SFIDA–31, UNIVERSITÀ DI TORINO, 22 MAGGIO 2009

Incognite e parametri nella storia dell'algebra

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

Abstract. In this paper we shall consider some historical examples (by Luca Pacioli and Rafael Bombelli) in order to investigate the coevolution of algebraic methods and languages in the Renaissance. We shall point out the importance of the social and cultural context and discuss some educational implications with reference to the use of parameters.

Key words. Algebraic language – Bombelli – Pacioli – parameters – quadratic equations

Sommario. Nel presente articolo considereremo alcuni esempi storici (Luca Pacioli, Rafael Bombelli) per esaminare a coevoluzione di metodi e linguaggi algebrici nel Rinascimento. Metteremo in evidenza l'importanza del contesto sociale e culturale e discuteremo alcune implicazioni didattiche con riferimento all'uso di parametri.

Parole chiave. Linguaggio algebrico – Bombelli – Pacioli – parametri – equazioni quadratiche

1. Didattica dell'algebra tra variabili, incognite, parametri…

Storicamente, l'algebra deriva da ciò che Paul R. Ehrlich e Peter H. Raven (1964) chiamano una *coevoluzione* che coinvolge i tipi di problemi, i linguaggi, i diversi ambiti numerici, le strutture. Scrive Jean–Philippe Drouhard (2007, p. 11):

> I concetti si evolvono insieme con i sistemi di rappresentazione semiotica, con gli strumenti […], infine con le regole del gioco (il modo di fare matematica) e perfino con la denominazione stessa di matematica […]. È necessario descrivere questa coevoluzione, analogamente a quanto accade per i fiori e per le farfalle, la cui evoluzione non potrebbe essere compresa se non nei termini di una coevoluzione.

La presente ricerca è dedicata a un importante momento di questo procedimento evolutivo che si colloca nel Rinascimento. Alla presentazione di alcuni esempi tratti dalla storia della matematica premettiamo però alcune considerazioni didattiche (Puig, Ainley, Arcavi & Bagni, 2007).

Alcune questioni collegate e alla distinzione tra variabili, incognite e parametri e, segnatamente, all'uso dei parametri sono da tempo trattate nella didattica della matematica (citiamo Šedivý, 1976; Bloedy–Vinner, 2001; Antonini, 2006). Spesso è stata segnalata l'opportunità di una chiarificazione terminologica (Chiarugi, Fracassina, Furinghetti & Paola, 1995). A. Schoenfeld e A. Arcavi (1988) elencano molte parole talvolta usate come sinonimi del termine "variabile": indeterminata, incognita, parametro, costante, simbolo, segnaposto, argomento, puntatore, nome, spazio vuoto, riferimento, indice, quantità, lettera, grandezza…

Da un punto di vista epistemologico e didattico (ma, come vedremo, anche per quanto riguarda alcuni aspetti della storia della disciplina), un punto chiave è la presenza "tacita" di quantificatori, come sottolineato da F. Arzarello (1988, p. 116):

> Equazioni, identità, equazioni parametriche, ecc. si configurano in una veste matematicamente significativa, cioè come formule matematiche contenenti dei quantificatori nascosti. Risolvere un'equazione vuol dire verificare se un enunciato esistenziale puro è vero; trovare che è vero il corrispondente enunciato universale significa scoprire che l'equazione è un'identità; introdurre parametri nelle equazioni vuol dire passare a formule più complesse, con un quantificatore universale seguito da uno esistenziale.

Un corretto uso del parametro richiede dunque due livelli di comprensione: la gestione del simbolismo del linguaggio algebrico e quella relativa all'uso dei quantificatori. La quantificazione deve tener conto del campo d'azione (Bagni, Gorla & Labella, 2008, p. 129) in cui il quantificatore opera e proprio in ciò può essere possibile individuare una caratteristica didatticamente interessante.

Pur senza con ciò proporre una suddivisione rigida, consideriamo tre esempi:

Problema A (numerico): 35 è un numero primo?

Una possibile risoluzione (ovviamente non certo l'unica!) che porta alla risposta negativa potrebbe essere data notando che $35 = 36–1 = 6^2–1^2 = (6+1)(6–1)$.

Consideriamo inoltre:

Problema B (con una variabile): il precedente di n^2 (n naturale maggiore di 2) è primo?

L'approccio potrebbe essere lo stesso, basato sulla constatazione: $n^2–1^2 = (n+1)(n–1)$.

Il passaggio dal problema A al problema B riflette certamente una generalizzazione, in quanto si passa da "una cosa da fare" a "tante cose da fare" (storicamente ci riferiremo alla *logistica speciosa* che Viète contrapponeva alla *logistica numerosa* di Diofanto). Le "cose da fare" sono però collegate da un'analogia e un'implicita quantificazione universale "estende" il procedimento a tutti i casi.

Consideriamo invece:

Problema C (con un parametro): il precedente di m (m naturale) è primo?

Questo problema *non* è sempre risolubile: il ruolo di m è essenziale e determina sia la possibilità di risolvere il problema con un certo metodo (si noti che non tutti i numeri primi hanno per successivo un quadrato) che, ovviamente, la stessa risposta al quesito.

