

Roma, 6 marzo 2008

Matematica e interpretazione
Una prospettiva ermeneutica




Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Didattica e interpretazione

- Francesco Speranza (1932-1998) afferma, nel proprio *Appello all'ermeneutica*: «L'insegnamento-apprendimento si può interpretare in chiave ermeneutica: che cosa sarebbe altrimenti il passaggio dal *savoir savant* al *savoir de l'élève*?»
- Il riferimento all'ermeneutica è una scelta molto impegnativa da diversi punti di vista, basata su di un'interpretazione attiva ad esempio del **linguaggio** o del **segno**.



Sommario
Matematica e interpretazione

- **Logos**
Centralità del linguaggio
- **Il circolo ermeneutico**
Interpretare la storia
- **Un aspetto didattico**
L'introduzione delle serie
- **Inferenze diverse**
Il ruolo dell'abduzione
- **Riflessioni conclusive**
La matematica "là fuori"?



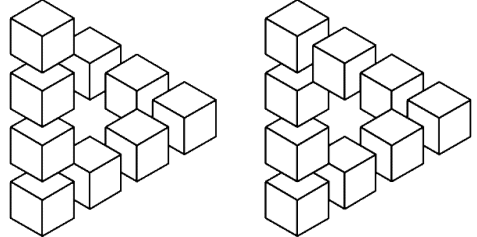
Linguaggi da interpretare
"Guardiamo" una figura...

- Lo svedese Oscar Reutersvärd (1915-2002) disegnò la prima "figura impossibile" nel 1934 (*Opus 1*).
- Reutersvärd affronta i temi dell'**ambiguità percettiva** riprendendo la problematica spazio-temporale del Cubismo e l'iconografia medioevale, ricca di **rappresentazioni a multipla lettura spaziale**.




Linguaggi da interpretare
"Guardiamo" una figura...

- Osserviamo la figura qui sotto a sinistra: nessun problema nel percepire un insieme di cubetti...
- **Ma se la figura fosse quella a destra (*Opus 1*)?**



Linguaggi da interpretare
"Guardiamo" una figura...

- Se eliminiamo due cubetti da uno dei tre lati, l'ambiguità si dissolve...




Linguaggi da interpretare “Guardiamo” una figura...

■ Ma se cerchiamo di “unire” le tre letture...

Interpretazione... circolare

- Friedrich Schleiermacher (1768-1834) segnalò un «circolo apparente, per il quale il particolare può comprendersi solo partendo dall’universale di cui è parte e viceversa».
- Scrisse inoltre (*Hermeneutik*, 144/455): «Partendo dall’inizio di un’opera e progredendo a poco a poco, la comprensione graduale di ogni singolo elemento e delle parti della totalità che a partire da essa si organizzano è sempre soltanto qualcosa di provvisorio. [...] Solo che quanto più avanziamo tanto più tutto ciò che precede viene anche illuminato da ciò che segue».

Sommario Matematica e interpretazione

- Logos
Centralità del linguaggio
- Il circolo ermeneutico
Interpretare la storia
- Un aspetto didattico
L’introduzione delle serie
- Inferenze diverse
Il ruolo dell’abduzione
- Riflessioni conclusive
La matematica “là fuori”?

Il circolo ermeneutico e la filosofia di Martin Heidegger

- Heidegger in *Sein und Zeit* scrive: «l’interpretazione deve sempre muoversi nel compreso e nutrirsi di esso [e] le regole più elementari della logica ci insegnano che il *circolo* è *circulus vitiosus*»; tuttavia se si riconosce nel circolo ermeneutico «un circolo vizioso e se si mira ad evitarlo o semplicemente lo si “sente” come un’irrimediabile imperfezione, si fraintende la comprensione da capo a fondo».
- Dunque una simile posizione sarebbe sbagliata e fuorviante: «l’importante non sta nell’uscir fuori dal circolo, ma nello starvi dentro nella maniera giusta».

Le pre-supposizioni mettono in moto il circolo ermeneutico

- La presenza di una “pre-supposizione” non deve essere considerata negativamente, come un indice di scarsa disponibilità ad una valutazione serena.
- Proprio le pre-supposizioni, conferma Giovanni Reale (introducendo Gadamer), sono «ciò che mette in moto il circolo; e la scientificità della ricerca si realizza nella misura in cui i pre-concetti vengono via via rinnovati e sostituiti nel corso del lavoro di interpretazione, in modo sempre più adeguato, e sempre più in sintonia con l’oggetto che viene indagato».

