Belluno, 21 marzo 2009

Giochi matematici nella storia della matematica

UNIVERSITAS STUDIORUM UTINENSIS

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario

Beautiful Minds

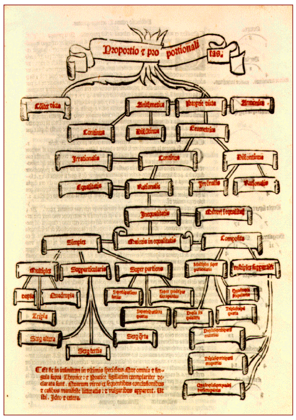
Da Luca Pacioli a John Nash

Luca Pacioli

- Il francescano **Luca Pacioli** (1445-1514) è una figura primaria della matematica del XV–XVI secolo.
- Pacioli si ricorda per l'introduzione della "partita doppia"…
- … e per molti giochi matematici che oggi ispirano le nostre gare!

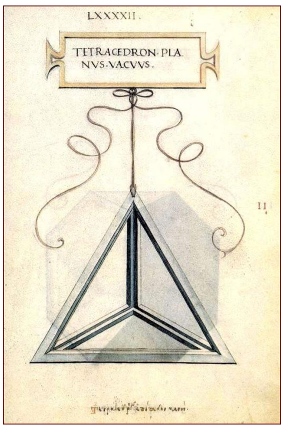
Luca Pacioli

- La ***Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità***, risalente al 1494, fu la prima opera a carattere enciclopedico di matematica a essere pubblicata a stampa, nel 1499.



Luca Pacioli

- Luca fu amico di **Leonardo da Vinci**,
  il quale illustrò la *Divina Proportione*:
- i disegni furono riprodotti a stampa…
  e oggi realizzati in modelli lignei.



Un'opera manoscritta di Pacioli

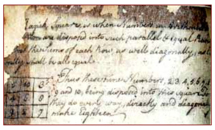
De Viribus Quantitatis

- Alla storia dei giochi matematici si collega ***De Viribus Quantitatis***, scritta presumibilmente tra il 1496 e il 1508.
- Una copia manoscritta, proveniente dalla biblioteca bolognese di G.G. Amadei, morto nel 1768, si trova presso la Biblioteca Universitaria di Bologna, codice 250.

Quadrati magici e giochi matematici

- Le celebri *Propositiones ad acuendos juvenes* di **Alcuino di York** (735-804) sono la prima raccolta di problemi matematici in latino.

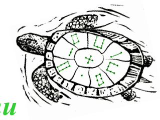
- Anche il grande filosofo **John Locke** (1632–1704)…
- … per non parlare di **Goethe** che nel *Faust*…



Sommario
Beautiful Minds
Da Luca Pacioli a John Nash

- **Introduzione**
  tra il XV e il XVI secolo
- **I quadrati magici**
  una storia antichissima
- **Moltiplicazioni**
  con risultati sorprendenti
- **Un gioco**
  di divinazione binaria
- **La Teoria dei Giochi**
  Von Neumann e Nash

I "quadrati magici"… partendo dalla Cina, VI sec. a.C.



Lo Shu

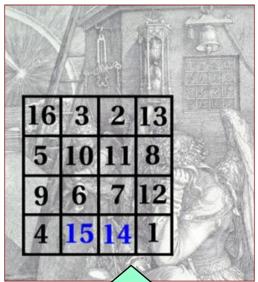
4 e **2** sono le spalle
8 e **6** sono i piedi
un **3** sulla sinistra
un **7** sulla destra
porta un **9** sulla testa
è calzato con un **1**
mentre un **5** sta nel mezzo

15

15	4	9	2
15	3	5	7
15	8	1	6
15	15	15	15

I "quadrati magici"… partendo dalla Cina, VI sec. a.C.

