*Progetto Lauree Scientifiche*
*Treviso, dicembre 2008*

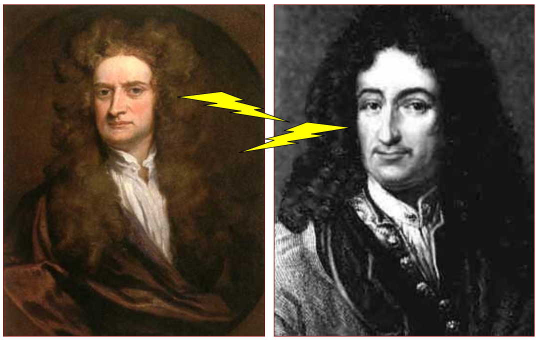
# *La storia dell'analisi matematica*


UNIVERSITAS STUDIORUM UTINENSIS

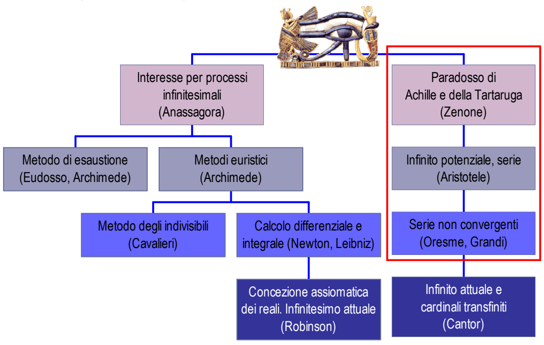
Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

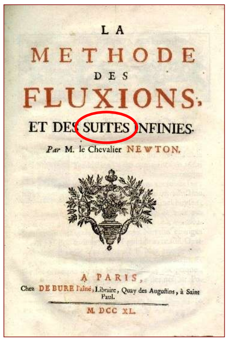

## La storia del *Calcolo Sublime*
## Solo due grandi protagonisti?



## Serie, limiti: storia "non sequenziale" del *Calcolo Sublime*



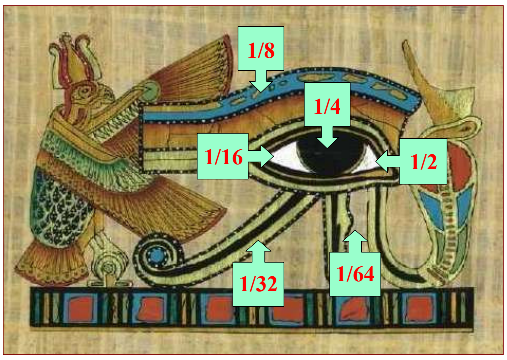

## Perché le *serie* e i *limiti*?




Ci occuperemo principalmente di **serie** (per motivi cronologici):

- ***Serie***
  l'infinito, dunque…
  **l'infinitamente grande.**
- ***Limiti***
  l'infinitesimo, dunque…
  **l'infinitamente piccolo.**

## Gli Egiziani: l'occhio di Horus




## Gli Egiziani e le (prime) potenze di 1/2

- (1/2) + (1/4) +
  + (1/8) + (1/16) +
  + (1/32) + (1/64) =
  **= 1!**
  **Il risultato esatto sarebbe: 63/64 (cioè: 1–1/64).**
- Un primo abbozzo di procedimento "infinitesimale", **ma interrotto quando le quantità coinvolte diventano "troppo piccole" (minori di 1/64).**
- **Contesto culturale**: tutto ciò è in perfetto accordo con lo spirito della matematica egizia, supporto per gli ingegneri più che ricerca teorica vera e propria.

