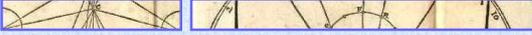


Macerata, 4 aprile 2009

Bacchette da calcolo e sistemi di equazioni Storia e geografia della matematica per la didattica



Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario. Le bacchette dalla storia (e geografia) della matematica alla didattica

Introduzione: venti secoli di calcoli

- Un primo esempio aritmetico: suoi pregi e difetti
- Il quadro teorico: riflettiamo sugli artefatti
- Algebra cinese: il “carattere posizionale”
- Un esempio algebrico: sistemi e bacchette
- Verifica sperimentale: un case study
- Riflessioni conclusive e spunti per altre ricerche



Contributi dalle altre culture: pedagogia (educazione, didattica) trans-, meta-, multi-, inter-culturale

- Approccio **transculturale** *verso una pedagogia aculturale?*
- Approccio **metaculturale** *porta ad una pedagogia aculturale!*
- Approccio **multiculturale** *“convivenza”, più che interazione*
- Approccio **interculturale** **Interazione: confronto paritetico, valorizzazione delle differenze**
- Seguendo questa classificazione (A. Portera) vedremo un'interazione didatticamente significativa...

Dalle dita ai bastoncini (bacchette da calcolo)

- Come indicare i numeri usando **bastoncini**? Possiamo riferirci alle dita della mano: un dito, due dita...
| || ||| |||| |||||
- A 5 unità (corrispondenti a 5 dita) qualcosa cambia: dobbiamo ricorrere all'altra mano, **ma indicare che abbiamo già considerato una mano completa.**
┐ ┌ ||| |||
- **Prima di raggiungere il 10** dobbiamo prepararci ad una situazione importante: per evitare di restare bloccati (avendo esaurito le dita delle mani, come aggiungeremo altre unità?) introdurremo le **decine**.

I numeri in Cina Disposizioni di bacchette Tsung e Heng

- Le **decine** si possono indicare mediante le stesse disposizioni di bacchette usate per le unità, **spostate più a sinistra**. Tuttavia per evitare malintesi, i Cinesi utilizzavano per le decine delle disposizioni (*Heng*) leggermente diverse da quelle per le unità (*Tsung*):

— = ≡ ≡ ≡ ≡ | | | | |

- Per le centinaia le disposizioni usate erano *Tsung*, per le migliaia *Heng* etc.

- Riassumendo:
- | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tsung | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Heng | — | = | ≡ | ≡ | ≡ | | | | |

Le bacchette da calcolo Uno strumento molto antico

- Fino al XII sec. lo **zero** era indicato da uno spazio vuoto: **proprio questa assenza ha reso opportuno l'uso di due gruppi di simboli** (*Tsung* e *Heng*).
- Le **bacchette** (*suàn*) sono un artefatto diffusissimo dalla dinastia Qin (221-206 a.C., ma sono più antiche). La forma descritta è ripresa da Sun Tzu (280 d.C.):
- **“Le unità sono verticali, le decine orizzontali, le centinaia erette, le migliaia distese, così le migliaia e le decine sembrano la stessa cosa le decine di migliaia e le centinaia si assomigliano”.**
- Dal 200 a.C. i Cinesi indicano anche **numeri negativi** (distinguendo il colore delle bacchette: rosse e nere).

Le bacchette da calcolo Riflettiamo sugli artefatti

- Non ci limiteremo alla presentazione **multiculturale**: l'applicazione delle bacchette nella didattica della matematica è dunque una scelta **interculturale**.
- Ciò richiede la precisazione di un **quadro teorico**: ci rifaremo a quanto proposto da M.G. Bartolini Bussi, M.A. Mariotti e F. Ferri (CERME-3).
- Vygotskij riconosce funzioni di mediazione agli strumenti **tecnici** e **psicologici** (segni o **strumenti di mediazione semiotica**).
- Wartofsky (1979) identifica gli strumenti tecnici come **artefatti primari**; gli **artefatti secondari** sono usati per fissare e trasmettere le modalità di azione.