Il ruolo della storia

- Pensiamo con Gadamer al ruolo della storia e alla sua importanza per la matematica.
- Quando ci accostiamo ad un’opera “storica” (un capolavoro dell’arte fa ma anche un contenuto matematico) possiamo collocarla nel proprio periodo storico, ma anche leggerla con i nostri occhi.
- «Pensare storicamente significa portare a compimento quella trasposizione che i concetti del passato subiscono quando noi cerchiamo di pensare in base ad essi».

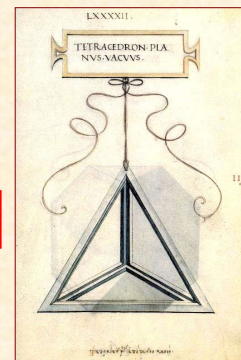
I contesti storico-culturali

- **Ogni cultura ha determinato lo sviluppo della propria matematica:** tentare l'omologazione di esperienze diverse sarebbe ingiustificato (e inutile); approcci storico-culturali (Luis Radford) ovvero antropologici ci chiedono invece di stabilire come i contesti culturali abbiano influenzato le esperienze matematiche.
- La collocazione di un'opera in un contesto *ha* un senso: ma non può ridursi al tentativo di riprodurre le caratteristiche di un periodo trascorso: con Gadamer, «l'essenza dello spirito storico non consiste nella restituzione del passato, ma nella *mediazione, operata dal pensiero, con la vita presente.*»

Sommario

Matematica e interpretazione

- **Logos**
Centralità del linguaggio
- **Il circolo ermeneutico**
Interpretare la storia
- **Un aspetto didattico**
L'introduzione delle serie
- **Inferenze diverse**
Il ruolo dell'abduzione
- **Riflessioni conclusive**
La matematica "là fuori"?

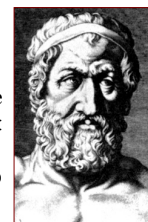


Un'addizione... "con infiniti addendi"

- L'introduzione delle **serie numeriche** è un momento delicato del curriculum matematico, in quanto il concetto di serie si sovrappone a quello di addizione (anche per la simbologia usata).
- Naturalmente **una serie non è riconducibile a un'addizione con... "tanti" addendi.**
- Spesso, una "somma di infiniti addendi" non nulli è considerata "infinitamente grande", in analogia con quanto accadrebbe addizionando infiniti addendi maggiori di un numero dato.
- Analizziamo un percorso di accostamento alle serie con l'aiuto alcuni "strumenti di lavoro"...

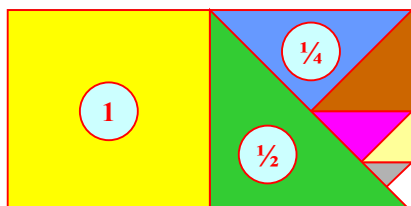
1 – Una "serie" antichissima: Zenone d'Elea

- Il paradosso di Achille e della Tartaruga di Zenone d'Elea (490-430 a.C.) si collega (modernamente interpretato) a una **serie geometrica convergente.**
- La velocità di Achille potrebbe essere il doppio di quella della Tartaruga e il vantaggio concesso dal primo alla seconda unitario (ad esempio di un metro).
- $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ **non supererebbe 2**, qualsiasi sia la quantità di addendi: in ogni passo di questa "addizione" si aggiunge infatti **la metà di quanto servirebbe per raggiungere 2.**



1 – Una "serie" antichissima: Zenone d'Elea

- Non è difficile trovare qualche giustificazione di ciò utile in ambito didattico. Ad esempio possiamo "riempire" un rettangolo di base 2 e altezza 1...



2 – La serie armonica e Nicola d'Oresme (1323-1382)

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$



Le (infinite) parentesi contengono 2, 4, 8, 16, ... addendi: **la serie è divergente** in quanto la somma di ciascuna parentesi è maggiore di 1/2 (anche se questa serie cresce molto lentamente: per superare 20 servono 272 400 200 termini).

