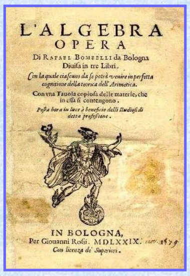
SFIDA–30 Nice, 29 nov 2008

XXX Seminario Franco–Italiano di Didattica dell'Algebra

Seguendo Rafael Bombelli

Un'introduzione didattica degli immaginari



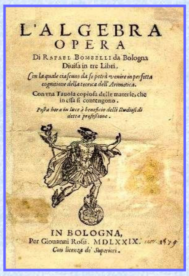
Per Chiara e Alessio

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario

Seguendo Rafael Bombelli…



- **Lo sfondo storico**
  Bombelli e il XVI secolo
- **Un'esperienza didattica**
  Secondo o terzo grado?
- **La catena semiosica**
  e un "oggetto" matematico

Una nota didattica: l'introduzione di un… "errore"?

- L'introduzione dei numeri immaginari, nella scuola secondaria, è un momento importante del curriculum.
- All'allievo, già bersagliato da regole che impediscono di estrarre la radice quadrata di un numero negativo, viene improvvisamente chiesto di accettare la presenza, nel proprio mondo matematico, di un "oggetto" nuovo, la preoccupante "radice quadrata di –1", alla quale viene assegnata la denominazione *i*.
- **Questa fase del percorso di apprendimento è delicata** (può essere fonte di incoerenze).
- **La storia della matematica** fornisce un utile spunto!

La storia delle equazioni di III grado

- La risoluzione delle equazioni di III (e IV) grado è ricondotta a **Gerolamo Cardano** (*Ars Magna*, 1545) e a **Nicolò Fontana**, detto **Tartaglia**, l'autore di *Quesiti et invenzioni diverse* (1546).
- La contesa per la priorità è celebre; ma il primo a ottenere una tecnica risolutiva fu probabilmente (1515) il bolognese **Scipione del Ferro**, il quale morì senza rendere pubblico il proprio risultato.

Equazioni di III grado nel XV secolo: la poesia "algebrica" di Tartaglia

- Quando che 'l cubo con le cose appresso
  se agguaglia à qualche numero discreto
  trovan dui altri differenti in esso.

  $x^3+px=q$
  $p>0$, $q>0$
  $q=u-v$
- Da poi terrai questo per consueto
  che 'l lor produtto sempre sia uguale
  al terzo cubo delle cose neto.

  $uv=(p/3)^3$
- El residuo poi suo generale
  delli lor lati cubi ben sottratti
  varrà la tua cosa principale.

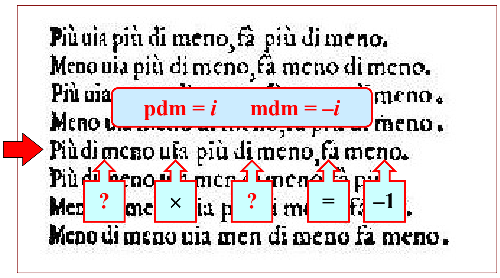
  $x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$

Questa semplificazione è delicata

L'*Algebra* di Bombelli

- La semplificazione dei radicali doppi fu studiata in alcuni casi particolari da **Rafael Bombelli** (1526-1573).
- Bombelli, bolognese (è stato trovato il certificato di battesimo a Borgo Panigale), pubblicò il proprio capolavoro, ***Algebra***, nel 1572-1579.

“Più di meno” e “meno di meno”


Più uia più di meno, fà più di meno.
Meno uia più di meno, fà meno di meno.
Più uia ... meno.
Meno ... meno.
Più di meno uia più di meno, fà meno.
Più di meno ... fà più
Me... me... ia p... i me... fà ...
Meno di meno uia men di meno fà meno.

- Queste “regole” si trovano a pagina 169 di *Algebra.*
- **Come le possiamo interpretare modernamente?**

Un esempio di risoluzione alla Bombelli–Cardano

- La risoluzione dell’equazione modernamente scritta:

$$x^3 = 15x+4$$

coinvolge la radice quadrata di $(q/2)^2-(p/3)^3 = -121$ e si conclude con la somma di radicali doppi:

$$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$

- Si prova quindi, sviluppando i cubi dei binomi, che è possibile scrivere:

$$2+11i = (2+i)^3 \qquad \text{e} \qquad 2-11i = (2-i)^3$$

- Dunque la soluzione **reale (ovvero complessa con parte immaginaria nulla)** dell’equazione proposta è:

$$x = (2+i) + (2-i) = 4$$

Un esempio di risoluzione alla Bombelli–Cardano

- Questa è la risoluzione dell’equazione ora esaminata che si trova nell’*Algebra* di Bombelli, a p. 294.