Le bacchette da calcolo Riflettiamo sugli artefatti

- Didatticamente significativo è che l'uso degli artefatti primari richieda la loro **manipolazione**.
- "I bambini risolvono i problemi pratici con l'aiuto del **linguaggio** non meno che con quello degli **occhi** e delle **mani**. Questa unità di percezione, linguaggio e azione, che in definitiva produce l'interiorizzazione del campo visivo, costituisce il tema centrale di una qualsiasi analisi dell'origine delle forme di comportamento" (Vygotskij, 1987, p. 26).
- L'importanza degli aspetti corporei si accorda con la posizione della scienza cognitiva basata sui lavori di Lakoff, Johnson e Núñez (Lakoff & Núñez, 2000).

Le bacchette da calcolo Riflettiamo sugli artefatti

- Un'osservazione importante: se dal punto di vista strettamente pratico le bacchette da calcolo possono essere paragonate all'abaco romano...



- Ben diversi sono gli **artefatti secondari** abbinati ai due artefatti primari!

Sommario. Le bacchette dalla storia (e geografia) della matematica alla didattica

- **Introduzione**: venti secoli di calcoli
- **Un primo esempio aritmetico**: suoi pregi e difetti
- **Il quadro teorico**: riflettiamo sugli artefatti
- **Algebra cinese**: il "carattere posizionale"
- **Un esempio algebrico**: sistemi e bacchette
- **Verifica sperimentale**: un case study
- **Riflessioni conclusive** e spunti per altre ricerche



Che cos'è l'algebra? Algebra cinese e carattere posizionale

- La disciplina che consente la risoluzione di **equazioni espresse mediante simboli specifici** risale al XVI sec. (a partire da Viète c'è la possibilità di parametrizzare, dunque di considerare non più un singolo problema ma una classe di problemi).
- Ma una disciplina espressa meno tecnicamente (algebra **sincopata**) può risalire al III secolo.
- L'espressione di problemi in forma **geometrica** risale al III sec. a.C. (algebra **geometrica**).
- E i problemi che noi oggi risolviamo algebricamente sono presenti a partire dal **II millennio a.C.**

Che cos'è l'algebra? Algebra cinese e carattere posizionale

- In **Cina** l'algebra è presente dal II sec. a.C. in forma retorica o sincopata (ideogrammi monosillabici per quantità e operazioni) con un importante "**carattere posizionale**" (Needham 1959, p. 112), come abbiamo visto per le (tarde) tecniche moltiplicative.
- La **tavola da calcolo algebrica** cinese era impostata in modo che **determinate posizioni fossero occupate sempre da particolari tipi di grandezze** (incognite, potenze etc.)
- e tale convenzione può considerarsi un importante **artefatto secondario**.

Le formule algebriche e la classificazione peirceana

- Secondo **Peirce**, una formula algebrica «è un'icona, ed è resa tale dalle regole di commutazione, associazione e distribuzione dei simboli».
- Ciò « può sembrare a prima vista una classificazione arbitraria; perché potrebbe [...] essere considerata come un segno convenzionale composto. Ma non è così: perché una proprietà altamente distintiva dell'icona è che **attraverso osservazione diretta di essa si possono scoprire riguardo al suo oggetto verità nuove oltre a quelle sufficienti a determinare la costruzione dell'icona stessa** » (Peirce, 2.279, *MS 787*).

Algebra cinese e carattere posizionale La tavola algebrica



termine noto
coeff. x
coeff. x^2

Nel presente studio esamineremo un esempio significativo di "calcolo mediante tabelle"

E si noti l'uso di bacchette!

- Ad esempio, questa tabella (*sangt*) indica l'equazione: $851x^2 - 3450x + 2691 = 0$ (si osservino i diversi colori e l'assenza dello zero).

Sommario. Le bacchette dalla storia (e geografia) della matematica alla didattica

- **Introduzione:** venti secoli di calcoli
- **Un primo esempio aritmetico:** suoi pregi e difetti
- **Il quadro teorico:** riflettiamo sugli artefatti
- **Algebra cinese:** il "carattere posizionale"
- **Un esempio algebrico:** sistemi e bacchette
- **Verifica sperimentale:** un case study
- **Riflessioni conclusive** e spunti per altre ricerche



Calcolo mediante tabelle: Chiu Chang, "nove capitoli sulle arti matematiche"

- Consideriamo il **problema** seguente che riprende, con variazioni numeriche, un problema del capitolo VIII (*Fang Cheng*) del *Chiu Chang* (precedente al I sec.):
- Cinque covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 19 sheng. Tre covoni di grano di tipo A aggiunti a due covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 12 sheng. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?
- **Oggi** indicheremmo rispettivamente con x e con y (in sheng) i rendimenti di un covone di tipo A e di un covone di tipo B ed imposteremmo un sistema...