- **Il più antico quadrato magico** è il cinese *Lo Shu*, l'unico quadrato magico classico di ordine 3 (a parte i simmetrici etc.)
- L'interesse per questi "giochi" si diffuse in Occidente con *Malinconia* di **A. Dürer** (1514).
- **B. Frenicle de Bessy** (1605–1675) trovò 880 quadrati magici di ordine 4.

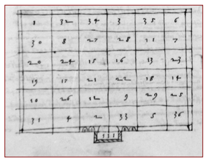


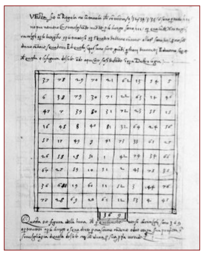
un "quadrato magico"

400	9	16	13	18	2	7	4	10	6	395	391	397	394	399	383	388	385	12	381
161	232	225	228	223	239	234	237	231	235	166	170	164	167	162	178	173	176	229	180
301	92	219	83	57	379	323	45	371	95	315	357	199	23	125	74	311	248	312	81
241	152	263	214	157	268	145	271	159	155	255	34	131	68	317	259	343	185	252	141
341	52	368	88	205	337	91	334	54	55	355	79	303	245	354	191	28	137	352	41
21	372	59	274	97	211	325	148	363	375	35	251	348	197	39	123	65	314	32	361
121	272	143	328	331	85	217	94	279	275	135	183	25	134	71	308	257	359	132	261
61	332	374	151	265	154	277	208	48	335	75	128	77	319	243	345	194	31	72	321
181	212	51	339	365	43	99	377	203	215	195	305	254	351	188	37	139	63	192	201
101	292	285	288	283	299	294	297	291	295	115	111	117	114	119	103	108	105	112	281
300	109	296	293	298	282	287	284	290	286	106	110	104	107	102	118	113	116	289	120
220	189	202	98	44	362	338	56	370	206	186	182	318	344	22	78	356	30	209	200
340	69	278	204	270	336	87	153	142	326	66	138	316	244	130	184	76	242	329	80
280	129	373	327	93	144	210	276	47	266	126	33	73	253	67	247	310	347	269	140
380	29	42	150	216	267	333	84	378	366	26	342	187	124	190	256	193	38	369	40
60	349	158	273	324	90	156	207	262	46	346	258	70	133	313	127	307	122	49	360
160	249	367	96	147	213	264	330	53	146	246	27	304	196	250	136	64	353	149	260
100	309	50	322	376	58	82	364	218	86	306	350	62	36	358	302	24	198	89	320
221	172	236	233	238	222	227	224	230	226	175	171	177	174	179	163	168	165	169	240
20	389	5	8	3	19	14	17	11	15	386	390	384	387	382	398	393	396	392	1

Quadrati magici nel XIV secolo

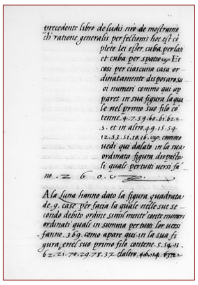
- L'introduzione dei quadrati magici in Europa è stata attribuita a **M. Moschopulos** intorno al 1415-1420, ma ci sono manoscritti precedenti (i quadrati di quello bolognese del 1339 sono in Pacioli).
- Alcuni dei quadrati (da 3×3 a 9×9) di Pacioli si ritrovano nel *De occulta philosophia libri tres* di Cornelio Agrippa (Anversa, 1531).





