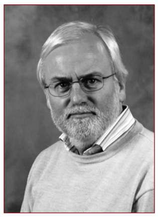
Per “concludere”… una critica

- Dunque quanto visto **non intende limitarsi a speculazioni**, ma deve essere applicato nella didattica.
- Scrive criticamente **Anna Sfard** (2008, p. xiv):
  «I seguaci socioculturalisti di Vygotskij non riescono a **comunicare le loro ricche idee in modo abbastanza chiaro da far sorgere un programma di studi ben definito.** L’incapacità di cogliere la complessità dei fenomeni umani può essere una questione di inadeguatezza dei nostri metodi analitici, una debolezza che, in assenza di definizioni esplicite e operative, sembra incurabile. […] Senza definizioni chiare si resta in balia delle metafore, di concetti creati per trasferire termini familiari in territori sconosciuti».

Per “concludere”…



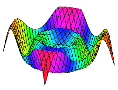
- **Accetto tale critica**: uno stimolo per proseguire!
- Come ricordo la grande “reaction” (CERME–6) alla plenaria di Radford da parte di **Heinz Steinbring**…



- …il quale evidenzia il ruolo della **comunicazione** (e in ciò ricorda la ***commognition***, «una combinazione di ***communication*** e ***cognition***: la comunicazione interpersonale e il pensiero individuale sono aspetti dello stesso fenomeno»: A. Sfard).

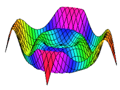
Per “concludere”…

- La mia “conclusione” è ancora generale: rivaluta **una posizione attiva del discente,** il quale nel fondamentale momento interpretativo, una fase che si rinnova continuamente,
  – costruisce un senso al sapere in gioco
  – e viene influenzato da tale sapere.
- E l’insegnante è una figura chiave a tale proposito: deve infatti seguire questa fase delicatissima con la necessaria consapevole prudenza.
- **Interpretare, quindi,**
  – per *costruire* (*knowing*)
  – e per *vivere* (*being*)
  il senso di un sapere.

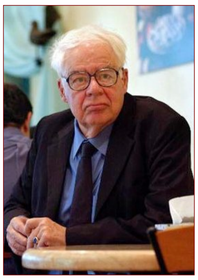


Per “concludere”…

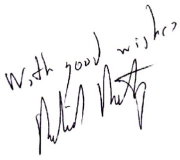
- Anche la matematica può insomma impostarsi su di un approccio ermeneutico: è un’**attività umana**, non l’accesso a una (o “alla”) Verità.
- **La matematica può certamente collegarsi al mondo reale; ma la matematica non “è la Verità”** (seguendo idealmente Richard Rorty).
- Il fatto che una proposizione venga classificata “vera” non significa che essa corrisponda…
- **…a qualcosa di vero, di assoluto, di bello che si trova “là fuori”.**



Per “concludere”…



- È rischioso invocare la scoperta di una (o “della”) verità “là fuori”: **«il mondo è là fuori, ma le descrizioni del mondo non lo sono.**
- **Solo le descrizioni del mondo possono essere vere o false. Il mondo di per sé – a prescindere dalle attività descrittive degli uomini – non può esserlo».**



Per “concludere”…

- **A mio avviso, considerazioni come queste non devono (non possono) avere la pretesa di essere “conclusive”.**
- Chiudiamo dunque la nostra riflessione citando la serena espressione con cui **Gadamer** chiuse il poscritto all’edizione 1972 del proprio *Verità e metodo*:
  «Un cattivo ermeneuta è colui che si illude di dover avere l’ultima parola»