Dal punto di vista epistemologico non sembrano esserci differenze tali da suggerire una diversa classificazione per n (problema B) e m (problema C). Entrambi possono essere considerati "parametri". Tuttavia, dal punto di vista didattico i loro ruoli sono significativamente diversi.

Approfondiamo la nostra analisi con la considerazione di alcuni riferimenti storici.

2. Problemi ed equazioni nella storia della matematica occidentale

La storia dei procedimenti oggi considerati equivalenti alle equazioni algebriche risale all'Antichità. Le equazioni, in particolare di primo grado, venivano spesso risolte per tentativi, ma ciò non significa che le antiche risoluzioni non abbiano una qualche sistematicità (si consideri ad esempio il "metodo di falsa posizione" che troviamo applicato già in alcuni papiri egiziani; si osservi tuttavia che «il metodo di falsa posizione non è una regola algebrica in senso moderno in quanto non è, in senso stretto, un algoritmo che agisce solo sui coefficienti»: Franci & Toti Rigatelli, 1979, p. 20).

Anche presso i babilonesi i procedimenti algebrici, seppure espressi mediante esempi, riflettono forme di ragionamento generali (Neugebauer, 1974). Non esisteva alcuno strumento simbolico completo presso i babilonesi: talvolta, dunque senza sistematicità, qualche incognita veniva indicata mediante simboli speciali. In generale, le quantità incognite erano concretamente indicate dai termini *lunghezza* (per le incognite di primo grado), *area* (incognite di secondo grado), *volume* (incognite di terzo grado); ma i matematici babilonesi sembrano consapevoli del valore esclusivamente indicativo di tali termini: infatti nessuno scrupolo impediva loro di addizionare ad esempio lunghezze e aree o aree e volumi (a differenza di quanto farà, ad esempio, Viète con il suo principio di omogeneità). L'incognita (*aha* = "mucchio", per gli antichi Egizi) sarà più tardi indicata dal termine arabo *šay'* شَيْء = "cosa". In Spagna tale termine veniva pronunciato "šei" e quindi scritto *xei*, da cui deriva la consueta abbreviazione in x.

La risoluzione di equazioni di secondo grado e di sistemi algebrici lineari con il metodo di trasporto e semplificazione viene fatta risalire a Muhammad ibn Mūsa al–Khwārizmī (intorno al 830). Solo con l'introduzione della "Regola d'Algebra" (inizialmente in ambiente arabo, quindi ripresa nell'Europa tardo–medievale e rinascimentale) si può parlare di risoluzione in senso moderno. La "Regola d'algebra" (Franci &Toti Rigatelli, 1979, p. 7) era il procedimento per la risoluzione di problemi aritmetici consistente nella messa in equazione, nella riduzione dell'equazione in forma canonica e nell'effettiva risoluzione dell'equazione ottenuta. L'algebra determina quindi le grandezze incognite anticipando il loro valore e operando su di esse come se fossero note (tale anticipazione di valore con "richiesta di solvibilità" induce a un confronto con quanto accade nel sistema creditizio e suggerisce alcune analogie significative tra la matematica e l'ambiente culturale).

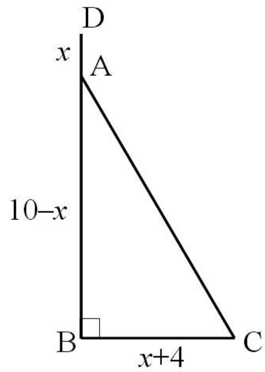
Le operazioni previste nella "Regola d'Algebra" usata nel Rinascimento presuppongono quello che viene chiamato calcolo algebrico; l'esecuzione di tale calcolo è favorita dall'uso di un simbolismo opportuno, quindi il progresso nel campo dell'algebra si lega coevolutivamente al particolare linguaggio impiegato. Non è però strettamente necessario un simbolismo algebrico simile a quello moderno per risolvere problemi con la "Regola d'Algebra". Proponiamo un esempio significativo legato all'espressione che, come vedremo, è stata chiamata algebra sincopata (Nesselmann, 1842).

3. La "Regola d'algebra" in Luca Pacioli (1494)

Un esempio di applicazione della "Regola d'Algebra" può essere visto nella risoluzione di alcuni problemi dal *Tractatus geometrie. Summa de Arithmetica et Geometria, Proportioni et Proportionalita* (1494) di Luca Pacioli (1445–1517). Proponiamo il seguente (Pars II, Folio 54v):