I “quadrati magici” nel *De Viribus Quantitatis*

- Un problema interpretativo è posto dal “quadrato di Mercurio”. Pacioli infatti, in generale, non elenca tutti gli elementi dei quadrati magici (a parte i primi numeri).
- Viene fatto riferimento ai disegni, ma purtroppo il manoscritto è incompleto: **lo spazio per i disegni spesso è lasciato vuoto.**
- Il “quadrato di Mercurio” è il più difficilmente identificabile tra quelli di Pacioli…



Il misterioso quadrato di Mercurio

- Di questo quadrato magico, di ordine 8, Pacioli fornisce soltanto le prime due righe (e la costante magica, 260):

4	7	59	60	61	62	2	5
49	15	54	12	53	51	10	16

- Esso è dunque incompleto e, come negli altri casi, non è illustrato dal disegno (e non è riportato da Cornelio Agrippa), ma tra i quadrati magici costruiti nel mondo arabo tra il XI e il XII secolo e conosciuti poi in Europa compare il seguente:

Il misterioso quadrato di Mercurio

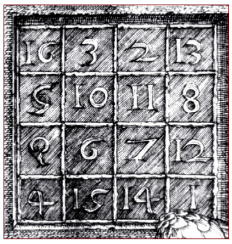
8+1 = 9 come in C. Agrippa; nel testo paciolano è: 4+5

8	7	59	60	61	62	2	1
49	15	54	12	53	51	10	16
41	42	22	21	20	19	47	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	18	46	45	44	43	23	24
9	55	14	52	13	11	50	56
64	63	3	4	5	6	58	57

Ma occupiamoci ora di un’esperienza riferibile ai quadrati magici molto più vicina noi: Goethe e il *Faust*…

I quadrati magici oggi

- La matematica da Frenicle ha realizzato molti risultati a proposito dei quadrati magici. Importante è…
- … l’ordine n del quadrato da costruire: esso può essere **dispari** (come per il quadrato *Lo Shu*, $n = 3$) o **pari** (come per quello di Dürer: $n = 4$).
- Presenteremo una regola per costruire un quadrato magico classico di ordine n dispari (vedremo ad esempio **il caso:** $n = 5$).



I quadrati magici oggi

- Iniziamo a porre **1 nella casella al centro della prima riga.**
- Poi collochiamo gli altri numeri, **in ordine, secondo una “diagonale ascendente”,** rispettando alcune regole.

		1		

I quadrati magici oggi

- **Regole per le “diagonali”:**
- si va alla colonna successiva in caso di fine colonna;
- si va alla riga precedente in caso di fine riga;
- si va alla casella inferiore in caso di casella occupata.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

E infine… verifichiamo!

- Troviamo la costante magica:
- somma dei numeri da 1 a 25: 25×26:2 = 325
- 325:5 = **65**

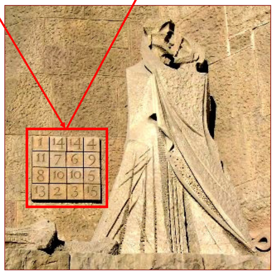
65	**17**	**24**	**1**	**8**	**15**
65	**23**	**5**	**7**	**14**	**16**
65	**4**	**6**	**13**	**20**	**22**
65	**10**	**12**	**19**	**21**	**3**
65	**11**	**18**	**25**	**2**	**9**
65	65	65	65	65	65

65 (diagonali)

La Sagrada Familia…

1	**14**	**14**	**4**
11	**7**	**6**	**9**
8	**10**	**10**	**5**
13	**2**	**3**	**15**

- **C'è un particolare interessante** nella splendida "facciata della Passione" di Josep Maria Subirachs...
- … un quadrato magico non classico di ordine 4 avente la costante magica **33** (mentre quella del quadrato di Dürer era **34**).



La Sagrada Familia…

- Il passaggio dal quadrato magico classico di ordine 4 a uno come quello della Sagrada Familia può non essere del tutto banale.
- Iniziamo col quadrato magico di **Dürer** (*c.m.* 34): simmetrizziamolo rispetto all'asse orizzontalee rispetto all'asse verticale. **E poi…**

4	15	14	1
9	6	7	12
5	10	11	8
16	3	2	13

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Sommario
Beautiful Minds
Da Luca Pacioli a John Nash

