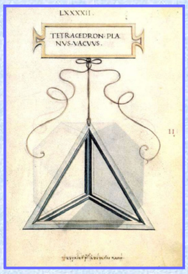
SFIDA–29 *Genova, 9 maggio 2008*

XXIX Seminario Franco–Italiano di Didattica dell'Agebra

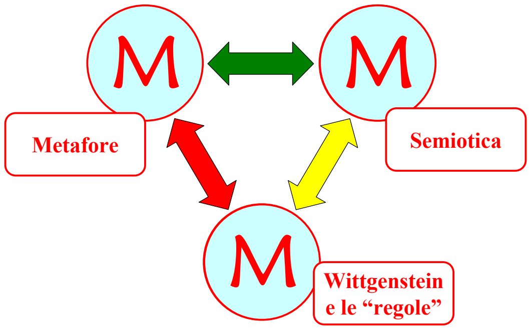
Una lettura peirceana
del "meccanismo" di Wittgenstein



Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

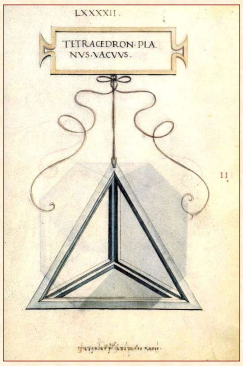
Un triangolo per un quadro teorico (uno spunto di J.-P. Drouhard)



Sommario

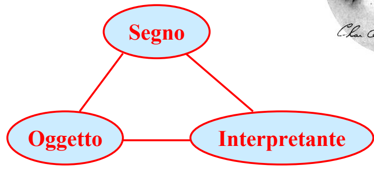
Da Peirce a Wittgenstein

- **Tra segni e strumenti** ricordando Peirce
- **Un celebre teorema** e tre diversi approcci
- **Spunti da Wittgenstein** "meccanismo" e secondità
- **Entriamo in classe** Una lettura didattica
- **Riflessioni conclusive** matematica e realtà



Peirce: segno, oggetto interpretante

- Il **triangolo semiotico** è alla base dell'approccio peirceano:



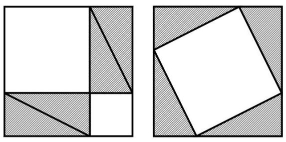
- L'**oggetto** è rappresentato da un **segno** (*icona*, *indice* o *simbolo* a seconda che si abbia una rassomiglianza, una connessione causale o una convenzione) e suscita un **interpretante**, cioè una reazione in chi interpreta.

Matematica e segni nella semiotica peirceana

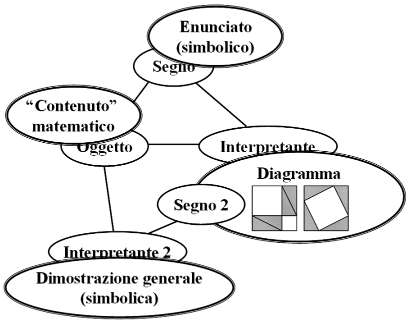
- Il **diagramma** rappresenta iconicamente la relazione matematica: rimane tuttavia **il problema dell'individualità dell'oggetto sul quale si sviluppa la dimostrazione contrapposta all'universalità delle conclusioni.**
- Il diagramma-icona tracciato per dimostrare ad esempio un teorema geometrico **è interpretante dell'enunciato simbolico** che traduce secondo alcune convenzioni (un'intenzione, dice Peirce).
- Questo diagamma-icona **determina infine un nuovo interpretante simbolico e universale (la dimostrazione)**.

Una fase iconica tra due momenti simbolici?

- Consideriamo il teorema di Pitagora:
- **Enunciato** (universale): in **ogni** triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.
- Da qui passiamo ad un **interpretante iconico…**
- **Diagramma:** il quadrato a sinistra e il quadrato a destra sono congruenti e il confronto delle loro scomposizioni verificare il teorema **(per questo caso).**



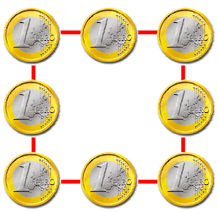
Una fase iconica
tra due momenti simbolici?



Una fase iconica
tra due momenti simbolici?

