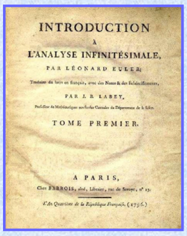
Progetto Lauree Scientifiche
Treviso, dicembre 2008

Le radici storiche dell'analisi matematica
L'infinito



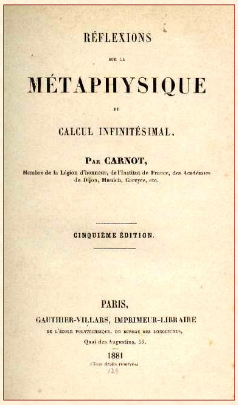
Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Scoperta o invenzione?

- La questione ha fatto discutere a lungo matematici, filosofi e storici della Matematica:
- da un lato il matematico è assimilato allo **scopritore**, a chi studia oggetti e proprietà in qualche modo **già dotati di una propria esistenza**;
- dall'altro, viene ad essere l'**inventore**, chi crea la Matematica pur nel rispetto di alcuni vincoli (ad esempio logici).
- **E voi… cosa ne pensate?**

Sommario

- **Matematica e storia**: riferimenti teorici
- **Incontriamo l'analisi**: le frazioni continue
- **Successioni e serie**: una strana "addizione"
- **Insiemi infiniti**: Euclide, Galileo, Cantor
- **Riflessioni conclusive**: grande e piccolo



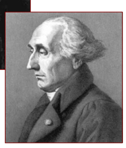
La Storia nella Matematica: una presenza e molte questioni

- Questioni epistemologiche fondamentali:
- è corretto concepire la storia come un percorso che, attraverso tentativi e rivisitazioni critiche, porti **alla sistemazione moderna**?
- Possiamo cioè riferire l'intera evoluzione storica della Matematica alle nostre attuali concezioni?
- Quale ruolo va attribuito ai **fattori culturali e sociali**?
- Le fasi che consideriamo come momenti di passaggio verso la formazione della Matematica "compiuta" (la nostra), costituivano **la Matematica "compiuta" dell'epoca, in base a concezioni culturali precise**.

Implicite (discutibili!) posizioni nella storiografia matematica

- Ma la storiografia spesso assume posizioni assolute, interpretando **la matematica di un periodo con riferimento alla *nostra* matematica:**
- "L'espressione di Wallis è **molto lacunosa**, ma contiene l'idea giusta" (M. Kline).
- "Leibniz non si curava della propria **imprecisione concettuale**" (C.B. Boyer).
- "Il sottotitolo del volume di Lagrange rivela **la follia del tentativo** del suo autore" (M. Kline).





Storia e matematica: le moderne concezioni del passato

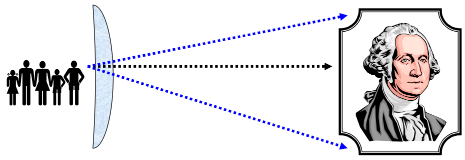
- "Anche il più titanico sforzo di rinunciare alle nostre conoscenze nel tentativo di vedere l'evento storico nella sua purezza non avrebbe successo: tutti noi **siamo condannati a portarci dietro le nostre moderne concezioni del passato**" (Luis Radford, 1997).
- Ma se siamo obbligati a guardare la storia attraverso **una lente non del tutto trasparente**, non ci resta che scegliere tra le opzioni: o rinunciare ad osservare il passato per non snaturarlo con concezioni moderne…

La Storia nella Didattica: si collegano culture diverse

- …oppure **accettare la presenza di tale lente** e le distorsioni che introduce, tenendo presente che attraverso essa poniamo in contatto **due culture "diverse ma non incommensurabili"** (L. Radford, P. Boero, C. Vasco, 2000).
- Anche a questa scelta sono collegate difficoltà:
- il tentativo di **imitare l'approccio** ai problemi dei matematici del passato può rivelarsi ingenuo;
- la ricostruzione dell'**ambiente socio-culturale di un periodo lontano non è semplice**: esige preparazione storica e consapevolezza epistemologica.

"Storia", dunque, o "Storie"? Qui emerge il ruolo fondamentale della geografia della matematica

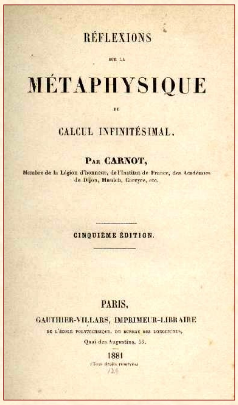
- Attraverso la nostra lente noi possiamo cercare di comprendere (di interpretare, di valutare) **direttamente il fatto storico.**



- Dobbiamo però anche comprendere **l'ambiente socio-culturale nel quale si inquadra il fatto storico.**

Sommario

- **Matematica e storia**: riferimenti teorici
- **Incontriamo l'analisi**: le frazioni continue
- **Successioni e serie**: una strana "addizione"
- **Insiemi infiniti**: Euclide, Galileo, Cantor
- **Riflessioni conclusive**: grande e piccolo



Un primo personaggio: un Bolognese, nel Cinquecento

- **Rafael Bombelli** è nato nel 1526 a Borgo Panigale, vicino a Bologna.
- In *L'Algebra*, del 1572, ha calcolato una radice quadrata con un procedimento nuovo, breve ed efficace...
- che qualcuno chiamerà **"frazione continua"!**

Le frazioni continue nel Cinquecento

Ebbene, per trovare $\sqrt{n}$, ti suggerisco di porre: $n = q^2+r$ (con q intero e q^2 il massimo quadrato non maggiore di n) e di assumere per $\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n} = \boxed{q + \cfrac{r}{2q + \cfrac{r}{2q + \cfrac{r}{2q + \ldots}}}}$$

Si tratta di una frazione che, nel proprio denominatore, "contiene" un'altra frazione e così via: continuamente! Ma quanti denominatori dovrai considerare per trovare la radice quadrata cercata? **Più avanti riuscirai a spingerti con il calcolo, più il valore che otterrai sarà accurato**.