- **Introduzione** tra il XV e il XVI secolo
- **I quadrati magici** una storia antichissima
- **Moltiplicazioni** con risultati sorprendenti
- **Un gioco** di divinazione binaria
- **La Teoria dei Giochi** Von Neumann e Nash

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Il "XXXII effecto" è introdotto dalla dicitura **"De doi numeri che, multiplicato l'uno in l'altro, sempre farà la summa del producto le figure che voli"**. Non appare chiaro, sulla base del titolo, l'intendimento dell'Autore: si tratta di trovare dei fattori che portino a prodotti, in forma posizionale decimale, espressi da numeri costituiti da una stessa cifra ripetuta.
- Pacioli considera il caso di sei cifre e si propone di ottenere: **111111, 222222, 333333, 444444, 555555, 666666, 777777, 888888, 999999**
- Egli si basa inizialmente sul prodotto: **777 × 143 = 111111**

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Moltiplicando un fattore (Pacioli opera sul secondo, 143) per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (e dunque scegliendo come secondi fattori quelli riportati in grassetto nella tabella) si otterranno i prodotti sopra elencati:
- 777 × (143×2) = 777 × **286** = 111111 × 2 = 222222
  777 × (143×3) = 777 × **429** = 111111 × 3 = 333333
  777 × (143×4) = 777 × **572** = 111111 × 4 = 444444
  777 × (143×5) = 777 × **715** = 111111 × 5 = 555555
  777 × (143×6) = 777 × **858** = 111111 × 6 = 666666
  777 × (143×7) = 777 × **1001** = 111111 × 7 = 777777
  777 × (143×8) = 777 × **1144** = 111111 × 8 = 888888
  777 × (143×9) = 777 × **1287** = 111111 × 9 = 999999

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Successivamente Pacioli propone un secondo modo di realizzare lo stesso “effecto”, basato sul prodotto:

  481 × 231 = 111111
- Le due soluzioni di Pacioli esauriscono o meno quelle possibili per il problema di ottenere prodotti di sei cifre uguali?
- La risposta è **no.**
- **Esercizio.** Quante sono le soluzioni possibili per l’esercizio paciolano?
- [Risposta: 15, si ricordi la scomposizione in fattori primi e un po’ di calcolo combinatorio…]

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Perché Pacioli ha considerato proprio **111111?** L’“effecto” può essere proposto anche per prodotti costituiti da un numero di cifre ripetute **diverso da 6**.
- Si voglia ottenere un numero di tre, quattro etc. cifre uguali (il caso di due cifre è banale: 11 è un primo). Consideriamo le scomposizioni in fattori primi:

  111 = 3×37 1111 = 11×101

  11111 = 41×271 1111111 = 239×4649
- Per un numero di cifre minore di 8 le scomposizioni sono, a parte quella impiegata da Pacioli, costituite da **due soli fattori primi e ciò impedisce di proporre più soluzioni.**

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- La seconda parte del “XXXII effecto” è dedicata ai **numeri “tramezzati”**, cioè espressi in notazione posizionale decimale da espressioni come:

  121212, 232323, 343434 etc.
- L’Autore suggerisce che per ottenere un numero “tramezzato” (ad esempio 121212, costituito dalla “ripetizione” delle cifre 1 e 2, ovvero di 12), si può:
- considerare un numero di decine pari al doppio del numero che si vuole veder ripetuto (ad esempio 12)
- aggiungere a ciò tale numero (dunque: 12×10×2+12)
- moltiplicare il risultato per il numero fisso 481.

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Il procedimento paciolano equivale a moltiplicare il numero di due cifre considerato per

  (2×10+1)×481 = 10101
- e ciò porta, evidentemente, ad ottenere numeri “tramezzati”:

  12 × 10101 = 121212

  23 × 10101 = 232323

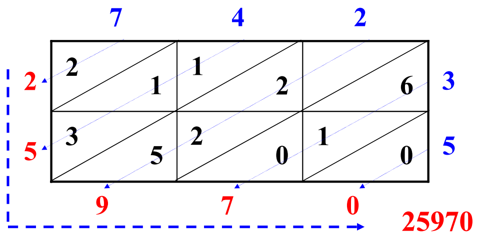
  34 × 10101 = 343434

  58 × 10101 = 585858

  etc.