## Uno stimolo interessante dalla *Storia della Matematica*

- Riprendiamo l'esempio, ma… senza fermarci: ad una "addizione di **infiniti** addendi", intuitivamente, è sempre associata una somma **infinitamente grande**.
- Infatti se addizioniamo **tutte le potenze di un numero positivo** (ad esempio di 2): 1+2+4+8+16+32+64+… superiamo ogni $k$>0, qualsiasi sia il $k$ considerato.
- **Ma se quel numero è invece minore di 1? 1+(1/2)+(1/4)+(1/8)+(1/16)+(1/32)+(1/64)+…**

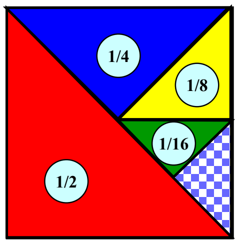
## Riflettiamo sull'ultimo esempio

- **1+(1/2)+(1/4)+(1/8)+(1/16)+(1/32)+(1/64)+…** supera ogni $k$>0, qualsiasi sia il $k$ considerato?
- **La risposta è no**. Basta $k$ = 2: la somma non supererà mai 2, qualsiasi sia il numero di addendi considerati:

| | |
|---|---|
| 1 | per arrivare a 2 dovremmo aggiungere 1 |
| | aggiungiamo **la metà** di ciò che manca: **1/2** |
| 1+1/2 | per arrivare a 2 dovremmo aggiungere 1/2 |
| | aggiungiamo **la metà** di ciò che manca: **1/4** |

e via di seguito: aggiungiamo **sempre la metà di ciò che manca… quindi non supereremo mai 2!**

## Completiamo la "scomposizione" dell'occhio di Horus




- Quello rosso è un triangolo rettangolo isoscele con il **cateto unitario**.
- Qual è la sua area? **1/2**
- E del triangolo blu? **1/4**
- E del triangolo giallo? **1/8**
- E del verde? **1/16**
- **E proseguendo così?**
- Possiamo dunque affermare: (1/2)+(1/4)+(1/8)+(1/16)+(1/32)+(1/64)+(1/128)+…≤1 anzi, più addendi consideriamo, più ci avviciniamo a 1.

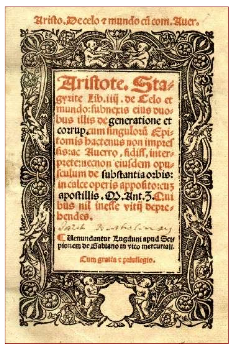
## La Storia della Matematica per una riflessione epistemologica

- **Per superare l'idea (errata!) "infiniti addendi, somma infinita"** ci riferiremo a Zenone d'Elea (490-430 a.C.) e al paradosso di Achille e della Tartaruga.
- Tale paradosso può portare ad una serie geometrica **convergente**: una "addizione con infiniti addendi" la cui **somma non supera, per quanti addendi si considerino, un numero finito**.
- Riflettendo sulla rincorsa di Achille alla Tartaruga, infatti, **calcoleremo la somma (finita) di tutte le (infinite) potenze di 1/10.**

## Zenone, Achille e la Tartaruga


- **A.** concede 1 m di vantaggio a **T.** ed è 10 volte più veloce di essa.
- Quando **A.** avrà raggiunto la posizione iniziale di **T.**, **T.** avrà percorso nuovamente 0,1 m.
- Raggiunta poi questa seconda posizione, **A.** avrà ancora un distacco di 0,01 m, etc.
- In tutto, **A.** percorrerà dunque: 1+0,1+0,01+0,001+... = 1,111…
- **Dopo 1,2 m A. avrà superato T.!**
- **1+1/10+1/100+1/1000+... = 10/9**

## Aristotele e… le serie numeriche?



- Aristotele di Stagira (384-322 a.C.) notava implicitamente che la somma di una serie di "infiniti" addendi **può essere limitata.**
- **Per Aristotele l'infinito è inteso esclusivamente in senso potenziale!**
- Per l'infinito **attuale** dovremo attendere il XIX secolo.

## La Proposizione 23 della *Quadratura della Parabola*

- Nella *Quadratura della Parabola*, **Archimede di Siracusa** (287-212 a.C.) fa implicitamente riferimento alla **serie geometrica di ragione 1/4** nella proposizione seguente:
- **Proposizione 23.** Se alcune grandezze si pongono ordinatamente nel rapporto quadruplo [se ciascuna è quadrupla della seguente], tutte le grandezze [sommate insieme] più ancora la terza parte della più piccola saranno i quattro terzi della maggiore.