> E gli é una scala che acosto al muro d'iguali altezza. La quale scala è .10.bracia. Discostola di sotto in modo che quello che la vetta venne in verso terra tratto di quello si discostó dal pie', rimangono .4. Adimando quanto si discostó da pie' e quanto da capo.
> Dirai pure per la regola d' algebra. Io pongo che dal .a. al .d. sia .1a. cosa.
> Adunque dal .a. al .b. sia .10.bracia. meno .1a. cosa. Onde è da sapere quanto è dal .a. al .c. Mulitiplicarai .ab. in sé, cioé .10. men .1a. cosa, fará .100. men .20.cose. e piú .1o.censo. E moltiplica .bc. in sé, fanno .1o. censo e .8.cose. e .16. Agiongni al .1o. censo e .100. men .20.cose., fanno .2. censi e .116. meno .12.cose. e la .R. di .2.censi. e .116. men .12.cose. è .ab. E noi dicemo era .10. Adonca .10. è iguali ala radice di .2.censi. e .116. meno .12.cose. Dove multiplica ogni parte in sé e haremo .100. essere iguali a .2.censi. e .116. meno .12. cose. Dove, da ogni parte, leva .100. e, a ogni parte, darai .12.cose. e haremo che .2.censi. e .16. sonno iguali a .12.cose.
> Dove, secondo la regola, la cosa vale .2.
> Adonca dal .a. al .d. è .2. e dal .b. al .c. è .6. e cosí farai le simili.

Il problema può essere così risolto (scriveremo gli estremi di un segmento per indicare la misura di esso in braccia, seguendo Pacioli). Posto AD = x e quindi BC = x+4, risulta AB = 10–x e possiamo scrivere:



$AB^2 = (10-x)^2 = 100-20x+x^2$
$BC^2 = (x+4)^2 = x^2+8x+16$
$AC^2 = AB^2+BC^2 = 2x^2+116-12x$
$100 = 2x^2+116-12x$
$2x^2+116 = 12x$

Risolvendo l'equazione si ha: $x = 2$. Quindi: AD = 2 e BC = 6.

Prima di lasciare Pacioli osserviamo che la risoluzione proposta è espressa in un linguaggio verbale in cui compaiono alcune espressioni convenzionali come "cosa" per l'incognita e "censo" per il quadrato dell'incognita. Anche le operazioni sono espresse verbalmente (ad esempio si usa "e" per l'addizione, "men" per la sottrazione).

4. Viète verso l'algebra simbolica

La distinzione fra i procedimenti generali dell'algebra (*logistica speciosa*) e quelli particolari dell'aritmetica (*logistica numerosa*) viene talvolta fatta risalire all'introduzione del calcolo letterale. Ricordiamo che già nel XIII secolo Giordano Nemorario in *De numeris datis* (risalente circa al 1225) aveva espresso quantità numeriche mediante lettere (Puig & Rojano, 2004; Maracchia, 2005, pp. 373–374). Anche Girolamo Cardano (1501–1576) occasionalmente usò delle lettere per esprimere regole numeriche generali (Maracchia, 2005, p. 375). Ad esempio la scrittura (dall'*Opera Omnia* pubblicata a Lione: Cardano, 1663, c. LVII, p. 433):

Sit ergo ut velim R a/b capio R numeratoris & denominatoris, & est R b & R a

equivale alla moderna formula:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Le esperienze ricordate non sono ancora riconducibili allo sviluppo di algoritmi generali che coinvolgano grandezze note e incognite. Spesso, a tale riguardo, si cita François Viète (1540–1603) e la sua celebre opera *Isagoge in artem analyticam*; tale citazione può essere discussa, anche perché prima di Viète troviamo non soltanto il ricorso a lettere in procedimenti generali, ma anche, come vedremo, l'uso di parametri.

Il termine "parametro" comparve nel linguaggio matematico nel XVII secolo: Claude Mydorge (1585–1647) impiegò tale termine con il significato di "latus rectum" di una conica nel 1631 in *Prodromi catoptricorum et dioptricorum: sive conicorum operis ad abdita radii refexi et refracti mysteria praevii et facem praeferentis* (Paris: Dedin); secondo Kline (1972, p. 340) il termine parametro è stato introdotto nel senso moderno da Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) in *Acta Eruditorum* 11 del 1692. Tuttavia l'uso di parametri precede l'individuazione di un termine specifico: ad esempio, lo stesso Viète è spesso ricordato per l'importante distinzione tra costanti, parametri e variabili, nonché per la denotazione dei diversi tipi di grandezze con diversi tipi di lettere.

Certamente Viète (si veda Witmer, 1983, opera che tuttavia non può essere utilizzata con riferimento alla storia della notazione algebrica in quanto spesso traduce le parti originali nella simbologia moderna) introdusse dei parametri nell'espressione di equazioni e li distinse dalla variabile: egli indicava le incognite con vocali maiuscole e i coefficienti numerici con le consonanti: «le grandezze date devono essere distinte dalle incognite non determinate mediante simboli molto chiari e usati sistematicamente; ad esempio indicheremo la grandezza incognita con la lettera A o con qualche altra vocale […] e le grandezze assegnate per mezzo delle lettere B, G, D o di qualche altra consonante» (Viète, 1646, traduzione nostra; Maracchia, 2005, pp. 343 e 551). Tuttavia la sua notazione fu solo in parte simbolica. Nonostante Viète usasse i simboli moderni per l'addizione e la sottrazione, faceva ricorso a molte formulazioni verbali come "aequatur". Al posto di A^2 e A^3 scriveva "A quadratus" e "A cubus" (più tardi abbreviato in "Aq" e "Ac").