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

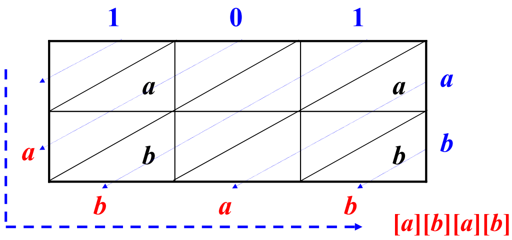
- L’efficacia è chiara se si considera la “moltiplicazione per graticola” (usatissima ai tempi di Pacioli).
- Eseguiamo la moltiplicazione: **742 × 35 = 25970**



Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Consideriamo ora il prodotto del numero espresso dalle cifre **[*a*][*b*]** per **101.**
- **101 × [*a*][*b*] = [*a*][*b*][*a*][*b*]**

Analogamente si opera per 10101, 1010101 etc.



Un altro esercizio sui prodotti strani

- **Esercizio.** Generalizzate l'"effecto" trovando altri procedimenti (pensate a scomposizioni di 10101 diverse da 21×481, osservando che nessuno di questi fattori è un numero primo!).
- Non dimenticate di dare una descrizione verbale del vostro procedimento, come fa frate Luca!

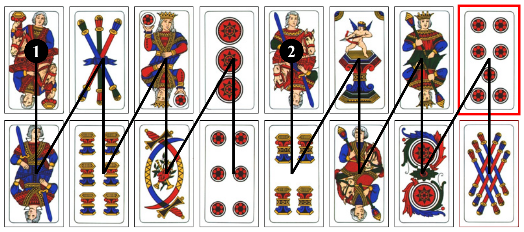
Sommario
Beautiful Minds
Da Luca Pacioli a John Nash

Un gioco di divinazione binaria

- Disponiamo sedici carte da gioco nel modo seguente e chiediamo al partecipante di individuarne una senza indicarla (*De Viribus Quantitatis*, Capitolo LXIX).
- Inquadriamo in rosso la carta scelta (**il *settebello***):

Un gioco di divinazione binaria

- Alla **prima** domanda ("in che riga sta la carta?") il partecipante indica la prima riga.
- Dopo lo spostamento (le linee 1, 2 diventano le nuove righe), la carta sta in una delle posizioni indicate:

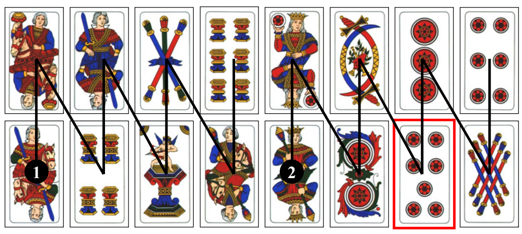


Un gioco di divinazione binaria

Così facendo la carta "pensata" verrà ad essere posizionata in un posto di ordine $k \equiv 1 \bmod 2$, cioè di posto dispari

Un gioco di divinazione binaria

- Alla **seconda** domanda ("in che riga sta la carta?") il partecipante indica la seconda riga.
- Dopo lo spostamento (le linee 1, 2 diventano le nuove righe), la carta sta in una delle posizioni indicate:

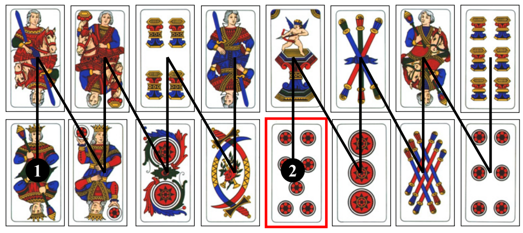


Un gioco di divinazione binaria

Così facendo la carta “pensata” verrà ad essere posizionata in un posto di ordine $k \equiv 1 \bmod 4$, cioè di posto 1, 5, 9 o 13