## Una serie convergente in una proposizione archimedea

$$1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{3}$$

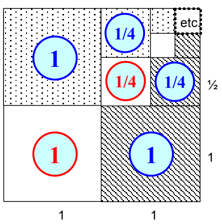
$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}=\frac{4}{3}$$

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{64}=\frac{4}{3}$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n}$$

## Visualizziamo ancora la situazione

- Il quadrato di area 4 viene suddiviso nelle tre successioni di quadrati (costituite da elementi ordinatamente congruenti) di figure **puntinate**, **bianche** e **tratteggiate**.
- Consideriamo le aree dei quadrati: 1 (per i più grandi), 1/4 (per i seguenti), 1/16, …
- **Dunque la "somma di tutte le aree" per 3 è 4 (l'area totale) e questa "somma" è 4/3.**




## Un'altra applicazione didattica: il Calcolo delle Probabilità

Un gioco: **il primo che ottiene Testa vince!**

- Il giocatore A lancia una comune moneta.
- Se l'esito è **Testa**, A vince.
- Se l'esito è Croce, il gioco passa a B.
- Se B ottiene **Testa**, B vince.
- Altrimenti il gioco torna ad A.
- E così via, finché uno dei due giocatori non otterrà **Testa**.
- **Qual è la probabilità di vittoria P(A) per A?**

## Serie numeriche e didattica: il Calcolo delle Probabilità

*Primo modo*

- A vince se ottiene subito Testa (probabilità ½);
- A vince se ottiene Croce (probabilità ½), quindi B ottiene Croce (probabilità ½) ed infine A ottiene Testa (probabilità ½); [NB: 3 fattori ½]
- A vince se ottiene Croce (probabilità ½), quindi B ottiene Croce (probabilità ½), A ottiene Croce (probabilità ½), B ottiene Croce (probabilità ½) ed infine A ottiene Testa (probabilità ½) [NB: 5 fattori ½];
- e così via.

Dunque, sommando le probabilità associate a questi casi, otteniamo:

$$\text{P(A)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^i$$

## Serie numeriche e didattica: il Calcolo delle Probabilità

*Secondo modo*

- occupiamoci di P(B); se l'esito del primo lancio di A è Testa (probabilità ½), vince A e dunque B perde;
- altrimenti (se esito del primo lancio di A è Croce, probabilità ½) il gioco passa a B, il quale viene a trovarsi *nella stessa situazione in cui si trova A prima di avere effettuato il primo lancio*;
- dunque, B vincerà con una probabilità P(B) pari a quella iniziale di A, P(A), moltiplicata per ½:

$$\text{P(B)}=\frac{1}{2}\text{P(A)}$$

**La vittoria di A e la vittoria di B esauriscono gli esiti del gioco:**

$$\text{P(A)+P(B)}=1 \qquad \text{P(A)}+\frac{1}{2}\text{P(A)}=1 \qquad \text{P(A)}=\frac{2}{3}$$

## Serie numeriche e didattica: il Calcolo delle Probabilità

Concludiamo confrontando i risultati ottenuti:

era: $P(A) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^i$ e dunque:

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{4}{3}$$

**Ecco nuovamente comparire**
**la "serie di Archimede"!**

## Torniamo alla Storia: Euclide di Alessandria

- Nella Proposizione 35 del Libro IX degli *Elementi*, anche Euclide di Alessandria (IV-III sec. a.C.) aveva espresso un analogo risultato.
- Euclide si esprime in **forma più generale**, ma non approfondisce questo argomento.
- **Euclide si occupa solo di "elementi".**


## Serie numeriche tra il XVI e il XVII secolo

- La formula per la somma di una serie geometrica compare in *Varia responsa* (1593) di **F. Viète** (1540-1603) ed era nota a **P. de Fermat** (1601-1665).
- Fu pubblicata nel 1655 anche da **J. Wallis** (1616-1703) in *Arithmetica infinitorum* e da **A. Tacquet** (1612-1660).