3 – Una proprietà... “liberamente” applicata

- Consideriamo la serie delle potenze di $\frac{1}{2}$, esaminata poco fa. Una volta che l'allievo ha constatato che il suo “risultato” non è “infinito”, si pone il problema di capire *quale esso possa essere*.
- In effetti, le precedenti considerazioni hanno mostrato che $1+1/2+1/4+1/8+\dots$ non supererà 2, qualsiasi sia la quantità di addendi che si va a considerare; al più si nota che **più addendi si fanno entrare in gioco più la somma parziale si avvicina a 2**.
- **Ma è sufficiente ciò per concludere che la somma di “tutti gli infiniti addendi” è proprio 2?**

3 – Una proprietà... “liberamente” applicata

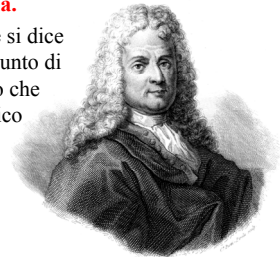
- Per ottenere un simile risultato si potrebbe essere tentati di procedere nel modo seguente: posto $1+1/2+1/4+1/8+\dots = s$ si raccoglie $\frac{1}{2}$ tra i termini dal secondo in poi: $1+(1/2)(1+1/2+1/4+1/8+\dots) = s$
- Dunque si ottiene: $1+(1/2)s = s$ da cui: $s = 2$
- Nel realizzare il raccoglimento a fattore comune di $\frac{1}{2}$ abbiamo applicato alcune delle note proprietà delle operazioni aritmetiche: **ma è lecito operare così nel caso di una “addizione di infiniti addendi”?**

4 – La “creazione ex nihilo” nella serie di Grandi

- Il procedimento visto ci ha portato ad una conclusione corretta (la somma della serie data è 2), ma può costituire **un precedente pericoloso**.
- Guido Grandi (1671-1742) nel 1703 scrisse: «Mettendo in modo diverso le parentesi nell'espressione $1-1+1-1+\dots$ io posso, volendo, ottenere 0 o 1. Ma allora l'idea della creazione *ex nihilo* è perfettamente plausibile».
- Infatti: $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0+0+0+\dots = 0$
 $1+(-1+1)+(-1+1)+\dots = 1+0+0+\dots = 1$
- Tale serie era eguagliata dal Grandi e da altri a $\frac{1}{2}$.

4 – La “creazione ex nihilo” nella serie di Grandi

- È oggi ben noto che la successione delle somme parziali associata alla serie di Grandi **non ammette alcun limite**: da ciò segue che **tale serie non ammette alcuna somma**.
- Si tratta di una serie che si dice **indeterminata** (e, dal punto di vista storico, ricordiamo che anche qualche matematico del XVIII secolo aveva suggerito una simile conclusione: **Jacopo Riccati**, 1761, I, p. 87).



4 – La “creazione ex nihilo” nella serie di Grandi

- Da un punto di vista elementare, la convergenza della serie di Grandi a $\frac{1}{2}$ può ottenersi con un procedimento vicino a quello che, poco fa, ci ha condotto ad affermare che la somma delle potenze di $\frac{1}{2}$ è 2. Posto: $1-1+1-1+\dots = s$ si raccoglie -1 tra i termini dal secondo in poi: $1-(1-1+\dots) = s$
- Dunque si ottiene: $1-s = s$ da cui: $s = \frac{1}{2}$
- **Questa volta, però, le conclusioni sono inaccettabili** (peraltro la stessa ammissione che $1-1+1-1+\dots$ indichi un numero s è, in questo caso, ingiustificata).

5 – Le inferenze secondo Peirce: deduzione, induzione, abduzione

- Nel 1878 C.S. Peirce (1834-1914) illustrò i tre tipi di inferenza con un celebre esempio: disponiamo di un sacco con l'etichetta “Fagioli bianchi”. Ciò significa tale sacco contiene soltanto fagioli bianchi (*regola*): estraendo una manciata di fagioli dal sacco (*caso*), si constata che sono tutti bianchi (*risultato*).
- Questa struttura è detta **deduzione**:

Regola Tutti i fagioli in questo sacco sono bianchi

Caso Questi fagioli provengono da questo sacco

▼

Risultato Questi fagioli sono bianchi

5 – Le inferenze secondo Peirce: deduzione, induzione, abduzione

- Illustriamo l'**induzione**: non conosciamo il contenuto del sacco (non c'è etichetta); per scoprirlo estraiamo una manciata del contenuto (*caso*) e notiamo che si tratta di fagioli bianchi (*risultato*). Questo ci fa supporre che il sacco contenga soltanto fagioli bianchi (*regola*). La regola generalizza il caso sperimentale, ma **non siamo certi** della sua validità:

Caso Questi fagioli provengono da questo sacco

Risultato Questi fagioli sono bianchi

Regola Tutti i fagioli di questo sacco sono bianchi (?)