Viète è dunque considerato al confine tra la fase dell'algebra sincopata (che abbiamo visto in Pacioli) e quella dell'algebra simbolica. È però necessaria una precisazione (Drouhard, Panizza, Puig & Radford, 2005): la celebre classificazione di Nesselmann (1842) delle tre fasi dell'algebra (retorica, sincopata e simbolica) prevede che l'algebra sincopata sia quella in cui l'esposizione resta sostanzialmente retorica, «ma per certi concetti e operatori frequentemente impiegati si usino abbreviazioni significative al posto di parole complete» (Nesselmann, 1842, p. 302, traduzioni nostre). Sembra quindi che l'espressione verbale rimanga un elemento centrale. In questa fase Nesselmann colloca Viète, «sebbene nei suoi scritti Viète abbia già lasciato trasparire il seme dell'algebra moderna che germinerà, tuttavia, soltanto dopo di lui» (Nesselmann, 1842, p. 302). Per Nesselmann, la caratteristica essenziale del linguaggio simbolico non è tanto nell'uso di lettere per rappresentare quantità, ma nella possibilità di escludere completamente il ricorso alle parole: «è possibile realizzare un calcolo algebrico dall'inizio alla fine in modo del tutto comprensibile senza usare una sola parola scritta» (Nesselmann, 1842, p. 302). Come vedremo, questa impostazione, centrata sulla sola evoluzione semiotica, può non tenere conto di alcuni elementi significativi.

L'impostazione di Viète si basava ancora sulla geometria euclidea: in generale la sua matematica fu influenzata dall'eredità dei classici (ricordiamo Pappo e Diofanto), connesse alle ricerche astronomiche, ma altresì caratteristiche della situazione della "nuova" scienza del XVI secolo (Klein, 1968, pp. 150–153). Il principio di omogeneità ("Homogenea homogeneis comparari") enunciato da Viète conferma che la sua algebra era basata sul riferimento geometrico. Ad esempio, l'equazione modernamente espressa da $mx = b$ sarebbe stata scritta nella forma "M in A aequatur B quadratus".

Torneremo ora alla distinzione tra incognita e parametro e proporremo un esempio che risale ad alcuni decenni prima della pubblicazione di *Isagoge in artem analyticam* (risalente al 1591).

5. Prima di Viète: parametri in Bombelli (1572)

L'*Algebra* di Rafael Bombelli (1526–1572) è stata scritta nel 1550 in cinque libri (Bortolotti, 1966, p. VII). Di essi, i primi tre vennero pubblicati a stampa nel 1572 e 1579 (in due edizioni identiche), mentre i restanti due libri, manoscritti, vennero identificati da E. Bortolotti nel codice B 1569 della Biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna e pubblicati nel 1929.

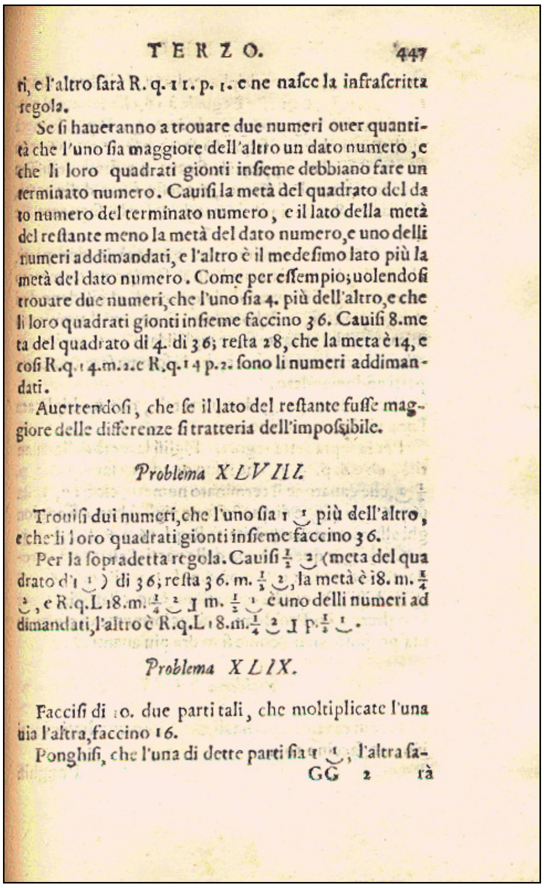
Consideriamo il problema XLIX dal terzo libro dell'*Algebra* (Bortolotti, 1966, p. 341, Fig. 1):

> Faccisi di 10 due parti tali che moltiplicate l'una via l'altra faccino 16.