- Ma questo interpretante iconico è a sua volta un segno, e induce **un (nuovo) interpretante di carattere generale**, la dimostrazione del teorema.
- Un segno porta a utilmente considerare altri segni mediante i quali viene ottenuta la dimostrazione e il contenuto matematico rappresentato si lega in termini decisivi con i segni (icone o simboli).
- **L'aspetto didattico però può collocarsi in questo quadro teorico con caratteristiche specifiche: in particolare, la concretezza dell'indice potrà essere rivalutata didatticamente, soprattutto in alcuni contesti socio–culturali.**

Non solo icone (o simboli):
giochiamo con alcune monete…



- Disponiamo le monete in modo che ogni lato del quadrato ne comprenda tre.
- Come possiamo fare per formare con le stesse otto monete un quadrato con **quattro monete per lato?**
- Se consideriamo le monete come dei **"punti–posizione"** (iconicità) l'esercizio è impossibile.
- Ma considerandole (indicalità) **concrete monete…**

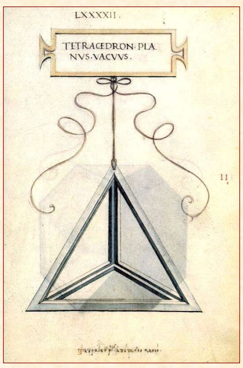
La didattica della matematica
verso una pluralità di segni

- Alcune considerazioni didatticamente molto importanti:
  - **uno stesso segno può essere interpretato** in modi diversi: può essere attribuita maggiore o minore importanza agli aspetti iconici, indicali, simbolici.
  - **ciò dipende dal segno, ma anche da chi è chiamato a interpretare,** dai contesti socio–
–culturali che hanno alle spalle i nostri allievi (problema che supera l'ambiente scolastico).
  - **da ciò dipende il comportamento degli allievi, dunque** il loro apprendimento.

Sommario

Da Peirce
a Wittgenstein

- **Tra segni e strumenti**
  ricordando Peirce
- **Un celebre teorema**
  e tre diversi approcci
- **Spunti da Wittgenstein**
  "meccanismo" e secondità
- **Entriamo in classe**
  Una lettura didattica
- **Riflessioni conclusive**
  matematica e realtà



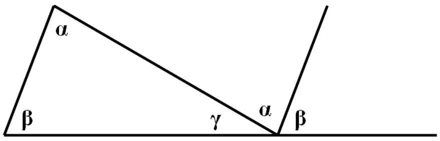
Aristotele
e i teoremi geometrici

- **Aristotele** afferma: (*Metafisica* Θ 9, 1051 a 21-24):
  «I teoremi di geometria si dimostrano per mezzo dell'atto, infatti si dimostrano operando delle divisioni nelle figure. Se queste divisioni fossero già operate, quei teoremi sarebbero immediatamente evidenti; invece sono contenute nelle figure solo in potenza».
- Ancora Aristotele (*Metafisica* Θ 9, 1051 a 25-27):
  «Perché gli angoli del triangolo assommano a due retti? Perché gli angoli intorno a un punto su di una retta sono due retti. Se, infatti, fosse già tracciata la parallela ad un lato del triangolo, alla semplice visione la cosa risulterebbe immediatamente evidente».

Aristotele e i teoremi geometrici

Prova 1

- Aristotele fa riferimento a questa figura:

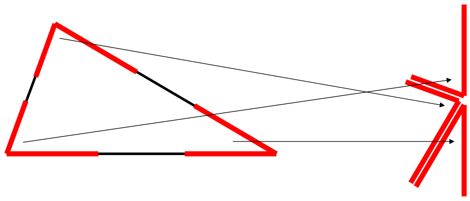


- **Intervenendo creativamente** la dimostrazione risulta semplice, ricordando le congruenze degli angoli alterni interni e degli angoli corrispondenti formati da una coppia di parallele tagliate da una trasversale.

La posizione di Aristotele nella pratica didattica

Prova 2

- Ma torniamo al triangolo e operiamo qualche taglio…

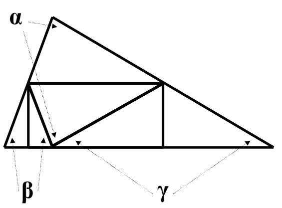


- Dopo aver ritagliato i tre angoli del triangolo (riprodotto ad esempio in cartoncino) possiamo **collocarli in modo di formare un angolo piatto.**

La posizione di Aristotele nella pratica didattica

Prova 3

- In alternativa, eseguiamo alcune **piegature**:

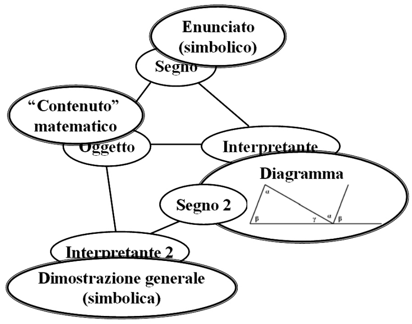


possiamo parlare, in questo caso e nel caso precedente, di una vera e propria "dimostrazione"? Oppure si tratta di verifiche di "casi particolari"?