Il problema del Chiu Chang porta ad un sistema lineare

- Consideriamo il sistema di equazioni lineari costituito da:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

- Riportiamo in una tabella i coefficienti e i termini noti.

5	3	19
3	2	12

- Operiamo ora per modificare la tabella sapendo che:

Regole: (1) si possono variare in **proporzione** tutti i termini delle righe e (2) a una riga si può sostituire la riga ottenuta **sommando o sottraendo i termini** corrispondenti di due righe.

Il problema del Chiu Chang porta ad un sistema lineare

Una possibilità è operare sulle righe per rendere uguali i primi elementi:

- moltiplichiamo la prima riga per 3,
- e la seconda per 5.
- Ora alla seconda riga sottraiamo la prima,
- moltiplichiamo questa seconda riga per 9
- e alla prima riga sottraiamo la seconda.
- Infine si divide la prima riga per 15 e la seconda per 9.

1	0	2
0	1	3

mcm = 15

Il problema del *Chiu Chang* porta ad un sistema lineare

- Eravamo partiti da un sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

- e siamo pervenuti alla sua soluzione:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

1	0	2
0	1	3
coeff. di x	coeff. di y	rendim. (sheng)

Carattere posizionale: un artefatto secondario essenziale

...ma riferito a quale artefatto primario?

Attenzione: questa è una delle possibili risoluzioni: ma sarà quella "scelta" dagli allievi?

Il sistema è:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

- Moltiplichiamo la prima riga per 3
- e la seconda per 5.
- Ora alla seconda riga sottraiamo la prima, moltiplichiamo questa seconda riga per 9 e alla prima riga sottraiamo la seconda.
- Infine dividiamo la prima riga per 15 e dividiamo ancora la seconda riga per 9.

I		II
	I	III

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Uso delle bacchette da calcolo e opportunità didattiche

- Nel caso ora esaminato l'uso delle bacchette e della tavola da calcolo si mantiene aderente alla tradizione storica della matematica cinese.
- L'insegnante ha un ruolo chiave: presenta le modalità di uso (artefatto secondario) dell'artefatto primario.
- Il rapporto degli artefatti è essenziale: non esiste un solo "modo" di usare lo strumento!
- Anticipiamo che la manipolazione delle bacchette determina situazioni interessanti: ad esempio, i coefficienti nulli indicano "fisicamente" l'assenza di "elementi di disturbo".

Uso delle bacchette da calcolo e opportunità didattiche

- Molto importante è il ruolo dello zero:
- la "sparizione" di uno dei coefficienti rende fisicamente possibile risolvere l'equazione.
- Il significato di tale elemento è rilevante in quanto può contribuire a "suggerire" la strategia risolutiva.
- Possibili errori: "eliminazione" di bacchette; aggiunta delle stesse bacchette a tutte le caselle di una riga.

I	Vuoto	II
	I	III

Vuoto

Sommario. Le bacchette dalla storia (e geografia) della matematica alla didattica

- Introduzione: venti secoli di calcoli
- Un primo esempio aritmetico: suoi pregi e difetti
- Il quadro teorico: riflettiamo sugli artefatti
- Algebra cinese: il "carattere posizionale"
- Un esempio algebrico: sistemi e bacchette
- Verifica sperimentale: un case study
- Riflessioni conclusive e spunti per altre ricerche



Una verifica sperimentale nella scuola media

- Descriveremo sinteticamente (per ora senza pretese di organicità) alcuni risultati di una prima esperienza didattica condotta in una classe I media (allievi di 11-12 anni) a Treviso alla fine del 2004.
- Al momento dell'esperienza gli allievi non avevano trattato i numeri negativi né le equazioni. Solo alcuni di essi avevano qualche esperienza (risalente alla scuola primaria) con esercizi del tipo: "indovina un numero sapendo che..."
- L'esperienza si è svolta in aula, durante un'ora di lezione, alla presenza dell'insegnante di matematica e dello sperimentatore (che non è mai intervenuto).

