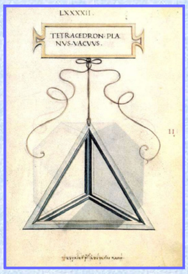
Roma, 6 marzo 2008

Matematica e interpretazione
Una prospettiva ermeneutica



Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Didattica e interpretazione

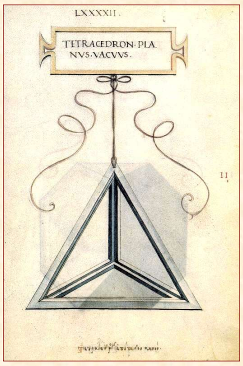
- **Francesco Speranza** (1932-1998) afferma, nel proprio *Appello all'ermeneutica*: «L'insegnamento-apprendimento si può interpretare in chiave ermeneutica: che cosa sarebbe altrimenti il passaggio dal *savoir savant* al *savoir de l'élève*?»

- Il riferimento all'ermeneutica è una scelta molto impegnativa da diversi punti di vista, basata su di **un'interpretazione attiva** ad esempio del **linguaggio** o del **segno.**

Sommario

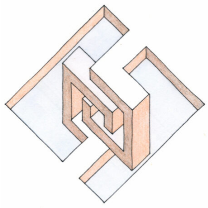
Matematica e interpretazione

- **Logos**
  Centralità del linguaggio
- **Il circolo ermeneutico**
  Interpretare la storia
- **Un aspetto didattico**
  L'introduzione delle serie
- **Inferenze diverse**
  Il ruolo dell'abduzione
- **Riflessioni conclusive**
  La matematica "là fuori"?



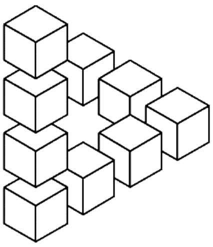
Linguaggi da interpretare "Guardiamo" una figura…

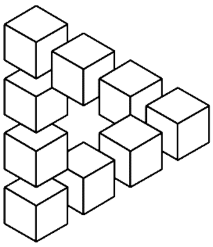
- Lo svedese Oscar Reutersvärd (1915-2002) disegnò la prima "figura impossibile" nel 1934 (*Opus 1*).
- Reutersvärd affronta i temi dell'**ambiguità percettiva** riprendendo la problematica spazio-temporale del Cubismo e l'iconografia medioevale, ricca di **rappresentazioni a multipla lettura spaziale**.



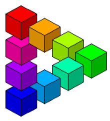
Linguaggi da interpretare "Guardiamo" una figura…

- Osserviamo la figura qui sotto a sinistra: nessun problema nel percepire un insieme di cubetti…
- **Ma se la figura fosse quella a destra (*Opus 1*)?**