## Un altro esempio storico: Bernuolli e la *serie telescopica*

**Jakob Bernoulli** (1654-1705), tra il 1692 ed il 1696, si occupò di alcune serie e in particolare della serie seguente (talvolta detta *telescopica*) che affermò avere somma 1:

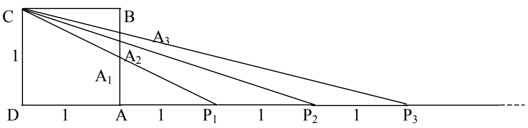
$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots$$

Il suo ragionamento può essere così riassunto:

$$1 = \frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\frac{5-4}{4\cdot 5}+\ldots =$$

$$= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots$$

## Visualizziamo la serie telescopica (a volte indicata come "di Mengoli")

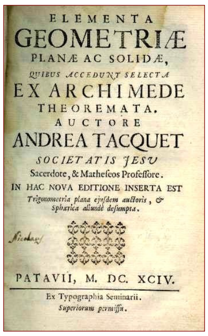



Consideriamo il quadrato ABCD di lato unitario; la somma degli infiniti segmenti $AA_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3$, … arriverà a coprire l'intero segmento AB. Dunque elementari considerazioni di similitudine ci portano a:

$$\overline{AA_1} = \frac{1}{2};\quad \overline{A_1A_2} = \frac{1}{6};\quad \overline{A_2A_3} = \frac{1}{12};\quad \ldots$$

$$\overline{A_nA_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{e quindi} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$$

## Tacquet: finito e infinito




- A. Tacquet notava:
- "**Con facilità si passa da una progressione finita alla progressione infinita**.

  E c'è da stupirsi che gli Aritmetici che conoscevano il teorema sulle progressioni finite abbiano ignorato quello sulle progressioni infinite, che si deduce immediatamente".

## Che cosa *non* si deve fare (attualizzando Tacquet…)

- Il passaggio da **finito** a **infinito** è fondamentale dal punto di vista **cognitivo** (in Lakoff & Nuñez, 2000, esso costituisce la *Basic Metaphor of Infinity*).

  **Ma da un punto di vista epistemologico c'è una delicatissima rottura!**
- Addizionare infiniti addendi **non equivale a realizzare un'addizione** propriamente detta.
- Un'addizione ha sempre **un risultato**; una serie può essere **convergente, divergente, indeterminata**.

## Un passo indietro nel tempo: Nicola d'Oresme (1323-1382)

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

Le (infinite) parentesi contengono 2, 4, 8, 16, … addendi: **la serie è divergente** in quanto la somma di ciascuna parentesi è maggiore di 1/2 (anche se questa serie cresce molto lentamente: per superare **20** servono **272 400 200 termini**).

## La serie armonica è didatticamente molto importante!

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots$$

Il termine generale tende a 0: **la presenza del termine generale infinitesimo non è condizione sufficiente per la convergenza.**

- Ma le questioni di convergenza non saranno correttamente considerate prima di **Gauss**.

## L'abate Guido Grandi (1671-1742)

- "Mettendo **in modo diverso le parentesi** nell'espressione 1–1+1–1+... **io posso, volendo, ottenere 0 o 1.**
- Ma allora l'idea della creazione *ex nihilo* è perfettamente plausibile" (G. Grandi, 1703).