Bombelli considera due parti indicate con $\overset{1}{\smile}$ (che oggi scriveremmo x) e con 12–$\overset{1}{\smile}$ (cioè $12–x$); le moltiplica ottenendo 10$\overset{1}{\smile}$–1$\overset{2}{\smile}$ (cioè $10x–x^2$) che pone uguale a 16. Risolve quindi l'equazione ed enuncia una regola generale. Seguiamo il testo originale (Fig. 1 e Fig. 2):

> Ponghisi che l'una di dette parti sia 1$\overset{1}{\smile}$, l'altra sarà 10–1$\overset{1}{\smile}$, che moltiplicate l'una via l'altra fanno 10$\overset{1}{\smile}$–1$\overset{2}{\smile}$ e questo è eguale a 16, che levato il meno si haverà 1$\overset{2}{\smile}$+16 eguale a 10$\overset{1}{\smile}$. Piglisi la metà delli Tanti, ch'è 5, e si quadri, fa 25 e se ne cavi 16, resta 9, che il suo lato è 3, il quale si cava di 5, metà delli Tanti, resta 2 e due vale il Tanto e questa è una delle parti; l'altra sarà 8 e da simili domande nasce al seguente regola.
>
> Se si haverà a dividere una quantità in due parti che moltiplicata l'una via l'altra faccino un terminato numero, piglisi il mezzo della quantità che si deve dividere e quadrisi e del prodotto se ne cavi il terminato numero e del restante se ne pigli il lato e si aggioghi alla metà di detta quantità, che la somma sarà una delle parti addomandate.

Si noti che il procedimento si riferisce alla formula risolutiva di un'equazione del tipo $x^2+c = bx$ che oggi scriveremmo $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$. Nell'esempio Bombelli considera il segno "–" mentre nella regola successivamente enunciata considera il segno"+".


TERZO. 447

ri, e l'altro ſarà R. q. 11. p. 1. e ne naſce la infraſcritta regola.

Se ſi haueranno a trouare due numeri ouer quantità che l'uno ſia maggiore dell'altro un dato numero, e che li loro quadrati gionti inſieme debbiano fare un terminato numero. Cauiſi la metà del quadrato del dato numero del terminato numero, e il lato della metà del reſtante meno la metà del dato numero, e uno delli numeri addimandati, e l'altro è il medeſimo lato più la metà del dato numero. Come per eſſempio; uolendoſi trouare due numeri, che l'uno ſia 4. più dell'altro, e che li loro quadrati gionti inſieme faccino 36. Cauiſi 8. meta del quadrato di 4. di 36; reſta 28, che la meta è 14, e coſi R.q. 14.m.2.e R.q.14 p.2. ſono li numeri addimandati.

Auertendoſi, che ſe il lato del reſtante fuſſe maggiore delle differenze ſi tratteria dell'impoſsibile.

Problema XLVIII.

Trouiſi dui numeri, che l'uno ſia 1 $\overset{1}{\smile}$ più dell'altro, e che li loro quadrati gionti inſieme faccino 36.

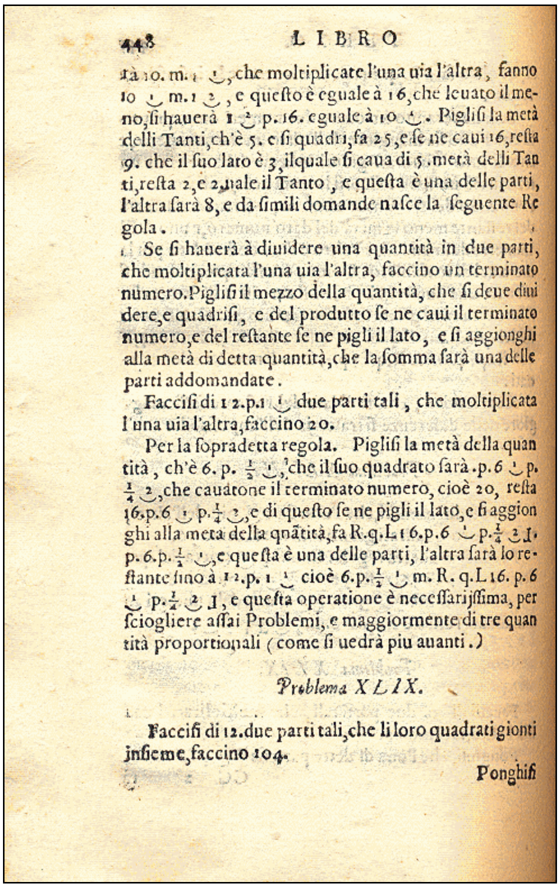
Per la ſopradetta regola. Cauiſi $\frac{1}{2}$ $\overset{2}{\smile}$ (meta del quadrato d'1 $\overset{1}{\smile}$) di 36; reſta 36. m. $\frac{1}{2}$ $\overset{2}{\smile}$, la metà è 18. m. $\frac{1}{4}$ $\overset{2}{\smile}$, e R.q.L 18.m. $\frac{1}{4}$ $\overset{2}{\smile}$ J m. $\frac{1}{2}$ $\overset{1}{\smile}$ è uno delli numeri addimandati, l'altro è R.q.L 18.m. $\frac{1}{4}$ $\overset{2}{\smile}$ J p. $\frac{1}{2}$ $\overset{1}{\smile}$.

Problema XLIX.

Facciſi di 10. due parti tali, che moltiplicate l'una uia l'altra, faccino 16.