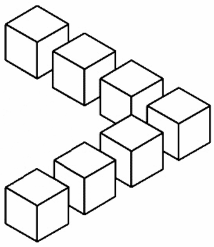


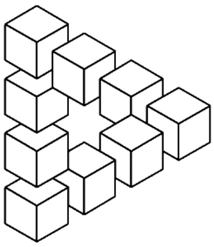


Linguaggi da interpretare "Guardiamo" una figura…

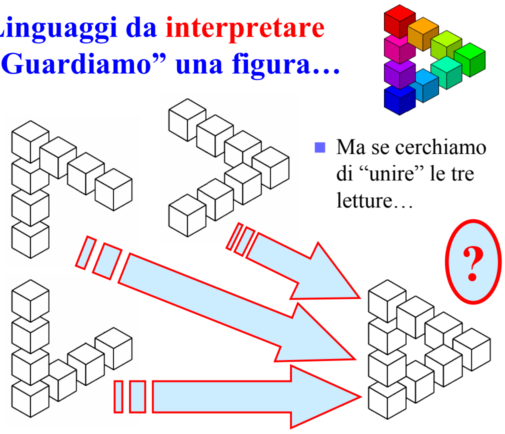


- Se eliminiamo due cubetti da uno dei tre lati, l'ambiguità si dissolve…





Linguaggi da interpretare
“Guardiamo” una figura…



- Ma se cerchiamo di “unire” le tre letture…

Interpretazione… circolare

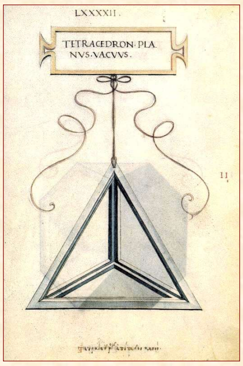
- Friedrich Schleiermacher (1768-1834) segnalò un «circolo apparente, per il quale il particolare può comprendersi solo partendo dall’universale di cui è parte e viceversa».
- Scrisse inoltre (*Hermeneutik*, 144/455):

  «Partendo dall’inizio di un’opera e progredendo a poco a poco, la comprensione graduale di ogni singolo elemento e delle parti della totalità che a partire da essa si organizzano è sempre soltanto qualcosa di provvisorio. […] **Solo che quanto più avanziamo tanto più tutto ciò che precede viene anche illuminato da ciò che segue».**

Sommario

Matematica e interpretazione

- **Logos**
  Centralità del linguaggio
- **Il circolo ermeneutico**
  Interpretare la storia
- **Un aspetto didattico**
  L’introduzione delle serie
- **Inferenze diverse**
  Il ruolo dell’abduzione
- **Riflessioni conclusive**
  La matematica “là fuori”?



Il circolo ermeneutico e la filosofia di Martin Heidegger

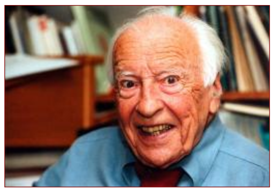
- **Heidegger** in *Sein und Zeit* scrive: «**l’interpretazione deve sempre muoversi nel compreso e nutrirsi di esso** [e] le regole più elementari della logica ci insegnano che il *circolo* è *circulus vitiosus*»; tuttavia se si riconosce nel circolo ermeneutico «*un circolo vizioso e se si mira ad evitarlo o semplicemente lo si “sente” come un’irrimediabile imperfezione, si fraintende la comprensione da capo a fondo*».
- Dunque una simile posizione sarebbe sbagliata e fuorviante: **«l’importante non sta nell’uscir fuori dal circolo, ma nello starvi dentro nella maniera giusta».**

Le pre-supposizioni mettono in moto il circolo ermeneutico

- La presenza di una **“pre-supposizione”** non deve essere considerata negativamente, come un indice di scarsa disponibilità ad una valutazione serena.
- Proprio le pre-supposizioni, conferma Giovanni Reale (introducendo Gadamer), sono

  «*ciò che mette in moto il circolo*; e la scientificità della ricerca si realizza nella misura in cui i pre-concetti vengono via via rinnovati e sostituiti nel corso del lavoro di interpretazione, in modo sempre più adeguato, e sempre più in sintonia con l’oggetto che viene indagato».

Il ruolo della storia



- Pensiamo con Gadamer al **ruolo della storia** e alla sua importanza per la matematica.
- Quando ci accostiamo ad un’opera “storica” (un capolavoro dell’arte fa ma anche un contenuto matematico) possiamo collocarla nel proprio periodo storico, ma anche leggerla con i nostri occhi.
- «*Pensare storicamente* significa *portare a compimento quella trasposizione che i concetti del passato subiscono* quando noi cerchiamo di pensare in base ad essi».

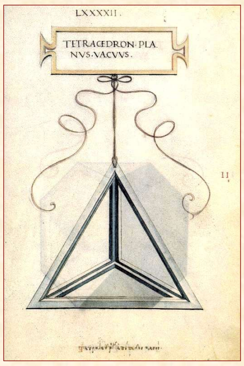
I contesti storico-culturali

- **Ogni cultura ha determinato lo sviluppo della propria matematica:** tentare l'omologazione di esperienze diverse sarebbe ingiustificato (e inutile); approcci storico-culturali (Luis Radford) ovvero antropologici ci chiedono invece di stabilire come i contesti culturali abbiano influenzato le esperienze matematiche.
- La collocazione di un'opera in un contesto *ha* un senso: ma non può ridursi al tentativo di riprodurre le caratteristiche di un periodo trascorso: con Gadamer, **«l'essenza dello spirito storico non consiste nella restituzione del passato, ma nella *mediazione, operata dal pensiero, con la vita presente*».**

