

I.C. "Goldoni", Martellago, 28 aprile 2009

Matematica e culture


Calcolo pratico e uso di artefatti in Cina: riferimenti storici e quadro teorico




Giorgio T. Bagni
 Dipartimento di Matematica e Informatica
 Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Dalle dita ai bastoncini
(bacchette da calcolo)


- Come indicare i numeri usando **bastoncini**? Possiamo riferirci alle dita della mano: un dito, due dita...
 I II III IIII IIIII
- A 5 unità (corrispondenti a 5 dita) qualcosa cambia: dobbiamo ricorrere all'altra mano, **ma indicare che abbiamo già considerato una mano completa.**
 T T T T T
- **Prima di raggiungere il 10** dobbiamo prepararci ad una situazione importante: per evitare di restare bloccati (avendo esaurito le dita delle mani, come aggungeremo altre unità?) introdurremo le **decine**.



I numeri in Cina
Disposizioni di bacchette Tsung e Heng


- Le **decine** si possono indicare mediante le stesse disposizioni di bacchette usate per le unità, **spostate più a sinistra**. Tuttavia per evitare malintesi, i Cinesi utilizzavano per le decine delle disposizioni (*Heng*) leggermente diverse da quelle per le unità (*Tsung*):
 — = ≡ ≡ ≡ ≡ | | | | |
- Per le centinaia le disposizioni usate erano *Tsung*, per le migliaia *Heng* etc.
- Riassumendo:

<i>Tsung</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Heng</i>	—	=	≡	≡	≡	≡	≡	≡	≡



Le bacchette da calcolo
Uno strumento molto antico

- Fino al XII sec. lo **zero** era indicato da uno spazio vuoto: **proprio questa assenza ha reso opportuno l'uso di due gruppi di simboli** (*Tsung* e *Heng*).
- Le **bacchette** (*suan*) sono un artefatto diffusissimo dalla dinastia Qin (221-206 a.C., ma sono più antiche). La forma descritta è ripresa da Sun Tzu (280 d.C.):
 ■ **"Le unità sono verticali, le decine orizzontali, le centinaia erette, le migliaia distese, così le migliaia e le decine sembrano la stessa cosa le decine di migliaia e le centinaia si assomigliano".**
- Dal 200 a.C. i Cinesi indicano anche **numeri negativi** (distinguendo il colore delle bacchette: rosse e nere).



Venti secoli di calcoli



- Le bacchette erano un ausilio per il calcolo: esse davano la possibilità di **formare praticamente i "numerali-bacchette"** su di una superficie piana (tavola da calcolo aritmetica, quadrettata, in cui le operazioni erano eseguite sfruttando le caratteristiche della notazione posizionale) e di cancellare facilmente i numeri che non servivano più.
- L'uso delle bacchette tramonta nella tarda epoca Ming (1368-1644) quando furono soppiantate dall'**abaco**.
- Introduciamo brevemente un quadro teorico.



Le bacchette da calcolo
Riflettiamo sugli artefatti

- Non ci limiteremo alla presentazione **multiculturale**: l'applicazione delle bacchette nella didattica della matematica è dunque una scelta **interculturale**.
- Ciò richiede la precisazione di un **quadro teorico**: ci rifaremo a quanto proposto da M.G. Bartolini Bussi, M.A. Mariotti e F. Ferri (CERME-3).
- Vygotskij riconosce funzioni di mediazione agli strumenti **tecnici** e **psicologici** (segni o **strumenti di mediazione semiotica**: Vygotskij, 1974, p. 227).
- Wartofsky (1979) identifica gli strumenti tecnici come **artefatti primari**; gli **artefatti secondari** sono usati per fissare e trasmettere le modalità di azione.



Le bacchette da calcolo Riflettiamo sugli artefatti

- Dunque bacchette e tavole da calcolo possono essere considerate, in tale lettura, **artefatti primari**.
- Le regole, le convenzioni rappresentative etc. corrispondono ad **artefatti secondari**.
- Una teoria matematica è un **artefatto terziario** che organizza i modelli costruiti come artefatti secondari.
- Si può supporre (Bartolini Bussi, 2002) che gli aspetti pratico, rappresentativo e teorico siano incorporati (potenzialmente) nell'attività che si svolge con l'artefatto il quale, in tale modo, acquista le caratteristiche della **polisemia** (Engestrom, 1990).

Le bacchette da calcolo Riflettiamo sugli artefatti

- Didatticamente significativo è che l'uso degli artefatti primari richieda la loro **manipolazione**.
- Anche Vygotskij (1987, p. 45) sottolinea la necessità di combinare l'uso di **"linguaggio, occhi e mani"**.
- L'importanza degli aspetti corporei si accorda con la posizione della scienza cognitiva basata sui lavori di Lakoff, Johnson e Núñez (Lakoff & Núñez, 2000), secondo la quale la formazione di idee matematiche si basa **sull'esperienza sensoriale-motoria**.
- Per quanto riguarda in particolare l'importanza della **posizione degli elementi in diagrammi** (aritmetici), segnaliamo lo studio: Steinbring, 2002.