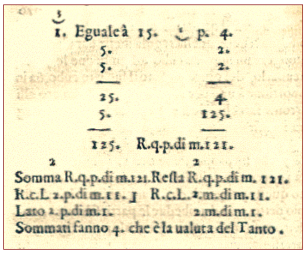
$x^3 = 15x+4$

$x^3 = px+q$

$(q/2)^2-(p/3)^3 = -121$

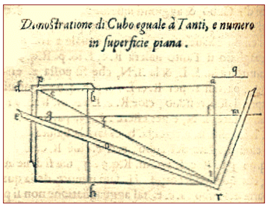
$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$

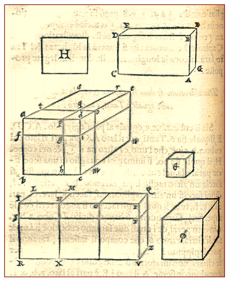
$x = (2+i) + (2-i) = 4$


1. Egualeà 15. p. 4.
5. 2.
5. 2.
25. 4
5. 125.
125. R.q.p.di m.121.
Somma R.q.p.di m.121. Resta R.q.p.di m. 121.
R.c.L 2.p.di m.11. R.c.L. 2.m.di m.11.
Lato 2.p.di m.1. 2.m.di m.1.
Sommati fanno 4. che è la ualuta del Tanto.

Un esempio di risoluzione alla Bombelli–Cardano

- … seguita (e confermata) dalle “costruzioni in linee”, sia tridimensionale, che bidimensionale.



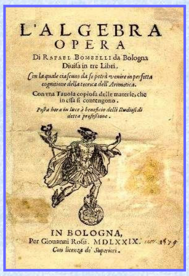


Un esempio di risoluzione alla Bombelli–Cardano

- Il procedimento precedente non si svolge interamente nell’ambito dei reali: **il risultato ottenuto, tuttavia, è reale, come i coefficienti dell’equazione data.**
- Una verifica della soluzione $x = 4$ nell’equazione $x^3 = 15x+4$ (che porta all’identità: $64 = 15\cdot4+4$) è dunque possibile senza uscire dall’ambito dei reali.
- Diversa sarebbe la situazione dell’equazione: $x^2 = -1$. **Il ruolo degli immaginari, qui, è rilevante:** il risultato dell’equazione (a coefficienti reali) è non reale e la sua accettazione dopo una verifica diretta richiede la considerazione di numeri immaginari.

Sommario

Seguendo Rafael Bombelli…


L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

- **Lo sfondo storico**
  Bombelli e il XVI secolo
- **Un’esperienza didattica**
  Secondo o terzo grado?
- **La catena semiosica**
  e un “oggetto” matematico

Scheda A $x^2+1=0$ $x=\pm\sqrt{-1}$

Scheda B $x^3-15x-4=0$ $x=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$ $x=(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})=4$

ricerca didattica sperimentale si è svolta in due fasi:

- nella **prima fase** sono stati esaminati 97 studenti di III (16–17 anni) e di IV liceo scientifico (17–18 anni). Gli allievi conoscevano i procedimenti risolutivi di equazioni di II grado e di equazioni riconducibili ad equazioni di II grado mediante opportune posizioni, ma *non* i numeri immaginari.
- Agli studenti sono state sottoposte (una dopo l'altra, nell'ordine!) le schede, A e B, con due risoluzioni…

Scheda A $x^2+1=0$ $x=\pm\sqrt{-1}$

- Soltanto il 2% del campione considerato ha affermato di accettare la risoluzione della **scheda A** (il 92% ha affermato di non accettarla; incerto il 6%).
- Immediatamente dopo, la risoluzione della **scheda B** è stata accettata dal 54% degli allievi (il 35% ha affermato di non accettarla; incerto l'11%).
- Dunque **la considerazione di quantità immaginarie nei passaggi del procedimento risolutivo di un'equazione, ma *non* nel risultato, è talvolta accettata dagli allievi.**
- La considerazione riservata al risultato è diversa da quella riservata ai passaggi intermedi…

Dalla storia alla didattica della matematica

- Prime considerazioni:
  il contratto didattico assegna notevole importanza alla **determinazione dell'esatto risultato finale**
  e ciò sembra far sì che nella stessa espressione del **risultato** dell'esercizio sia **assai pesante l'influenza delle "regole" precedentemente fissate.**
- Nei **passaggi intermedi**, invece, l'azione di regole e di proibizioni è meno coercitiva e una parte degli allievi si sente autorizzata a considerare non illecita la presenza di espressioni insolite e "rischiose", dopo aver controllato la correttezza del risultato finale.