Sommario

Matematica e interpretazione

- **Logos**
  Centralità del linguaggio
- **Il circolo ermeneutico**
  Interpretare la storia
- **Un aspetto didattico**
  L'introduzione delle serie
- **Inferenze diverse**
  Il ruolo dell'abduzione
- **Riflessioni conclusive**
  La matematica "là fuori"?

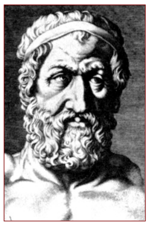


Un'addizione… "con infiniti addendi"

- L'introduzione delle **serie numeriche** è un momento delicato del curriculum matematico, in quanto il concetto di serie si sovrappone a quello di addizione (anche per la simbologia usata).
- Naturalmente **una serie non è riconducibile a un'addizione con… "tanti" addendi.**
- Spesso, una "somma di infiniti addendi" non nulli è considerata "infinitamente grande", in analogia con quanto accadrebbe addizionando infiniti addendi maggiori di un numero dato.
- Analizziamo un percorso di accostamento alle serie con l'aiuto alcuni "strumenti di lavoro"…

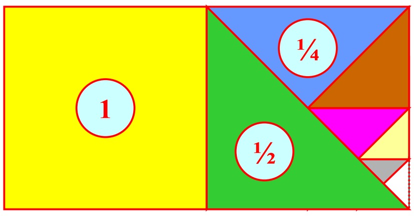
1 – Una "serie" antichissima: Zenone d'Elea

- Il paradosso di Achille e della Tartaruga di Zenone d'Elea (490-430 a.C.) si collega (modernamente interpretato) a una **serie geometrica *convergente*.**
- La velocità di Achille potrebbe essere il doppio di quella della Tartaruga e il vantaggio concesso dal primo alla seconda unitario (ad esempio di un metro).
- 1+1/2+1/4+1/8+… **non supererebbe 2,** qualsiasi sia la quantità di addendi: in ogni passo di questa "addizione" si aggiunge infatti **la metà di quanto servirebbe per raggiungere 2.**



1 – Una "serie" antichissima: Zenone d'Elea

- Non è difficile trovare qualche giustificazione di ciò utile in ambito didattico. Ad esempio possiamo "riempire" un rettangolo di base 2 e altezza 1…



2 – La serie armonica e Nicola d'Oresme (1323-1382)

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

Le (infinite) parentesi contengono 2, 4, 8, 16, … addendi: **la serie è divergente** in quanto la somma di ciascuna parentesi è maggiore di 1/2 (anche se questa serie cresce molto lentamente: per superare **20** servono **272 400 200 termini**).

3 – Una proprietà… "liberamente" applicata

- Consideriamo la serie delle potenze di ½, esaminata poco fa. Una volta che l'allievo ha constatato che il suo "risultato" non è "infinito", si pone il problema di capire *quale esso possa essere*.
- In effetti, le precedenti considerazioni hanno mostrato che 1+1/2+1/4+1/8+… non supererà 2, qualsiasi sia la quantità di addendi che si va a considerare; al più si nota che **più addendi si fanno entrare in gioco più la somma parziale si avvicina a 2.**
- **Ma è sufficiente ciò per concludere che la somma di "tutti gli infiniti addendi" è proprio 2?**

3 – Una proprietà… "liberamente" applicata

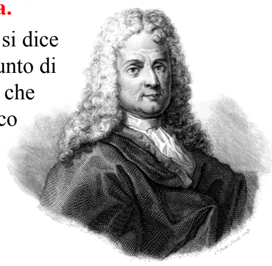
- Per ottenere un simile risultato si potrebbe essere tentati di procedere nel modo seguente: posto
  $1+1/2+1/4+1/8+\ldots = s$
  si raccoglie ½ tra i termini dal secondo in poi:
  $1+(1/2)(1+1/2+1/4+1/8+\ldots) = s$
- Dunque si ottiene:
  $1+(1/2)s = s$ da cui: $\boldsymbol{s = 2}$
- Nel realizzare il raccoglimento a fattor comune di ½ abbiamo applicato alcune delle note proprietà delle operazioni aritmetiche: **ma è lecito operare così nel caso di una "addizione di infiniti addendi"?**