Ponghiſi, che l'una di dette parti ſia 1 $\overset{1}{\smile}$, l'altra ſa-

GG 2 rà


448 LIBRO

rà 10. m. 1 $\overset{1}{\smile}$, che moltiplicate l'una uia l'altra, fanno 10 $\overset{1}{\smile}$ m. 1 $\overset{2}{\smile}$, e queſto è eguale à 16, che leuato il meno, ſi hauerà 1 $\overset{2}{\smile}$ p. 16. eguale à 10 $\overset{1}{\smile}$. Pigliſi la metà delli Tanti, ch'è 5. e ſi quadri, fa 25, e ſe ne caui 16, reſta 9. che il ſuo lato è 3, ilquale ſi caua di 5. metà delli Tanti, reſta 2, e 2 uale il Tanto, e queſta è una delle parti, l'altra ſarà 8, e da ſimili domande naſce la ſeguente Regola.

Se ſi hauerà à diuidere una quantità in due parti, che moltiplicata l'una uia l'altra, faccino un terminato numero. Pigliſi il mezzo della quantità, che ſi deue diuidere, e quadriſi, e del produtto ſe ne caui il terminato numero, e del reſtante ſe ne pigli il lato, e ſi aggionghi alla metà di detta quantità, che la ſomma ſarà una delle parti addomandate.

Facciſi di 12.p.1 $\overset{1}{\smile}$ due parti tali, che moltiplicata l'una uia l'altra, faccino 20.

Per la ſopradetta regola. Pigliſi la metà della quantità, ch'è 6. p. $\frac{1}{2}$ $\overset{1}{\smile}$, che il ſuo quadrato ſarà .p.6 $\overset{1}{\smile}$ p. $\frac{1}{4}$ $\overset{2}{\smile}$, che cauatone il terminato numero, cioè 20, reſta 16.p.6 $\overset{1}{\smile}$ p. $\frac{1}{4}$ $\overset{2}{\smile}$, e di queſto ſe ne pigli il lato, e ſi aggionghi alla meta della quãtità, fa R.q.L 16.p.6 $\overset{1}{\smile}$ p. $\frac{1}{4}$ $\overset{2}{\smile}$ J. p. 6.p. $\frac{1}{2}$ $\overset{1}{\smile}$, e queſta è una delle parti, l'altra ſarà lo reſtante ſino à 12.p. 1 $\overset{1}{\smile}$ cioè 6.p. $\frac{1}{2}$ $\overset{1}{\smile}$ m. R. q.L 16. p. 6 $\overset{1}{\smile}$ p. $\frac{1}{4}$ $\overset{2}{\smile}$ J, e queſta operatione è neceſſariſſima, per ſciogliere aſſai Problemi, e maggiormente di tre quantità proportionali (come ſi uedrà piu auanti.)

Problema XLIX.

Facciſi di 12. due parti tali, che li loro quadrati gionti inſieme, faccino 104.

Ponghiſi

Fig. 1 e Fig. 2 – Le pagine originali (447–448) dell'*Algebra* di Bombelli (1572–1579) con il problema esaminato

Quindi l'Autore applica tale regola alla risoluzione del seguente problema:

Faccisi di 12+1$\overset{1}{\smile}$ due parti tali che moltiplicata l'una via l'altra faccino 20.

Questo è il procedimento risolutivo:

Per la sopradetta regola piglisi la metà della quantità, ch'è 6+1/2$\overset{1}{\smile}$, che il suo quadrato sarà 36+6$\overset{1}{\smile}$+1/4$\overset{2}{\smile}$ che cavatone il terminato numero, cioè 20, resta 16+6$\overset{1}{\smile}$+1/4$\overset{2}{\smile}$ e di questo se ne pigli il lato e si aggioghi alla metà della quantità, fa R.q. L16+6$\overset{1}{\smile}$+1/4$\overset{2}{\smile}$⅃+6+1/2$\overset{1}{\smile}$ e questa è una delle due parti; l'altra sarà lo restante sino a 12+1$\overset{1}{\smile}$, cioè 6+1/2$\overset{1}{\smile}$–R.q. L16+6$\overset{1}{\smile}$+1/4$\overset{2}{\smile}$⅃ […].

Pertanto qui Bombelli si occupa di una classe di problemi, dipendenti dal parametro $\overset{1}{\smile}$ (che oggi indicheremmo con t, per evitare il ricorso alla x con la quale si indica l'incognita: questo sarà un punto importante per valutare alcune scelte di Bombelli).

Ripercorriamo il procedimento nella simbologia moderna, distinguendo due fasi:

Fase A: ricavo della "regola"

A1. L'esempio

Quantità: 10 Parti: x $10-x$

Prodotto: 16 $x(10-x) = 16$ $x^2+16 = 10x$ $x = \frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 16}$

A2. La regola

Per suddividere Q in due parti di prodotto P, una di esse è: $\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - P}$

Fase B: applicazione al caso parametrico

Per suddividere $12+t$ in due parti di prodotto 20, una di esse è $\frac{12+t}{2} + \sqrt{\left(\frac{12+t}{2}\right)^2 - 20}$

cioè $6 + \frac{t}{2} + \sqrt{16 + 6t + \frac{1}{4}t^2}$ e l'altra è $6 + \frac{t}{2} - \sqrt{16 + 6t + \frac{1}{4}t^2}$

Secondo Bortolotti (1966, p. LVIII) questo è «un gran passo, che nessun algebrista aveva ancor fatto […] e che di tanto accosta il Bombelli al Vieta, che fu considerato come creatore dell'algebra letterale moderna» (si veda inoltre Maracchia, 2005, p. 172).