La seconda fase della ricerca didattica

- La seconda fase della ricerca didattica si è avvalsa dei risultati di un test proposto a 73 studenti di III (allievi di 16–17 anni) e di IV Liceo scientifico (allievi di 17–18 anni). Per quanto riguarda il programma svolto, essi erano nelle stesse condizioni in cui si trovavano gli studenti coinvolti nella ricerca precedentemente citata.
- A ciascun allievo **sono state proposte le schede utilizzate nella prima fase della ricerca, ma in ordine inverso:**
  prima la scheda B e poi la scheda A.

La seconda fase della ricerca didattica

- ***Prima scheda esaminata (B, relativa al III grado)***

Tipologia di risposte	Allievi	Percentuale
"Accettabile"	30	41%
"Non accettabile"	18	25%
Incerti	25	34%

- ***Seconda scheda esaminata (A, relativa al II grado)***

Tipologia di risposte	Allievi	Percentuale
"Accettabile"	13	18%
"Non accettabile"	48	66%
Incerti	12	16%

La seconda fase della ricerca didattica

- I dati sono analoghi a quelli ottenuti nella ricerca precedente (numerosi, sono però gli incerti).
- Una parte di allievi (il **18%**) ha accettato la presenza di nell'equazione di II grado (esaminata ***dopo*** quella di III), mentre soltanto il **2%** del campione aveva accettato tale presenza nella precedente esperienza.
- Interessanti possono essere i dati (effetto "traino"):
  su 30 allievi che hanno risposto *accettabile* nella sc. B
  nella sc. A 13 (43% su 30) hanno risposto *accettabile*
  14 (47% su 30) hanno risposto *non accett.*
  3 (10% su 30) hanno dato risposte incerte
  (o non hanno risposto)

La seconda fase
della ricerca didattica

- Sono stati intervistati singolarmente i 14 studenti (11 della III e 3 della IV) che hanno accettato la risoluzione nella sc. B ma non quella nella sc. A: "perché accetti la presenza della radice di –1 nella sc. B e non accetti la presenza di nella sc. A?"
- 10 allievi (**71%** su 14) hanno notato, in vari modi, che **il risultato dell'equazione di terzo grado (scheda B) è reale, mentre quello dell'equazione di secondo grado (scheda A) non è reale;**
- 2 allievi hanno affermato di aver considerato gli esempi separatamente;
- 2 allievi non hanno fornito giustificazioni.

La seconda fase
della ricerca didattica

si tratta di una *presupposizione?*

- Dunque alle considerazioni degli studenti si affiancano e talvolta **si sovrappongono gli effetti determinati dalle clausole del contratto didattico.**
- I risultati del test indicano che un percorso di apprendimento potrebbe aver avuto luogo **in alcuni casi, sebbene la percentuale sia ancora bassa**.
- Assume un ruolo rilevante la constatazione seguente:

la considerazione della radice di –1 come "numero" può non essere causa di difficoltà particolari

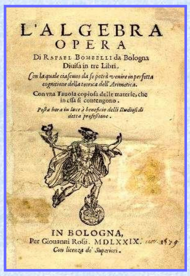
- **La sua efficacia (l'efficacia di radice di –1 "in azione") è garanzia della sua plausibilità.**

L'esordio di un concetto matematico (nella storia e/o nella didattica)

- **Non** intendiamo sostenere la validità della tesi di Piaget–Garcia ovvero della legge di Haeckel…
- L'analisi epistemologica dei primi sviluppi di un concetto matematico può tuttavia proporre percorsi interessanti da seguire, dal punto di vista didattico.
- Ci occuperemo in particolare dell'aspetto semiotico, con riferimento ad alcuni costrutti teorici di **Charles S. Peirce.**