4 – La "creazione ex nihilo" nella serie di Grandi

- Il procedimento visto ci ha portato ad una conclusione corretta (la somma della serie data è 2), ma può costituire **un precedente pericoloso.**
- Guido Grandi (1671-1742) nel 1703 scrisse:
  «Mettendo in modo diverso le parentesi nell'espressione 1–1+1–1+… io posso, volendo, ottenere 0 o 1. Ma allora l'idea della creazione *ex nihilo* è perfettamente plausibile».
- Infatti: $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+0+\ldots = 0$
  $1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1+0+0+\ldots = 1$
- Tale serie era eguagliata dal Grandi e da altri a ½.

4 – La "creazione ex nihilo" nella serie di Grandi

- È oggi ben noto che la successione delle somme parziali associata alla serie di Grandi **non ammette alcun limite:** da ciò segue che **tale serie non ammette alcuna somma.**
- Si tratta di una serie che si dice **indeterminata** (e, dal punto di vista storico, ricordiamo che anche qualche matematico del XVIII secolo aveva suggerito una simile conclusione: **Jacopo Riccati,** 1761, I, p. 87).



4 – La "creazione ex nihilo" nella serie di Grandi

- Da un punto di vista elementare, la convergenza della serie di Grandi a ½ può ottenersi con un procedimento vicino a quello che, poco fa, ci ha condotto ad affermare che la somma delle potenze di ½ è 2. Posto:
  $1-1+1-1+\ldots = s$
  si raccoglie –1 tra i termini dal secondo in poi:
  $1-(1-1+1-\ldots) = s$
- Dunque si ottiene: $1-s = s$ da cui: $s = ½$
- **Questa volta, però, le conclusioni sono inaccettabili** (peraltro la stessa ammissione che 1–1+1–1+… indichi un numero s è, in questo caso, ingiustificata).

5 – Le inferenze secondo Peirce: deduzione, induzione, abduzione

- Nel 1878 **C.S. Peirce** (1834-1914) illustrò i tre tipi di inferenza con un celebre esempio: disponiamo di un sacco con l'etichetta "Fagioli bianchi". Ciò significa tale sacco contiene soltanto fagioli bianchi (*regola*): estraendo una manciata di fagioli dal sacco (*caso*), si constata che sono tutti bianchi (*risultato*).
- Questa struttura è detta **deduzione**:

Regola **Tutti i fagioli in questo sacco sono bianchi**
Caso **Questi fagioli provengono da questo sacco**
▼
Risultato **Questi fagioli sono bianchi**

5 – Le inferenze secondo Peirce: deduzione, induzione, abduzione

- Illustriamo l'**induzione**: non conosciamo il contenuto del sacco (non c'è etichetta); per scoprirlo estraiamo una manciata del contenuto (*caso*) e notiamo che si tratta di fagioli bianchi (*risultato*). Questo ci fa supporre che il sacco contenga soltanto fagioli bianchi (*regola*). La regola generalizza il caso sperimentale, ma **non siamo certi** della sua validità:

Caso **Questi fagioli provengono da questo sacco**
Risultato **Questi fagioli sono bianchi**
▼
Regola **Tutti i fagioli di questo sacco sono bianchi (?)**

5 – Le inferenze secondo Peirce: deduzione, induzione, abduzione

- **Abduzione**: vediamo una manciata di fagioli bianchi su di un tavolo (*risultato*) e, accanto, un sacco con l'etichetta "Fagioli bianchi" (*regola*). Supponiamo allora che i fagioli provengano da quel sacco.
- La struttura logica è la seguente:

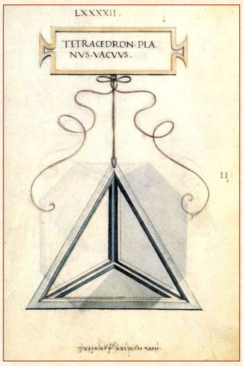
Risultato **Questi fagioli sono bianchi**
Regola **Tutti i fagioli di questo sacco sono bianchi**
▼
Caso **Questi fagioli provengono da questo sacco (?)**

- **Non siamo certi** della validità: il risultato potrebbe non essere un caso della regola che conosciamo.