Una verifica sperimentale nella scuola media

- Era stata precedentemente introdotta alla classe la **rappresentazione dei numeri con le bacchette**; gli allievi hanno avuto occasione di esercitarsi.
- In una **tabella corredata con etichette**, realizzata su di un banco, era stato poi rappresentato il problema: “due pacchetti uguali contengono, in tutto, quattro biscotti. Quanti biscotti ci sono in ciascun pacchetto?”
- Era stato poi mostrato che dividendo per 2 i numeri in tutte le caselle della tabella si ottiene la soluzione.

pacchetti	biscotti

Una prima verifica sperimentale nella scuola media

- Gli allievi sono stati suddivisi in sei gruppi di tre.
- Durante la risoluzione, il ruolo dell'insegnante è stato di controllo (passando tra i vari gruppi): ha segnalato eventuali errori, ma non ha dato suggerimenti.

Problema, ispirato al Chiu Chang

Cinque covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 19 sheng.
Tre covoni di grano di tipo A aggiunti a due covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 12 sheng.
Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?

Una verifica sperimentale nella scuola media

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

- Significativi sono alcuni **ampi gesti con le mani**: “**adesso posso fare questi meno quelli**” (indicando le righe).
- Indicativa, inoltre, è una frase pronunciata da F. (l'allieva che ha più attivamente collaborato con S.): “**Si riesce quando due diventano uguali**”.

covoni tipo A	covoni tipo B	grano

Una verifica sperimentale nella scuola media

- Dunque S. e F. **hanno utilizzato solamente la regola che consente di sottrarre una riga dall'altra**.
- Ma tale modo di procedere **non è sempre applicabile** (gli allievi **non** avevano trattato i numeri negativi).
- Allo stesso gruppo è stato proposto **un altro problema**:
- Quattro covoni di grano di tipo A aggiunti a un covone di grano di tipo B hanno il rendimento di 6 sheng. Due covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 8 sheng.
Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?

Una verifica sperimentale nella scuola media

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

- Dopo una fase di perplessità (“**non si può togliere questi da quelli, non ce ne sono abbastanza**”), S. applicherà la regola che consente di moltiplicare gli elementi di una riga per $k > 0$ (in questo caso: la prima riga per $k = 3$).
- F. ribadisce: “**Sì, sì, bisogna far diventare questo... uguale a questi!**” e il procedimento può proseguire.

covoni tipo A	covoni tipo B	grano

Una verifica sperimentale nella scuola media

- Questa prima esperienza è limitata, ma consente di indicare alcune considerazioni.
- L'uso frequente di **espressioni deittiche** (“questi”, “quelli”) accompagnato da una **marcata componente gestuale** ci sembra interessante (come evidenziato ad esempio in: Steinbring, 2002).
- Le allieve hanno preferito la “regola” (artefatto secondario) più direttamente **legata alla presenza fisica dei bastoncini** (“**fare questi meno quelli**”).
- Il ricorso all'altra “regola” è stato suggerito dalla possibilità di applicare la “regola della sottrazione” (infatti “**si riesce quando due diventano uguali**”).

Sommario. Le bacchette dalla storia (e geografia) della matematica alla didattica

- **Introduzione:** venti secoli di calcoli
- **Un primo esempio aritmetico:** suoi pregi e difetti
- **Il quadro teorico:** riflettiamo sugli artefatti
- **Algebra cinese:** il “carattere posizionale”
- **Un esempio algebrico:** sistemi e bacchette
- **Verifica sperimentale:** un case study
- **Riflessioni conclusive e spunti per altre ricerche**



Riflessioni conclusive e indicazioni per ulteriori ricerche

- Nota Bachtin: “c’è l’idea molto tenace, ma unilaterale e quindi falsa, che per meglio comprendere un’altra cultura ci si deve, per così dire, trasferire in essa”.
- Da un lato, infatti, “una certa immedesimazione nella cultura altrui [...] è un momento necessario del processo della sua comprensione; ma se la comprensione si esaurisce in questo solo momento, essa sarebbe una semplice duplicazione e non porterebbe in sé nulla di nuovo e di arricchente. **La comprensione creativa non rinuncia a sé, al proprio posto nel tempo, alla propria cultura e non dimentica nulla**” (Bachtin, 2000, p. 347).