5 – Le inferenze secondo Peirce: deduzione, induzione, abduzione

- **Abduzione**: vediamo una manciata di fagioli bianchi su di un tavolo (*risultato*) e, accanto, un sacco con l'etichetta "Fagioli bianchi" (*regola*). Supponiamo allora che i fagioli provengano da quel sacco.
- La struttura logica è la seguente:

Risultato Questi fagioli sono bianchi

Regola Tutti i fagioli di questo sacco sono bianchi

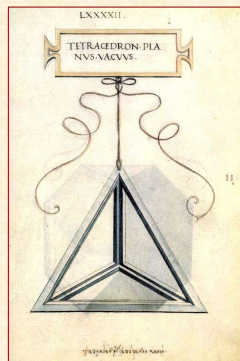
Caso Questi fagioli provengono da questo sacco (?)

- **Non siamo certi** della validità: il risultato potrebbe non essere un caso della regola che conosciamo.

Sommario

Matematica e interpretazione

- **Logos**
Centralità del linguaggio
- **Il circolo ermeneutico**
Interpretare la storia
- **Un aspetto didattico**
L'introduzione delle serie
- **Inferenze diverse**
Il ruolo dell'abduzione
- **Riflessioni conclusive**
La matematica "là fuori"?



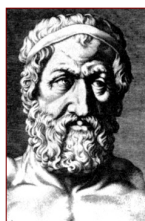
Presupposizione originale (errata):

- (i) una "addizione con infiniti addendi" è pur sempre un'addizione e avrà un "risultato"
- (ii) essendo infinito il numero degli addendi, tale "risultato" sarà infinito

- Seguiamo la formazione della presupposizioni...
 - ◆ **Abduzione (a)** [alla base del punto (i)]
 - *risultato (a)* la serie è indicata da un'espressione scritta con dei numeri e con il simbolo "+"
 - *regola (a)* le addizioni vengono indicate da espressioni scritte con dei numeri e con il simbolo "+"
 - → *caso (a)* la serie è un'addizione

Attenzione: potrebbe trattarsi di una semplice analogia: l'allievo non "cerca" una regola...

- ◆ **Abduzione (b)** [alla base del punto (ii)]
- *risultato (b)* una serie ha "infiniti addendi"
- *regola (b)* se la somma di una "addizione" supera ogni limitazione assegnata, allora tale addizione deve avere "infiniti addendi"
- → *caso (b)* la somma di una serie supera ogni limitazione assegnata
- Bisogna che l'allievo capisca che si tratta di **un'abduzione scorretta!**
- **Controesempio:** $1+1/2+1/4+1/8+\dots$



◆ Induzione (c) [alla base del nuovo punto (ii)]

- *caso (c)* $1+1/2+1/4+1/8+\dots$ ha il termine generale infinitesimo
- *risultato (c)* $1+1/2+1/4+1/8+\dots$ ha un "risultato finito"
- → *regola (c)* se una serie ha termine generale infinitesimo allora ha un "risultato finito"
- Si tratta di **un'induzione scorretta!**

Seconda presupposizione (errata):

- (i) una "addizione con infiniti addendi" è pur sempre un'addizione e avrà un "risultato"
- (ii) il "risultato" non è infinito quando gli addendi diventano indefinitamente piccoli

Terza presupposizione (parzialmente errata):

- (i) una "addizione con infiniti addendi" è pur sempre un'addizione e avrà un "risultato"
- (ii) il "risultato" può essere finito o infinito quando gli addendi diventano indefinitamente piccoli

Dobbiamo giungere alla

Quarta presupposizione:

- (i) una "addizione con infiniti addendi" non è una vera e propria addizione
- (ii) essa può avere un "risultato" finito o infinito oppure non avere alcun "risultato"