Sommario

Matematica e interpretazione

- **Logos**
  Centralità del linguaggio
- **Il circolo ermeneutico**
  Interpretare la storia
- **Un aspetto didattico**
  L'introduzione delle serie
- **Inferenze diverse**
  Il ruolo dell'abduzione
- **Riflessioni conclusive**
  La matematica "là fuori"?



Presupposizione originale (errata):
(i) una "addizione con infiniti addendi" è pur sempre un'addizione e avrà un "risultato"
(ii) essendo infinito il numero degli addendi, tale "risultato" sarà infinito

- Seguiamo la formazione della presupposizioni…

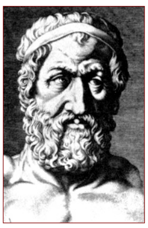
♦ **Abduzione (*a*)** [alla base del punto (i)]

- *risultato* (*a*) la serie è indicata da un'espressione scritta con dei numeri e con il simbolo "+"
- *regola* (*a*) le addizioni vengono indicate da espressioni scritte con dei numeri e con il simbolo "+"
- → *caso* (*a*) la serie è un'addizione

Attenzione: potrebbe trattarsi di una semplice analogia: l'allievo non "cerca" una regola…

♦ **Abduzione (*b*)** [alla base del punto (ii)]

- *risultato* (*b*) una serie ha "infiniti addendi"
- *regola* (*b*) se la somma di una "addizione" supera ogni limitazione assegnata, allora tale addizione deve avere "infiniti addendi"
- → *caso* (*b*) la somma di una serie supera ogni limitazione assegnata
- Bisogna che l'allievo capisca che si tratta di **un'abduzione scorretta!**
- **Controesempio:** 1+1/2+1/4+1/8+…



♦ **Induzione (*c*)** [alla base del nuovo punto (ii)]

- *caso* (*c*) 1+1/2+1/4+1/8+… ha il termine generale infinitesimo
- *risultato* (*c*) 1+1/2+1/4+1/8+… ha un "risultato finito"
- → *regola* (*c*) se una serie ha termine generale infinitesimo allora ha un "risultato finito"
- Si tratta di **un'induzione scorretta!**

Seconda presupposizione (errata):
(i) una "addizione con infiniti addendi" è pur sempre un'addizione e avrà un "risultato"
(ii) il "risultato" non è infinito quando gli addendi diventano indefinitamente piccoli

Terza presupposizione (parzialmente errata):

(i) una "addizione con infiniti addendi" è pur sempre un'addizione e avrà un "risultato"
(ii) il "risultato" può essere finito o infinito quando gli addendi diventano indefinitamente piccoli

Dobbiamo giungere alla

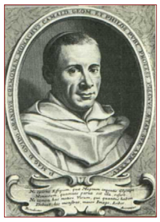
Quarta presupposizione:

(i) una "addizione con infiniti addendi" non è una vera e propria addizione
(ii) essa può avere un "risultato" finito o infinito oppure non avere alcun "risultato"

Serie numeriche e presupposizioni

♦ **Deduzione (*d*)** [alla base del nuovo punto (i)]

- *regola* (*d*) a tutte le comuni operazioni aritmetiche devono poter essere applicate le ben note proprietà
- *caso* (*d*) applicando le proprietà delle operazioni aritmetiche si ricava:
  1–1+1–1+… = 0
  1–1+1–1+… = 1
  1–1+1–1+… = ½
  e ciò è contraddittorio
- → *risultato* (*d*) la serie 1–1+1–1+… non è una comune addizione
- **Questa deduzione è corretta!**

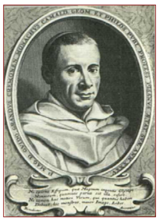


Serie numeriche e presupposizioni

- Tutto ciò vale per la serie di Grandi. Nella mente dell'allievo può dunque scattare una generalizzazione.