Sommario

Seguendo Rafael Bombelli…



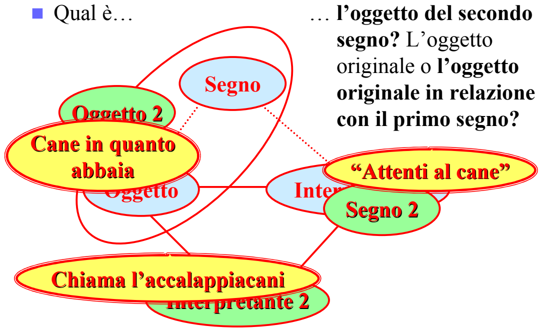
- **Lo sfondo storico**
  Bombelli e il XVI secolo
- **Un'esperienza didattica**
  Secondo o terzo grado?
- **La catena semiosica**
  e un "oggetto" matematico

Peirce e la semiosi illimitata
Due diverse interpretazioni

- Esaminiamo un esempio:

Peirce e la semiosi illimitata
Due diverse interpretazioni

- Qual è… … **l'oggetto del secondo segno?** L'oggetto originale o **l'oggetto originale in relazione con il primo segno?**



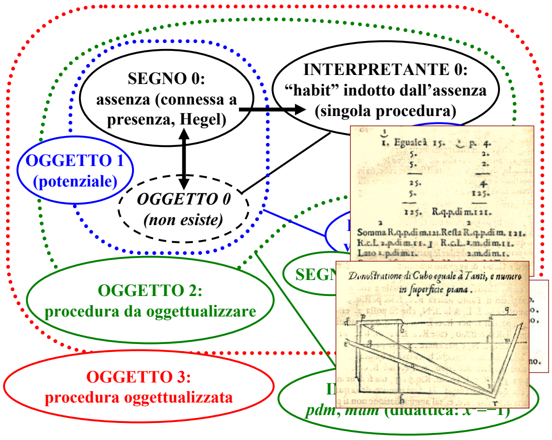
I segni e l'oggetto

- **L'oggettualizzazione di procedure** (Giusti, 1999) ci consente di ridimensionare l'importanza di un "oggetto matematico reale" – anche se un oggetto resta necessario nell'impostazione di Peirce.
- Si porrebbe però il problema del **"primo segno"** (ovvero dei **primi segni**): quale segno **non può essere considerato interpretante di segni precedenti?**
- **"L'assenza" può essere considerato un segno,** sebbene *sui generis*.
- Ciò sarebbe influenzato da importanti elementi:
  - **l'ambito in cui si opera**
  - **i soggetti coinvolti (studenti, insegnante)**
  - **un più ampio ambiente culturale…**

L'"oggettualizzazione di procedure" richiede un approfondimento

- Il punto di partenza della catena è una sorta di **oggetto–segno–interpretante** (senza "cronologia"):

  è un **atteggiamento** (*habit*)
  collegato con l'**assenza** di un "oggetto" –
  una **procedura** (che sarà) **oggettualizzata**
  ovvero, inizialmente, **da oggettualizzare.**
- C'è un'attività, anche da parte dello studente, tra l'assenza (o l'esigenza) e la focalizzazione del **ground delle prime rappresentazioni della catena.**
- Ciò è influenzato dal **contesto socio–culturale** (culture diverse portano a evidenziare aspetti diversi).



La radice del processo di semiosi

- Quanto ora ipotizzato non esaurisce l'evoluzione dell'"oggetto": né storicamente, né didatticamente.
- Con il progredire della catena semiosica si sviluppa la **componente formale;** l'oggetto può insomma assumere caratteristiche di rigore, diventare propriamente **"matematico"** (e questo è un aspetto rilevante per la didattica).
- Ma bisogna ricordare che nella storia si evolvono parallelamente **l'ambiente sociale, il contesto culturale, la concezione della matematica. Nella didattica questa evoluzione parallela è ben diversa:** ulteriore ricerca dovrà essere dedicata a tale aspetto.
- **Inoltre…**

La radice del processo di semiosi

- Inoltre, a nostro avviso, considerazioni come queste non devono aver la pretesa di essere conclusive: molto c'è da approfondire, da interpretare.
- Chiudiamo dunque la nostra riflessione citando le parole con cui **Hans G. Gadamer** chiuse il poscritto all'edizione 1972 di *Verità e metodo*:

«Un cattivo ermeneuta è colui che si illude di dover avere l'ultima parola»

A tutti grazie dell'attenzione

«Un cattivo ermeneuta è colui che si illude di dover avere l'ultima parola»