- Esamineremo ora i due procedimenti schematizzati **in un'ottica peirceana:** quali sono, ad esempio, le differenze?

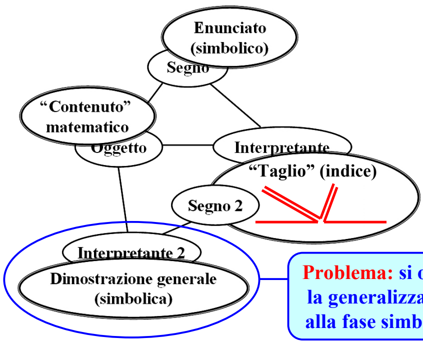
Un'analisi semiotica nella pratica didattica

Prova 1



Un'analisi semiotica nella pratica didattica

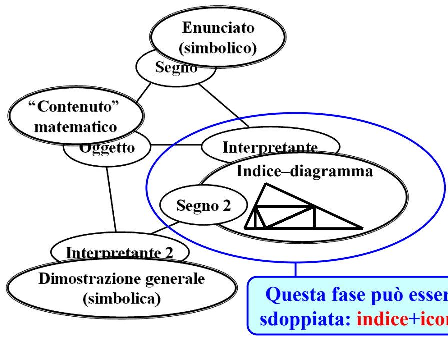
Prova 2



Problema: si ottiene la generalizzazione alla fase simbolica?

Un'analisi semiotica nella pratica didattica

Prova 3

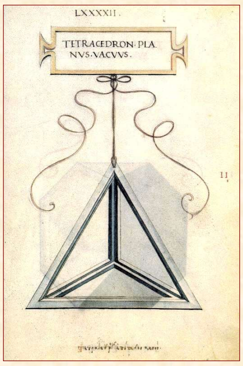


Questa fase può essere sdoppiata: indice+icona

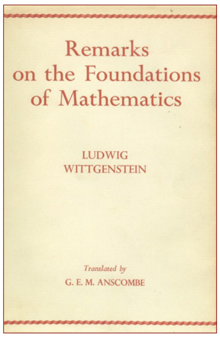
Sommario

Da Peirce a Wittgenstein

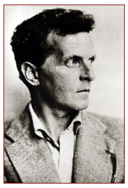
- **Tra segni e strumenti** ricordando Peirce
- **Un celebre teorema** e tre diversi approcci
- **Spunti da Wittgenstein** "meccanismo" e secondità
- **Entriamo in classe** Una lettura didattica
- **Riflessioni conclusive** matematica e realtà



In alcuni passi delle *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica…*



- …opera pubblicata (1956) postuma cinquantun anni fa, Ludwig Wittgenstein descrive un dispositivo meccanico

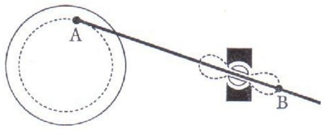


- **mediante il quale è possibile "suggerire" la dimostrazione di una proposizione.**

- Un primo accenno è nella III parte: «supponiamo che io abbia davanti a me le fasi del movimento di

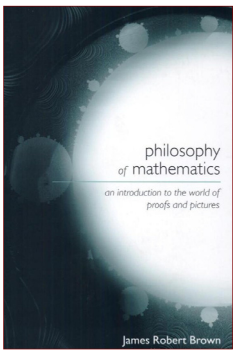
sotto forma di immagine. Questo mi aiuta a formulare una proposizione che io ricavo, per così dire, dalla lettura di quest'immagine. […] È strano che dalla lettura di un'*immagine* si debba poter ricavare una proposizione. Tuttavia la proposizione non tratta dell'immagine che io vedo. Non dice che in quest'immagine si può vedere questo e quest'altro. Ma non dice nemmeno che cosa farà il meccanismo reale, per quanto lo faccia capire».

- E nella V parte: «considera un meccanismo.