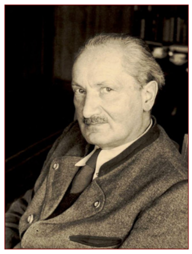
♦ **Induzione (*e*)**

- *caso* (*e*) 1–1+1–1+… è una serie
- *risultato* (*e*) 1–1+1–1+… non è una comune addizione
- → *regola* (*e*) le serie numeriche non sono comuni addizioni
- Più propriamente, il processo si completa con l'istituzionalizzazione **da parte dell'insegnante.**



Riassumiamo: abduzione, ipotesi, presupposizioni

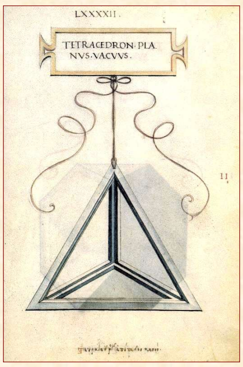
- L'inferenza abduttiva si basa sulla formulazione di un'ipotesi in grado di spiegare i dati disponibili…
- … tale ipotesi (assimilabile ad una presupposizione) **deve però essere controllata.**
- È indispensabile, ricordando Heidegger, ricorrere ad una presupposizione: ma bisogna che essa sia giustificata e passibile di revisione.
- **È quanto accade nella matematica, nella sua storia e nella sua didattica.**



Sommario

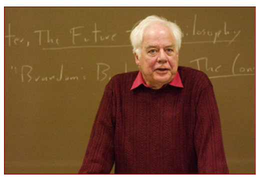
Matematica e interpretazione

- **Logos**
  Centralità del linguaggio
- **Il circolo ermeneutico**
  Interpretare la storia
- **Un aspetto didattico**
  L'introduzione delle serie
- **Inferenze diverse**
  Il ruolo dell'abduzione
- **Riflessioni conclusive**
  La matematica "là fuori"?



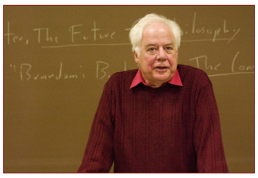
Verso una "conclusione"

- Possiamo inquadrare la matematica in un approccio ermeneutico: una **costruzione umana** da interpretare, non un momento di accesso ad una (alla) Verità.
- **La matematica può certamente collegarsi al mondo reale; ma la matematica non "è la verità"** (si pensi a Richard Rorty).
- Il fatto che la scrittura "9+8 = 17" venga da sempre classificata "vera" non significa banalmente che essa corrisponda…



Verso una “conclusione”

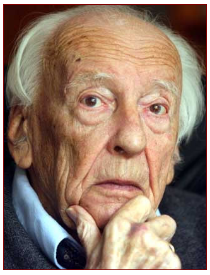
- **…a qualcosa di “vero”, di assoluto, di bello o di giusto che si trova “là fuori”.**
- Il problema si riconduce a questa spesso invocata “scoperta” della (o di una) verità “là fuori”: «il mondo è là fuori, ma le descrizioni del mondo non lo sono. **Solo le descrizioni del mondo possono essere vere o false.** **Il mondo di per sé –a prescindere dalle attività descrittive degli uomini– non può esserlo» (Rorty).**



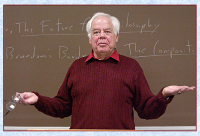
Verso una “conclusione”

- Tuttavia, a nostro avviso, considerazioni come queste non devono e non possono avere la pretesa di essere conclusive…
- Chiudiamo dunque la nostra riflessione citando la serena espressione con cui **Gadamer** chiuse il poscritto all’edizione 1972 del proprio *Verità e metodo*:

  «un cattivo ermeneuta è colui che si illude di dover avere l’ultima parola»



A tutti grazie dell’attenzione



Grazie a Dick Rorty (1931–2007)