Chiediamoci ora: qual è il ruolo del parametro nei procedimenti esaminati? Innanzitutto osserviamo che l'ultima risoluzione non fa riferimento a condizioni che rendano risolubile il problema nell'ambito dei numeri reali. Tuttavia la radice ottenuta è sempre reale se consideriamo t come parametro positivo, cosa che nel Rinascimento era scontata. Quindi l'esempio di Bombelli si riferisce a una quantificazione universale (seguendo Arzarello, 1988) sui valori positivi del parametro.

È inoltre importante osservare che la generalizzazione al caso parametrico non avviene considerando l'equazione, bensì con riferimento alla regola per trovare l'incognita. Questo aspetto è determinato dal fatto che nella notazione bombelliana il simbolo per indicare una quantità variabile era comunque $\overset{1}{\smile}$ (ovvero $\overset{2}{\smile}$ per la seconda potenza): l'indicazione del solo esponente, senza una lettera per la base, rende impossibile distinguere tra diverse variabili in una stessa scrittura (ad esempio un'incognita x e un parametro t). Per questo Bombelli riporta, nell'ultima parte del problema XLIX, la generalizzazione nell'applicazione della regola ricavata, senza generalizzare il procedimento.

6. Conclusioni: matematica, segni, cultura

Abbiamo dunque potuto osservare che nell'*Algebra* di Bombelli c'è già la considerazione di una classe di problemi e tale innovazione è agevolata in termini decisivi dalla disponibilità di un simbolo per indicare una quantità variabile, $\overset{1}{\smile}$, nonché le sue potenze, come $\overset{2}{\smile}$ (oltre al problema XLIX riportato si possono fornire altri esempi dall'*Algebra*: Maracchia, 2005, pp. 172–174). Il simbolo $\overset{1}{\smile}$

si usa però sia per indicare un'incognita che un parametro e ciò rende necessarie alcune cautele. La possibilità di distinguere tra lettere per le incognite e lettere (diverse) per i parametri si ha, come abbiamo ricordato, soltanto con Viète.

Un ultimo esempio (riportato in Furinghetti, 2007) potrà illustrare meglio il ruolo di Viète:

> Sia B la differenza dei due lati e D la loro somma. È richiesto di trovare i lati. Sia A il lato minore; allora il maggiore sarà A+B. Dunque la somma dei due lati sarà A2+B. Ma la somma dei lati è data come D. Allora A2+B = D e per antitesi A2 sarà uguale a D–B e se essi sono dimezzati, A sarà uguale a D½+ B½. O[ppure] sia E il lato maggiore. Allora il minore sarà E–B. Dunque la somma dei alti sarà E2–B. Ma la stessa somma è data come D. Dunque E2–B uguaglia D e per antitesi E2 uguaglia D+B, se essi sono dimezzati, E sarà uguale a D½+B½.
>
> Dunque, con la differenza e la somma di due lati data, i lati sono trovati. Infatti, metà somma dei lati meno metà della loro differenza è uguale al lato minore, e metà della loro somma più metà della loro differenza è uguale al maggiore. […]
>
> Sia B 40 e D 100. Allora A diventa 30 e E diventa 70.

Proprio grazie alla scelta di Viète di differenziare l'uso di vocali (nell'esempio A, E) e consonanti (B, D), il ruolo del parametro può risultare più significativo (potrà inoltre, successivamente, superare la quantificazione universale estesa a tutti i numeri positivi). Ciò non è ancora legato al passaggio a un simbolismo completo (ricordiamo che Viète indicava ancora molti elementi con parole tratte dal linguaggio naturale). Tuttavia anche nell'ambito della cosiddetta algebra sincopata si manifestano i caratteri di quella coevoluzione (Drouhard, 2007) che porta a una reciproca influenza: la disponibilità di un sistema semiotico organico e versatile (influenzata anche dall'introduzione della stampa a caratteri mobili) determina ed è determinata da esigenze nuove per gli algebristi rinascimentali, tra le quali quella di considerare in senso generale una classe parametrizzata di problemi.

L'influenza tra i vari elementi dell'algebra e il contesto sociale e culturale del Rinascimento è interessante (Radford, 2002, 2003 e 2008) e conferma che sia la creazione di nuova matematica che l'atto di apprendere non possono essere riassunti soltanto in una costruzione di nuovi "oggetti matematici". Pertanto «la matematica è molto più di una forma di produzione di conoscenza – un esercizio di teorizzazione. Se è vero che gli individui creano la matematica, non è meno vero che, reciprocamente, la matematica influenza il modo in cui gli individui sono, vivono e pensano» (Radford & Empey, 2007, p. 250). Queste annotazioni ci inducono a riflettere sull'importanza degli "oggetti matematici" concepiti dai matematici nella storia e ripresi, oggi, dai nostri allievi: essi hanno influenzato – e, oggi, influenzano – «tutta la società, e non solo chi pratica la matematica professionalmente» (Radford & Empey, 2007, p. 251).