Serie numeriche e presupposizioni

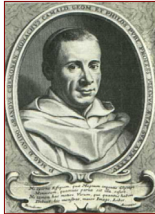
◆ **Deduzione (d)** [alla base del nuovo punto (i)]

- regola (d) a tutte le comuni operazioni aritmetiche devono poter essere applicate le ben note proprietà
- caso (d) applicando le proprietà delle operazioni aritmetiche si ricava:

$$1-1+1-1+\dots = 0$$

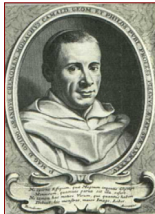
$$1-1+1-1+\dots = 1$$

$$1-1+1-1+\dots = \frac{1}{2}$$
 e ciò è contraddittorio
- risultato (d) la serie $1-1+1-1+\dots$ non è una comune addizione
- Questa deduzione è corretta!**



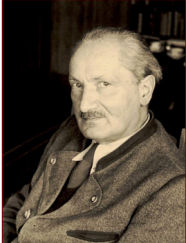
Serie numeriche e presupposizioni

- Tutto ciò vale per la serie di Grandi. Nella mente dell'allievo può dunque scattare una generalizzazione.
- ◆ **Induzione (e)**
- caso (e) $1-1+1-1+\dots$ è una serie
- risultato (e) $1-1+1-1+\dots$ non è una comune addizione
- regola (e) le serie numeriche non sono comuni addizioni
- Più propriamente, il processo si completa con l'istituzionalizzazione da parte dell'insegnante.



Riassumiamo: abduzione, ipotesi, presupposizioni

- L'inferenza abduttiva si basa sulla formulazione di un'ipotesi in grado di spiegare i dati disponibili...
- ... tale ipotesi (assimilabile ad una presupposizione) **deve però essere controllata.**
- È indispensabile, ricordando Heidegger, ricorrere ad una presupposizione: ma bisogna che essa sia giustificata e passibile di revisione.
- È quanto accade nella matematica, nella sua storia e nella sua didattica.**



Sommario


Matematica e interpretazione

- Logos**
Centralità del linguaggio
- Il circolo ermeneutico**
Interpretare la storia
- Un aspetto didattico**
L'introduzione delle serie
- Inferenze diverse**
Il ruolo dell'abduzione
- Riflessioni conclusive**
La matematica "là fuori"?



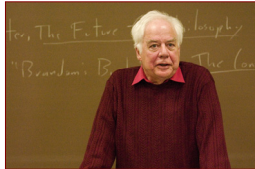
Verso una "conclusione"

- Possiamo inquadrare la matematica in un approccio ermeneutico: una **costruzione umana** da interpretare, non un momento di accesso ad una (alla) Verità.
- La matematica può certamente collegarsi al mondo reale; ma la matematica non "è la verità"** (si pensi a Richard Rorty).
- Il fatto che la scrittura " $9+8 = 17$ " venga da sempre classificata "vera" non significa banalmente che essa corrisponda...



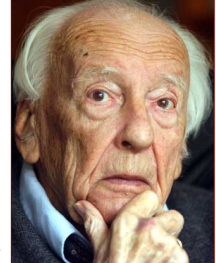
Verso una “conclusione”

- ...a qualcosa di “vero”, di assoluto, di bello o di giusto che si trova “là fuori”.
- Il problema si riconduce a questa spesso invocata “scoperta” della (o di una) verità “là fuori”: «il mondo è là fuori, ma le descrizioni del mondo non lo sono. Solo le descrizioni del mondo possono essere vere o false. Il mondo di per sé – a prescindere dalle attività descrittive degli uomini – non può esserlo» (Rorty).

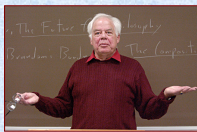


Verso una “conclusione”

- Tuttavia, a nostro avviso, considerazioni come queste non devono e non possono avere la pretesa di essere conclusive...
- Chiudiamo dunque la nostra riflessione citando la serena espressione con cui Gadamer chiuse il poscritto all'edizione 1972 del proprio *Verità e metodo*:
«un cattivo ermeneuta è colui che si illude di dover avere l'ultima parola»



*A tutti grazie
dell'attenzione*



Grazie a Dick Rorty
(1931–2007)