## È possibile giustificare l'affermazione di Grandi?

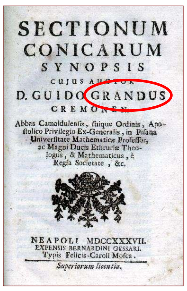
- (1–1)+(1–1)+(1–1)+... = 0+0+0+… = 0
- 1+(–1+1)+(–1+1)+(–1+1)+... = 1+0+0+0+… = 1
- **Ma allora qual è "la somma" di 1–1+1–1+…?**
- **Grandi suggerisce 1/2**. Una sua "dimostrazione" (errata) potrebbe essere la seguente:

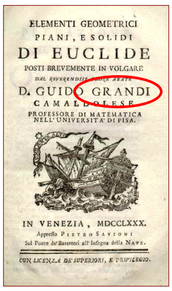
  1–1+1–1+... = $s$

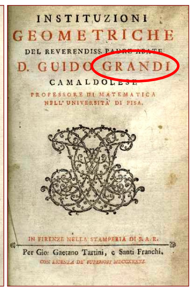
  1–(1–1+1–1+…) = $s$

  1–$s$ = $s$ da cui infine: $\boldsymbol{s = 1/2}$

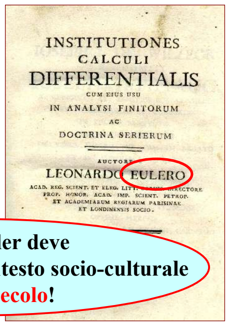
## L'abate Grandi era un buon matematico, però stavolta…



## Anche grandissimi matematici “inciamparono” su Grandi…




**… ma L. Euler deve essere inquadrato nel contesto socio-culturale del XVIII secolo!**

## Ma la “dimostrazione” di 1-1+1-1+… = 1/2 *non* va!

- Le proprietà formali delle operazioni aritmetiche potrebbero **non valere per le addizioni di infiniti addendi**.
- **Non è lecito** “supporre” che una somma $s$ esista!
- **La serie di Grandi non è una serie convergente.**
- **Non è neanche una serie divergente** (che ha per “somma” l’infinito, come la serie armonica).
- **Si tratta di una serie indeterminata, che non ha alcuna somma** (la cui successione delle somme parziali non ammette limite).

## *Nota:* Frobenius (Hölder, Cesàro) e la “somma” di serie non convergenti

- La serie di Grandi è **indeterminata**, ma **converge nel senso di Georg Frobenius** (1849-1917).
- Tale nozione riprende idee di Daniel Bernoulli (1700-1782) e Joseph Raabe (1801-1859) ed è stata generalizzata da Ludwig Otto Hölder (1859-1937) e da Ernesto Cesàro (1859-1906).

## La serie di Grandi e la convergenza secondo Frobenius (Hölder, Cesàro)

- Data la serie $a_0+a_1+a_2+\dots$ consideriamo la successione delle somme parziali:

  $s_0 = a_0 \qquad s_1 = a_0+a_1 \qquad s_2 = a_0+a_1+a_2 \qquad \dots$
- Per $n\geq 0$ si indica con $\sigma_n$ la **media aritmetica** di $s_0, s_1, \dots, s_n$. La serie data converge secondo Frobenius se converge la successione $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$
- Si verifica facilmente che la $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ nel caso della serie di Grandi è 1, 1/2, 2/3, 1/2, 3/5, 1/2, 4/7, … e converge a 1/2.
- Si verifica ad esempio che la serie armonica non converge neppure secondo Frobenius.

## Varignon e Riccati criticano Grandi

- Già nel 1715 **Pierre de Varignon** (1654-1722) nella memoria *Précautions à prendre dans l’usage des Suites infinies* osservò che lo sviluppo (con $a>0$, $b>0$):

  $$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \dots + \dots$$

  richiede che sia: $\boldsymbol{b<a}$.
- Si considerano finalmente questioni di convergenza.
- Anche **Jacopo Riccati** (1676-1754) contesta Grandi.
- Come sopra anticipato, la convergenza sarà studiata correttamente solo da **Gauss**.