Ringraziamenti

L'autore ringrazia vivamente Nadia Douek, Jean–Philippe Drouhard (Nizza, Francia), Luis Puig (Valencia, Spagna) e Luis Radford (Sudbury, Canada) per i preziosi suggerimenti e per le indicazioni bibliografiche.

Bibliografia

Antonini S. (2006), Alla conquista delle formule: diversi aspetti di un percorso a ostacoli. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 29, 713–722.

Arzarello, F. (1988). L'insegnamento della logica nelle scuole medie superiori. In M. Barra & A. Zanardo (a cura di). *Atti degli incontri di logica matematica, XII Incontro: La logica matematica nella didattica*, 115–120.

Bagni, G.T., Gorla, D. & Labella, A. (2008). *Introduzione alla logica e al linguaggio matematico*. Milano: McGraw–Hill.

Bloedy–Vinner, H. (2001), Beyond unknowns and variables. Parameters and dummy variables in High School Algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds). *Perspectives in School Algebra* (pp. 177–189). Dordrecht: Kluwer.

Bortolotti, E. (1966) (Ed). *L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna*. Milano: Feltrinelli.

Cardano, G. (1663). *Hyeronymi Cardani Opera Omnia in decem tomos digesta*. Lugduni Bataviorum: Huguetan & Ravaud.

Chiarugi, I., Fracassina, G., Furinghetti, F. & Paola, D. (1995), Parametri, variabili e altro: un ripensamento su come questi concetti sono presentati in classe. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 8B, 34–50.

Drouhard, J.–P. (2007). Prefazione. In G.T. Bagni. *Rappresentare la matematica. Simboli, parole, artefatti e figure* (pp. 9–14). Roma: Aracne.

Drouhard, J.–P., Panizza, M., Puig, L. & Radford, L. (2005). Working Group 6. Algebraic Thinking. In: M. Bosch (Ed). *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 631–642). http://ermeweb.free.fr/CERME4/CERME4_WG6.pdf

Ehrlich, P.R. & Raven, P.H. (1964). Butterflies and Plants: A Study in Coevolution. *Evolution*, 18, 4, 586–608.

Franci, R. & Toti Rigatelli, L. (1979). *Teoria e storia delle equazioni algebriche*. Mursia, Milano.

Furinghetti, F. (2007). *Lezioni di Didattica della Matematica*. Università di Genova a.a. 2006–2007. http://www.dima.unige.it/~furinghe/Lezioni/Cos'e%CC%80Algebra.ppt

Klein, J. (1968). *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. Cambridge Ma: MIT Press.

Maracchia, S. (2005). *Storia dell'algebra*. Napoli: Liguori.

Muhammad ibn Mūsa al–Khwārizmī (1939). *Kitāb al–mukhtasar fī hisāb al–jabr wa'lmuqābala* (Alī Mustafā Masharrafa & Muhammad Mursī Ahmad, Eds, rist. 1968). Cairo: al–Qahirah.

Nesselmann, G.H.F. (1842). *Versuch einer kritischen geschichte der algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen*. Berlin: G. Reimer.

Neugebauer, O. (1974). *Le scienze esatte nell'Antichità*. Milano: Feltrinelli (1957, *The Exact Sciences in Antiquity*. Providence, Rhode Island: Brown University Press).

Pacioli, L. (1494). *Tractatus geometrie. Summa de Arithmetica et Geometria, Proportioni et Proportionalita*. A. Simi (Ed). http://archimedes2.mpiwg-berlin.mpg.de/

Puig, L., Ainley, J., Arcavi, A. & Bagni, G.T. (2007). Working on algebraic thinking. In D. Pitta–Pantazi & G. Philippou (Eds). *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 812–815). Larnaca, Chyprus: ERME.

Puig, L. & Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds), *The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189–224). Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics*, 22(2), 14–23.

Radford, L. (2003). On the epistemological limits of language: mathematical knowledge and social practices during the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 123–130.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds). *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 215–234). Rotterdam: Sense.

Radford, L. & Empey, H. (2007). Culture, knowledge and the Self: mathematics and the formation of new social sensibilities in the Renaissance and Medieval Islam. *Revista Brasileira de História da Matemática*. Festschrift Ubiratan D'Ambrosio, Especial 1, 231–254.

Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The mathematics teacher*, 81, 420–427.

Šedivý, J. (1976). A note on the role of parameters in mathematics teaching. *Educational studies in mathematics*, 7, 121–126.

Viète, F. (1646). *Francisci Vietae Opera Mathematica. In unum volumen congesta ac recognita, opera ac studio Francisci Schooten*. Lugduni Batavorum: ex officina Bonaventurae & Abrahami Elzeviriorum.

Witmer, T. R. (Ed) (1983). *François Viète. The analytic art*. Kent Oh: The Kent State University Press.