Che cos'è l'algebra? Algebra cinese e "carattere posizionale"

- La disciplina che consente la risoluzione di **equazioni espresse mediante simboli specifici** risale al XVI sec. (a partire da Viète c'è la possibilità di parametrizzare, dunque di considerare non più un singolo problema ma una classe di problemi).
- Ma una disciplina espressa meno tecnicamente (algebra **sincopata**) può risalire al III secolo.
- L'espressione di problemi in forma **geometrica** risale al III sec. a.C. (algebra **geometrica**).
- E i problemi che noi oggi risolviamo algebricamente sono presenti a partire dal **II millennio a.C.**

Che cos'è l'algebra? Algebra cinese e "carattere posizionale"

- In **Cina** l'algebra è presente dal II sec. a.C. in forma retorica o sincopata (ideogrammi monosillabici per quantità e operazioni) con un importante **"carattere posizionale"** (Needham 1959, p. 112), come abbiamo visto per le (tarde) tecniche moltiplicative.
- La **tavola da calcolo algebrica cinese** era impostata in modo che **determinate posizioni fossero occupate sempre da particolari tipi di grandezze** (incognite, potenze etc.)
- e tale convenzione può considerarsi un importante **artefatto secondario**.

Che cos'è l'algebra? Algebra cinese e "carattere posizionale"

- Il carattere posizionale dell'algebra cinese ha avuto conseguenze diverse:
- ha posto l'accento sull'importanza dell'**impostazione matriciale** (ma il determinante fu sviluppato piuttosto tardi, nel 1683, dal giapponese Seki Kowa; ricordiamo che la prima formulazione occidentale risale a Leibniz, nel 1693);
- parallelamente, però, ha causato l'**inibizione dello sviluppo di un simbolismo algebrico** (ad esempio, mancano segni specifici per indicare l'uguaglianza o per le potenze).

Che cos'è l'algebra? Algebra cinese e "carattere posizionale"

德千百十萬千百十高 分 釐 毫

→ termine noto
→ coeff. x
→ coeff. x²

Nel presente studio esamineremo un esempio significativo di "calcolo mediante tabelle"

E si noti l'uso di bacchette!

- Ad esempio, questa tabella (*sangi*) indica l'equazione: $851x^2 - 3450x + 2691 = 0$ (si osservino i diversi colori e l'assenza dello zero).

Calcolo mediante tabelle: *Chiu Chang*, “nove capitoli sulle arti matematiche”

- Consideriamo il **problema** seguente che riprende, con variazioni numeriche, un problema del capitolo VIII (*Fang Cheng*) del *Chiu Chang* (precedente al I sec.):
- Cinque covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 19 sheng. Tre covoni di grano di tipo A aggiunti a due covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 12 sheng. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?
- Oggi indicheremmo rispettivamente con x e con y (in sheng) i rendimenti di un covone di tipo A e di un covone di tipo B ed imposteremmo un sistema...

Il problema del *Chiu Chang* porta ad un sistema lineare

- Consideriamo il sistema di equazioni lineari costituito da:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$
- Riportiamo in una tabella i coefficienti e i termini noti.
- Operiamo ora per modificare la tabella sapendo che:

5	3	19
3	2	12

Regole: (1) si possono variare in proporzione tutti i termini delle righe e (2) a una riga si può sostituire la riga ottenuta sommando o sottraendo i termini corrispondenti di due righe.

Il problema del *Chiu Chang* porta ad un sistema lineare

Una possibilità è operare sulle righe per rendere uguali i primi elementi:

- moltiplichiamo la prima riga per 3,
- e la seconda per 5.
- Ora alla seconda riga sottraiamo la prima,
- moltiplichiamo questa seconda riga per 9
- e alla prima riga sottraiamo la seconda.
- Infine si divide la prima riga per 15 e la seconda per 9.

①	0	2
mcm=15	1	3
②		

Il problema del *Chiu Chang* porta ad un sistema lineare

- Eravamo partiti da un sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$
- e siamo pervenuti alla sua soluzione:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

1	0	2
0	1	3
coeff. di x	coeff. di y	rendim. (sheng)

Carattere posizionale: un artefatto secondario essenziale

...ma riferito a quale artefatto primario?

Attenzione: questa è una delle possibili risoluzioni: ma sarà quella “scelta” dagli allievi?

Il sistema è:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

- Moltiplichiamo la prima riga per 3
- e la seconda per 5.
- Ora alla seconda riga sottraiamo la prima,
- moltiplichiamo questa seconda riga per 9
- e alla prima riga sottraiamo la seconda.
- Infine dividiamo la prima riga per 15 e dividiamo ancora la seconda riga per 9.

I		II
	I	III

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

A tutti grazie dell’attenzione