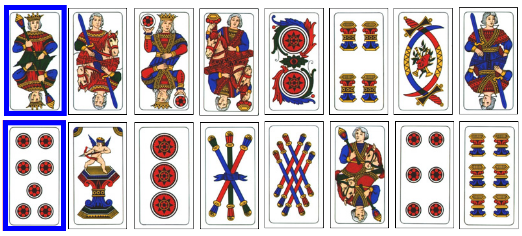
Un gioco di divinazione binaria

- Alla **terza** domanda (“in che riga sta la carta?”) il partecipante indica ancora la seconda riga.
- Dopo lo spostamento (le linee 1, 2 diventano le nuove righe), la carta sta in una delle posizioni indicate:



Un gioco di divinazione binaria

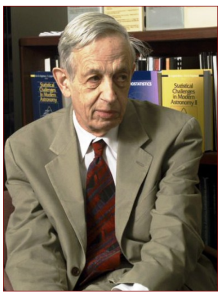
La carta sarà in un posto di ordine $k \equiv 1 \bmod 8$, cioè 1 o 9. Alla quarta domanda il partecipante indicherà la riga e la carta sarà individuata!



Sommario
Beautiful Minds
Da Luca Pacioli a John Nash

- **Introduzione**
  tra il XV e il XVI secolo
- **I quadrati magici**
  una storia antichissima
- **Moltiplicazioni**
  con risultati sorprendenti
- **Un gioco**
  di divinazione binaria
- **La Teoria dei Giochi**
  Von Neumann e Nash

Teoria dei Giochi
Beautiful minds



- Ma i giochi matematici sono davvero soltanto “giochi”?
- Per gli studi sui giochi matematici a **John Nash** (1928) è stato conferito nel 1994 il **Premio Nobel** per l’economia.
- La storia di Nash, la sua genialità abbinata alla schizofrenia, ha interessato e commosso milioni di persone…
- …ma Nash non è certo l’unico matematico che, dopo Pacioli, si è impegnato nella **Teoria dei Giochi.**

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

- János (John von) **Neumann** (1903–1957) fu una figura chiave della Game Theory.
- E non si deve dimenticare il grande Ennio **De Giorgi** (1928–1996), uno dei più importanti matematici del XX secolo: uno dei risultati per i quali è noto Nash riguarda la regolarità hölderiana delle soluzioni delle equazioni ellittiche del secondo ordine e **oggi viene chiamato Teorema di De Giorgi–Nash** (De Giorgi lo provò nel 1957).

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

- La Teoria dei Giochi si occupa di situazioni in cui **più agenti sono chiamati a prendere alcune decisioni.**
- Gli agenti capiscono la situazione in cui si trovano e sono in grado di fare ragionamenti logici anche complessi (sono “intelligenti”); hanno l’obiettivo di massimizzare le loro preferenze (sono “razionali”).
- Un gioco si dice **non cooperativo** quando l’adozione di strategie riguarda i singoli giocatori sulla base di ragionamenti individuali (se n’è occupato Nash).
- Un gioco si dice **a somma nulla** se la somma delle vincite è zero (ad esempio quando una squadra vince e l’altra perde).

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

- Von Neumann e Morgenstern dimostrarono (1944) che qualunque gioco a *n* soggetti e somma non zero si riduce a un gioco a *n*+1 soggetti e somma zero, e che la trattazione di questi ultimi giochi si collega a quella del gioco a due persone e somma zero.
- Pertanto **i giochi a due persone e a somma zero svolgono un ruolo fondamentale nella teoria dei giochi.**
- Una strategia è detta ***minimax*** quando **minimizza la massima perdita possibile**.
- Una strategia è detta ***maximin*** quando **massimizza la minima vincita possibile**.