## Riassumendo:

- Una serie **non** è equivalente ad una “lunga addizione”.
- Può essere **convergente, divergente, indeterminata**.
- La natura di una serie dipende dal ***limite* della successione delle somme parziali**, che può:

  **esistere finito** (serie convergente);

  **esistere infinito** (serie divergente);

  **non esistere** (serie indeterminata).
- *Per parlare del concetto di limite dovremo tornare alla **matematica antica**...*

## E torniamo alla matematica antica: il *limite* e Anassagora di Clazomene

Nel V sec. a.C., scrive:

- “Rispetto al piccolo non esiste un ultimo grado di piccolezza: **vi è sempre un più piccolo**, essendo impossibile che ciò che è cessi di essere per divisione”.
- “Così è sempre qualcosa di **più grande di ciò che è grande**”.

## Davvero Anassagora intuì la nozione di limite di una successione?

- C’è una chiara sensibilità (filosofica) per la questione dell’infinitamente piccolo.
- La sottostante questione chiave è la **concezione della retta numerica**.
- Anassagora, Archimede, Newton, Cauchy e Robinson (1950) non concepivano certamente allo stesso modo la retta numerica!
- Fondamentale, dunque, è considerare le varie ricerche nella loro **corretta collocazione storica**.

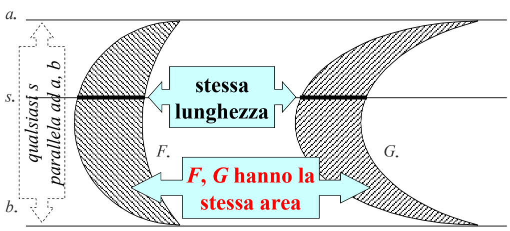
## Torniamo alla Storia: Eudosso e il metodo di esaustione

- **Eudosso di Cnido** (408?-355? a.C.) provava per assurdo una tesi precedentemente intuita con tecniche diverse (ad es. vicine al metodo degli indivisibili).
- Il metodo si basa sul **postulato di Eudosso**, secondo il quale date due grandezze qualsiasi esiste un multiplo della minore che supera la maggiore.
- **Proprietà di esaustione** (Prop. 1 del X libro). Date due grandezze, se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restante un’altra grandezza maggiore della metà, e così via, rimarrà una grandezza che **sarà minore della grandezza minore inizialmente assunta**.

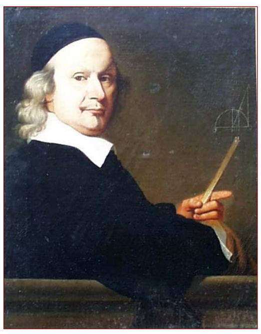
## Bonaventura Cavalieri e gli indivisibili

- Bonaventura Cavalieri (1598-1647) mise a punto il **metodo degli indivisibili…**
- **…un versatile strumento di ricerca!**
- Cavalieri riprese anche alcune idee di:
  J. Kepler (1571-1630),
  G. Roberval (1602-1675),
  E. Torricelli (1608-1647).

## Il principio di Cavalieri
## Un esempio di geometria piana




## Il limite secondo Wallis (1655)



- J. Wallis: il **limite** di una funzione è un numero la cui differenza dalla funzione considerata può essere resa **minore di ogni quantità**.
- La formulazione è vaga (rispetto agli standard moderni), **ma l’idea c’è**.
- Anche in P. Mengoli (1659) si trovano riferimenti al concetto.

## Il limite secondo Gregorio di San Vincenzo (1647)

- "La conclusione di una progressione è la fine della serie che la considerata progressione non raggiungerà mai, anche se essa sarà prolungata indefinitamente; potrà avvicinarsi a tale valore tanto quanto si vorrà".
- Gregorio si riferisce ad una successione che non raggiunge mai il proprio limite.
- Il fatto che una successione raggiunga o meno il proprio limite **"all'infinito" è un problema filosofico più che matematico**.
- **Didatticamente, sulla questione si basa una diffusa misconcezione.**

## Il limite secondo Cauchy (1822)

- "Allorché i valori successivamente assunti da una stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato, **in modo da differirne di tanto poco quanto si vorrà**, questo è chiamato il **limite** di tutti gli altri. Un numero irrazionale è il limite delle frazioni che ne danno valori sempre più approssimati".
- "Allorché i successivi valori numerici di una stessa variabile decrescono indefinitamente in modo da divenire **minori di ogni numero dato**, questa variabile diviene ciò che si chiama **infinitesimo** o una quantità infinitesima. Una variabile di questa specie ha zero come limite".