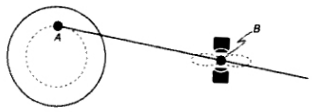
- Mentre il punto A descrive un cerchio, B descrive una figura a forma di otto. Questa proposizione la scriviamo come una proposizione della cinematica. **Mettendo in moto il meccanismo, il suo movimento mi prova la proposizione, proprio come farebbe una costruzione disegnata sulla carta.** La proposizione corrisponde, poniamo, a un'immagine del meccanismo in cui siano disegnate le traiettorie descritte dai punti A e B. Dunque, per un certo aspetto, la proposizione è un'immagine di quel movimento».

Ma non tutti hanno apprezzato il meccanismo di Wittgenstein…

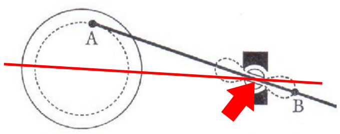


- Tra il funzionamento fisico e la proposizione matematica si colloca dunque **la mediazione della rappresentazione** visuale…
- e proprio questo collegamento può essere discusso in termini critici, come fa brillantemente **James Robert Brown.**

- **Una figura "corretta"** (per Brown) sarebbe simile a:

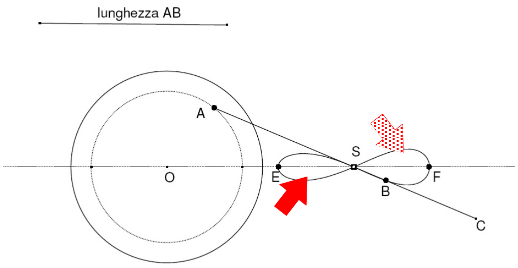


- – la figura descritta da B dovrebbe risultare **simmetrica** rispetto alla retta passante per il centro del cerchio e per il punto per il quale AB è vincolato a passare;



- – inoltre, quando A si trova nella posizione indicata, «B, invece di essere disegnato nella posizione a destra, dovrebbe trovarsi **al centro**» della figura "a otto".

- Non possiamo ottenere una "figure-eight" **simmetrica** rispetto al punto S; una figura… quasi simmetrica è:



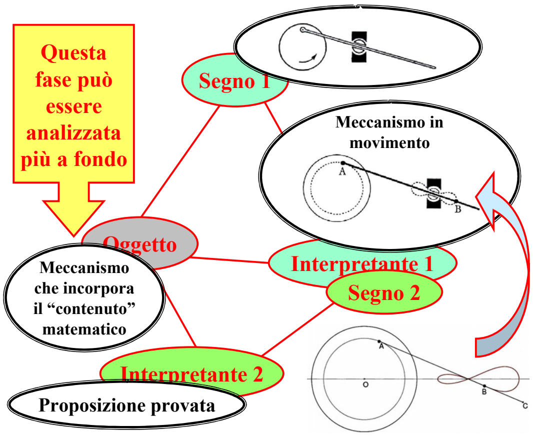
(dove ES=SF, ma la parte destra…
… è più estesa della sinistra).

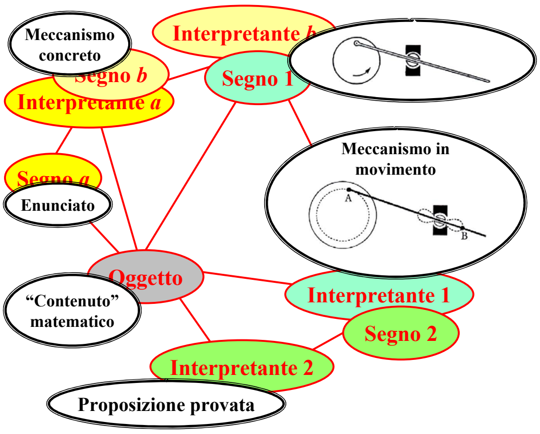
Le conclusioni di Brown (in chiave platonistica)

- Brown si chiede ora: «perché il diagramma è efficace, nonostante questi errori?»
- Dopo una lunga dissertazione conclude che la figura in esame «è **un disegno scadente** in quanto rappresenta erroneamente un meccanismo reale. Ma è **un buon simbolo**, in quanto rappresenta l'importante caratterizzazione astratta; esso "mostra l'esistenza di una relazione interna", nelle parole di Wittgenstein».
- Brown conclude che **«non è necessario che il disegno sia accurato; esso deve solamente condurre al senso», platonisticamente inteso.**