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

- L’**equilibrio di Nash** (1949, Nash era studente a Princeton) riguarda giochi non cooperativi: sotto certe condizioni, **esiste un punto di equilibrio** che si ottiene quando ciascun partecipante sceglie la propria mossa strategica in modo da massimizzare la sua funzione di retribuzione **supponendo che gli altri competitori non varino i propri comportamenti a motivo della sua scelta.**
- I soggetti possono operare una scelta dalla quale **tutti traggono un guadagno** ovvero limitano la perdita al minimo.

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

Il Dilemma del Prigioniero
(Albert W. Tucker)

- Ciascuno dei due giocatori, i prigionieri A e B, ha due possibili scelte: **confessare o non confessare.**
- Se **uno solo dei due confessa,** viene perdonato e l’altro viene condannato a 8 anni di carcere.
- Se **entrambi confessano,** i prigionieri vengono entrambi condannati a 6 anni di carcere.
- Se **nessuno dei due confessa,** vengono condannati entrambi a 2 anni di carcere.
- È un gioco a somma non nulla e i giocatori scelgono la propria strategia simultaneamente, senza conoscere l’azione scelta dall’altro (**“non si parlano”**).

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

Questa soluzione minimizza gli anni “complessivi” di prigione!

- L’esito (in anni di prigione) è così sintetizzato:

Prigioniero B / Prigioniero A	*confessa*	*non confessa*
confessa	A=6, B=6	A=0, B=8
non confessa	A=8, B=0	A=2, B=2

- Riassumendo, ciascuno:
  se *confessa* rischia da 0 a 6 anni di carcere
  se *non confessa* rischia da 2 a 8 anni di carcere

minimax

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

… e “non si fidano” l’uno dell’altro!

- La conclusione, paradossale, porta a…

Prigioniero B / Prigioniero A	*confessa*	*non confessa*
confessa	A=6, B=6	A=0, B=8
non confessa	A=8, B=0	A=2, B=2

…un esito **non** soddisfacente per nessun giocatore **(6 anni a testa),** visto che **con due “non confessioni” l’esito sarebbe stato di soli 2 anni a testa!**

Per B, si tracciano frecce analoghe lungo le righe. I punti verso cui convergono le frecce sono gli "equilibri di Nash"

- Per trovare il punto di equilibrio di Nash…

Prigioniero B / Prigioniero A	*confessa*	*non confessa*
confessa	A=6, B=6	A=0, B=8
non confessa	A=8, B=0	A=2, B=2

- …si può usare il **metodo del flusso di frecce**, che qui applichiamo al nostro gioco rappresentato dalla matrice 2×2.

Matematica, giochi e strategie

- Diamo infine un'occhiata a questo "gioco", dove gli esiti quantificano i problemi di spesa e di sicurezza:

Superpotenza B / Superpotenza A	*si dota di armi nucleari*	*non si dota di armi nucleari*
si dota di armi nucleari	A=6, B=6	A=0, B=8
non si dota di armi nucleari	A=8, B=0	A=2, B=2

- Dunque, ragionando in termini "freddi", le due Superpotenze in gioco continueranno ad armarsi…
- **Ma questo, purtroppo, non è un gioco.**

Chiudiamo con *De Viribus Quantitatis* Uno spunto attuale

- Nell'antico lavoro di Pacioli c'è un suggerimento: l'indicazione di una strada forse lontana dalla didattica ufficiale, colta, ma talvolta fredda di quel tempo (dei giorni nostri?), ma ricca e stimolante: **una lettura che, dopo mezzo millennio, non ha ancora esaurito la propria vitalità…**

…per le beautiful minds!

Grazie a tutti dell'attenzione

Grazie a
Furio Honsell,
(già) Magnifico Rettore
dell'Università di Udine