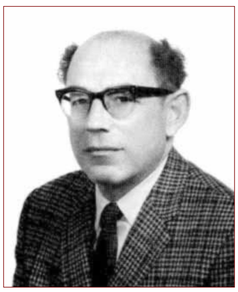
## Da Augustin-Louis Cauchy a Karl Weierstrass (1815-1897)

## Karl Weierstrass e la definizione *epsilon-delta*

- Una funzione $f$ è **continua** in $x = c$ se per ogni reale positivo $\varepsilon$ esiste un reale positivo $\delta$ tale che per ogni $x$ tale che $|x-c|<\delta$ risulta $|f(x)-f(c)|< \varepsilon$.
- Il **limite** della funzione $f$ per $x$ tendente a $c$ è $l$ se per ogni reale positivo $\varepsilon$ esiste un reale positivo $\delta$ tale che per ogni $x$ tale che $|x-c|<\delta$, con $x\neq c$, risulta $|f(x)-l|< \varepsilon$.
- "Weierstrass migliorò le impostazioni precedenti (…) e cercò di evitare il ricorso all'intuizione; non disse, ad esempio che *una variabile si avvicina il limite* **per non evocare idee di spazio e di moto**" (M. Kline).

## L'infinitesimo attuale: l'analisi "non-standard" di Robinson

- Lo sviluppo di idee legate all'infinitesimo attuale sono determinate da **nuove concezioni della retta numerica**.
- L'approccio assiomatico del XX secolo consente di considerare i reali non solo come costanti.
- Si sviluppa **l'analisi non-standard** di Robinson.



## Il tutto e la parte: una cruciale "nozione comune" euclidea

- Già **Galileo Galilei** (1564-1642) scriveva.
- "Io non veggo a che altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella;
- e in ultima conclusione gli attributi di eguale, maggiore, minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate" (*Discorsi*, prima giornata).

## Il tutto e la parte: Bernhard Bolzano nel 1851 riprende Galileo Galilei

- I numeri naturali e i naturali quadrati:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **…** |
| **0** | **1** | **4** | **9** | **16** | **25** | **36** | **…** |

- Ma siamo nel XVII secolo, e i tempi non sono ancora maturi per l'**infinito attuale**.
- **Bernard Bolzano** (1781-1848), in *Paradoxien des Unendlichen* (1851), nota che il paradosso galileiano secondo cui è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra un insieme ed un suo sottoinsieme proprio, è caratteristica degli insiemi infiniti.
- Osservazione preziosissima che sarà ripresa alcuni anni più tardi da Dedekind…

## La fondamentale definizione di Richard Dedekind (1831-1916)

- **Richard Dedekind** introduce la **definizione di insieme infinito**.
- È un insieme che **può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria**.
- In contrasto con la celebre VIII nozione comune euclidea!

## Il grande protagonista: Georg Cantor

- La nozione aristotelica di **infinito potenziale** influenzò il pensiero matematico per oltre due millenni.
- L'apertura definitiva all'**infinito attuale** si ha soltanto nel XIX secolo per opera di **Georg Cantor** (1845-1918).

## Storia ed epistemologia per la didattica: *riferimenti*

- Grazie a **David Tall** (Università di Warwick) per i preziosissimi suggerimenti.
- Per **risorse**, **materiali** (scaricabili) e per **indicazioni bibliografiche** si può consultare il sito di servizio per insegnanti e per studenti: **www.syllogismos.it**

Συλλογισμός

***Syllogismos***

## A tutti grazie dell'attenzione e… buon *divertimento* con "la più originale creazione dello spirito umano" (Alfred North Whitehead)