La sintonia del funzionamento "fisico" e di quello "matematico" (la descrizione del moto mediante equazioni) non può ridursi ad un'analogia: è la *necessità* della natura fisica che si rispecchia nella matematica mediante la quale il movimento è descritto in termini di indice (e questo aspetto può rivelarsi molto importante per la didattica)

- Ma nell'ultima parte si passa **dal suggerimento dato dall'immagine all'esecuzione del movimento del meccanismo**: «mettendo in moto il meccanismo, il suo movimento mi prova la proposizione, proprio come farebbe una costruzione disegnata sulla carta». Se l'importanza della "costruzione sulla carta" non è accantonata, **si ricorre ad una pratica "esecuzione".**

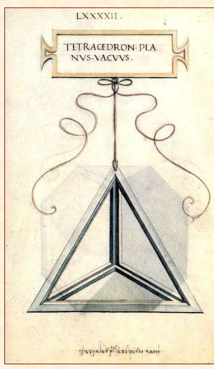




Sommario

Da Peirce a Wittgenstein

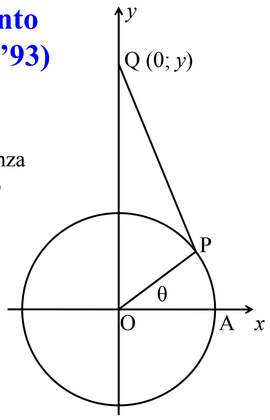
- **Tra segni e strumenti** ricordando Peirce
- **Un celebre teorema** e tre diversi approcci
- **Spunti da Wittgenstein** "meccanismo" e secondità
- **Entriamo in classe** Una lettura didattica
- **Riflessioni conclusive** matematica e realtà



Problema (uno spunto dalla maturità ’92–’93)

Prima versione

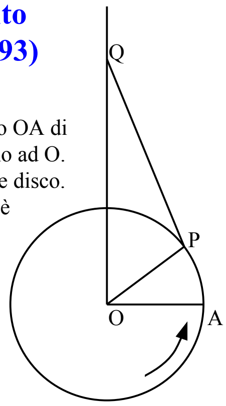
- Il punto P ($\cos\theta$; $\text{sen}\theta$) appartiene alla circonferenza di centro O (0; 0) e raggio OA con A (1; 0). Il punto Q (0; y_Q) appartiene al semiasse maggiore delle ordinate e PQ è il doppio del raggio. **Determinare il massimo e il minimo assunti da y_Q al variare di θ.**



Problema (uno spunto dalla maturità ’92–’93)

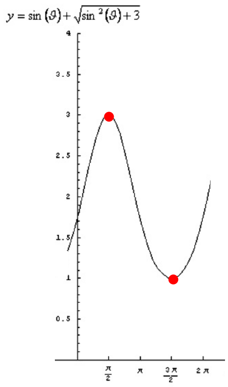
Seconda versione

- Il disco di centro O e raggio OA di misura unitaria ruota intorno ad O. P appartiene al bordo di tale disco. Una semiretta di origine O è perpendicolare a OA. Una sbarra PQ è lunga il doppio del raggio e Q è vincolato a muoversi sulla semiretta data. **Trovare i valori massimo e minimo assunti da OQ.**



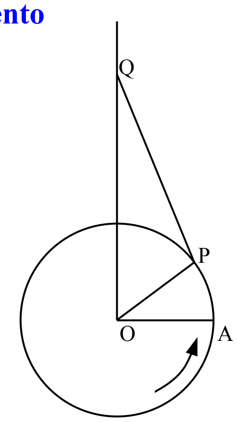
Qual è il comportamento degli allievi?

- Risolvendo il problema nella prima versione, gli allievi (studenti di 5° anno del Liceo Scientifico) tendono **a ricavare e a studiare la funzione** $y = \sin\theta + (\sin^2\theta+3)^{1/2}$
- Tale funzione è:
  - massima per $\theta = \pi/2$ e in tale caso risulta $y = 3$
  - minima per $\theta = 3\pi/2$ e in tale caso risulta $y = 1$



Qual è il comportamento degli allievi?