Riflessioni conclusive e indicazioni per ulteriori ricerche

- Commentando le idee di **R. Rorty**, A. Gargani ribadisce: “non possiamo non essere etnocentrici e questa non è una forma di arroganza...
Arrogante è la pretesa del filosofo metafisico, dell’antropologo liberale e progressista che pretende di **disporre di un supervocabolario** il quale renderebbe commensurabili i vocabolari delle «culture altre»” (Pref. a Rorty, 2003, p. xxiii).
- Quindi la nostra esperienza è da considerare **“cinese”?**



Riflessioni conclusive e indicazioni per ulteriori ricerche

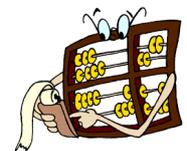
- Torniamo nelle nostre classi.
- I dati finora esaminati sembrano suggerire che l’uso degli **artefatti primari** (bacchette e tavola da calcolo) collegato a quello di **artefatti secondari** (modalità per variare la tabella) possa agevolare la messa a punto di strategie risolutive,
dunque l’accostamento agli **artefatti terziari** basati sulle attività con tali artefatti primari e secondari.
- Si noti che i Cinesi risolvevano sistemi di due equazioni in due incognite anche con altri metodi (riassumibili in formule), ma il ruolo delle bacchette **non** appare in tali casi particolarmente significativo.

Riflessioni conclusive e indicazioni per ulteriori ricerche

- Una rappresentazione esterna come quella ottenuta mediante le bacchette sulla tavola da calcolo è costituita da un complesso di segni, relazioni spaziali, regole incorporate.
- Ma gli allievi si accostano ad essa come ad un **gioco**.
- Una traccia importante da esplorare è dunque la seguente: forse è più facile “capire” nel gioco che nella rappresentazione astratta (algebraica)...
- Dunque **potrebbe essere il gioco stesso (che, per l’allievo, è dotato di significato di per se stesso, in quanto “gioco nuovo”) a conferire significato al procedimento algebrico!**

Le bacchette da calcolo: una storia a... lieto fine

- L’**abaco cinese (suanpan)** può essere considerato l’evoluzione delle bacchette da calcolo (Martzloff, 1987).
- La prima illustrazione dell’abaco risale al 1436, ma Needham suggerisce che potrebbe risalire al VI sec.



1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Le bacchette da calcolo: una storia a... lieto fine

- Per alcuni versi, dunque, le bacchette avrebbero “generato” un **nuovo** artefatto, l’abaco (la cui efficacia didattica è stata studiata in: Bartolini Bussi, 2003).
- Lo **studio dell’evoluzione degli artefatti** apre interessanti prospettive di ricerca.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ho citato:

- Bachtin (2000), *L'autore e l'eroe*, Einaudi
 Bartolini Bussi (2002) *The Theoretical Dimension of Mathematics: a Challenge for Didacticians*, 24 *Canad. Math. Ed. St. Group*
 – (2003) *Instruments for semiotic mediation in primary school classrooms, For the Learning of Mathematics*
 Bruner (2005) *La mente a più dimensioni*, Laterza
 Egenstrom (1990) *When is a tool? Multiple meanings of artefacts in human activity*, in *Learning, Working and Imagining*, Helsinki
 Lakoff, Núñez (2000) *Where mathematics comes from*, Basic Books
 Martzloff (1987) *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson
 Needham (1959) *Science and civilisation in China*, Cambridge University Press
 Rorty (2003) *La filosofia dopo la filosofia*, Einaudi
 Steinbring (2002) *What makes a sign a mathematical sign?*, *PME-26*
 Vygotskij (1987) *Il processo cognitivo*, Boringhieri
 Wartofsky (1979) *Perception, representation and the forms of action*, *Models*, Reidel

**Grazie a
Ferdinando Arzarello
e a Paolo Boero**