- Il precedente procedimento viene spesso eluso quando la risoluzione si riferisce alla seconda versione della traccia.
- In tale caso molti allievi danno le risposte:
  $y_{max} = 3$
  $y_{min} = 1$
  senza **ricorrere allo studio di funzione.**



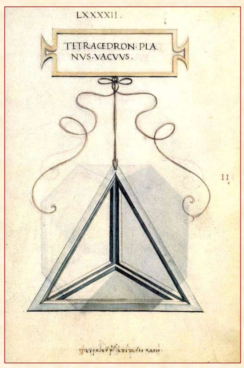
Qual è il comportamento degli allievi?

- Naturalmente è importante considerare l’influenza del **contratto didattico**: nella prima versione, la presenza di un riferimento cartesiano, l’indicazione della variabile θ e della funzione $f(\theta)$ inducono gli allievi a inquadrare il problema come un tradizionale “studio di funzione”.
- È peraltro interessante osservare che il riferimento ad un “disco” rotante, dunque ad un meccanismo concreto, svincola gli allievi dall’applicazione di **una procedura sostanzialmente non necessaria.**
- **La secondità si rivela didatticamente utile…**

Sommario

Da Peirce a Wittgenstein

- **Tra segni e strumenti** ricordando Peirce
- **Un celebre teorema** e tre diversi approcci
- **Spunti da Wittgenstein** “meccanismo” e secondità
- **Entriamo in classe** Una lettura didattica
- **Riflessioni conclusive** matematica e realtà



Il ruolo dell' "oggetto": che cosa rappresentano i segni?

- Ci resta da capire che cos'è l'"oggetto" che sta alla base delle rappresentazioni (segni) della matematica.
- Consideriamo la **definizione euclidea di cerchio** (*Elementi*, I, Def. XV) come figura piana racchiusa da una linea (circonferenza) tale che i segmenti tirati da un punto interno ad essa siano tutti uguali:
- «Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea [, cioè sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro».

Il ruolo dell' "oggetto": che cosa rappresentano i segni?

- Essa è molto vicina alla moderna nozione di luogo geometrico e può apparire diversa dalla **definizione euclidea di sfera** (*Elementi*, Libro XI, Definizione XIV) che si riferisce alla figura solida generata da un semicerchio quando questa ruota attorno al proprio diametro:
- «Sfera è la figura che viene compresa quando, restando immobile il diametro di un semicerchio, si faccia ruotare il semicerchio intorno al diametro finché non ritorni nuovamente nella stessa posizione da cui si cominciò a farlo muovere».

Il ruolo dell' "oggetto": che cosa rappresentano i segni?

- Quest'ultima descrizione, nota Enrico Giusti (1999, p. 23), «evoca più il tornio dell'operaio che il compasso del geometra».
- Sulla base di ciò avanziamo un'ipotesi per interpretare le definizioni euclidee…
- … che gli oggetti matematici provengano non dall'astrazione di oggetti reali, dei quali essi descriverebbero le caratteristiche, bensì **da un processo di oggettualizzazione di procedure.**

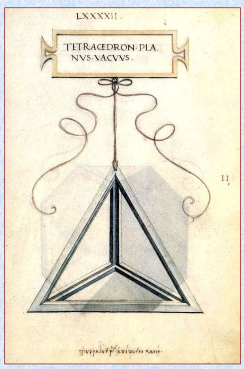
Il linguaggio (i linguaggi) nella matematica e nella didattica

- L'analisi semiotica mostra che non solo il diagramma è in grado di fungere da collegamento (iconico) tra due fasi simboliche generali.
- Anche l'aspetto indicale può avere un ruolo didatticamente rilevante!
- La ricchezza dei linguaggi della matematica non può essere imbrigliata in un unico schema.
- **Nella storia e nella geografia della matematica le diverse tradizioni culturali hanno dato peso a diversi tipi di segni.**
- **La didattica può tenere conto di questa ricchezza.**

Il linguaggio (i linguaggi) nella matematica e nella didattica

- "I matematici sono una specie di **francesi**: se si parla con loro, **traducono tutto nella loro lingua, e allora tutto diventa subito qualcosa di completamente diverso**" (Goethe, *Massime e Riflessioni*, nr. 1279, grazie a T. Pellegrino e L. Zuccheri).
- Anche nella didattica della matematica utilizziamo una lingua…
- …e si tratta di evitare che la nostra "traduzione" finisca per allontanare troppo la matematica dalle sue radici, dall'esperienza, dalla realtà.

A tutti grazie dell'attenzione



Grazie a Paolo Boero e a Giampaolo Chiappini