Le frazioni continue nel Cinquecento

- Applichiamo la regola di Bombelli-Cataldi. Calcoliamo la radice quadrata di 19:
- $19 = 4^2+3$ quindi: $q = 4$ e $r = 3$
- Possiamo dunque scrivere: $\sqrt{19} = 4 + \cfrac{3}{8 + \cfrac{3}{8 + \cfrac{3}{8 + \ldots}}}$
- *Nota bene: "fermandosi" presto:*

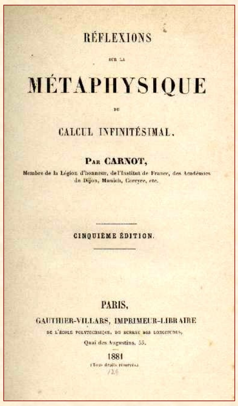
$$\sqrt{19} = 4 + \cfrac{3}{8 + \cfrac{3}{8}} = \boxed{4{,}358}2\ldots$$

non male!

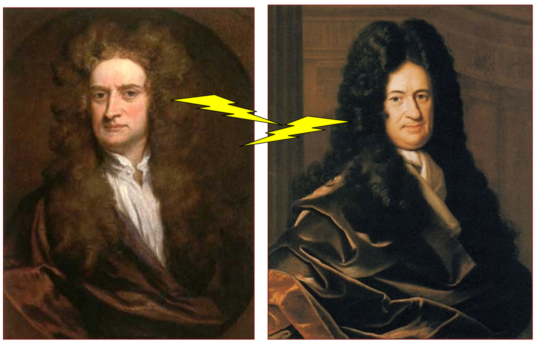
mentre sarebbe $\sqrt{19} = \boxed{4{,}358}8\ldots$

Sommario

- **Matematica e storia**: riferimenti teorici
- **Incontriamo l'analisi**: le frazioni continue
- **Successioni e serie**: una strana "addizione"
- **Insiemi infiniti**: Euclide, Galileo, Cantor
- **Riflessioni conclusive**: grande e piccolo



La storia del *Calcolo Sublime*
Solo due grandi protagonisti?



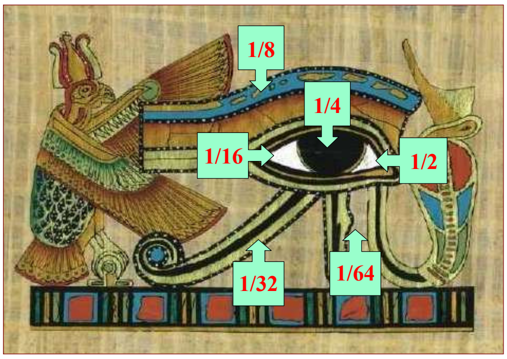
Storia "non sequenziale" del *Calcolo Sublime*

- Interesse per processi infinitesimali (Anassagora)
  - Metodo di esaustione (Eudosso, Archimede)
  - Metodi euristici (Archimede)
    - Metodo degli indivisibili (Cavalieri)
    - Calcolo differenziale e integrale (Newton, Leibniz)
      - Concezione assiomatica dei reali. Infinitesimo attuale (Robinson)
- Paradosso di Achille e della Tartaruga (Zenone)
  - Infinito potenziale, serie (Aristotele)
    - Serie non convergenti (Oresme, Grandi)
      - Infinito attuale e cardinali transfiniti (Cantor)

limiti

serie

Finito ed infinito: l'occhio di Horus



Gli Egiziani e le (prime) potenze di 1/2

- (1/2) + (1/4) +
  \+ (1/8) + (1/16) +
  \+ (1/32) + (1/64) =
  = 1!
  Il risultato esatto sarebbe: 63/64 (cioè: 1–1/64).
- Un primo abbozzo di procedimento "infinitesimale", **ma interrotto dopo soltanto 6 addendi, quando le quantità coinvolte diventano "troppo piccole" (minori di 1/64).**
- Invece si potrebbe procedere, considerando dunque un numero molto più elevato di addendi: **quanti?**

Zenone, Achille e la Tartaruga

- **A.** concede 1 m di vantaggio a **T.** ed è 2 volte più veloce di essa.
- Quando **A.** avrà raggiunto la posizione iniziale di **T.**, **T.** avrà percorso nuovamente 0,5 m.
- Raggiunta poi questa seconda posizione, **A.** avrà ancora un distacco di 0,25 m, etc.
- In tutto, **A.** percorrerà dunque: 1+(1/2)+(1/4)+(1/8)+(1/16)+...
- **Ma... Achille raggiungerà la Tartaruga?**

Riflettiamo sull'ultimo esempio

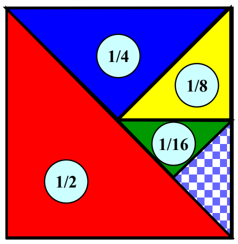
- **1+(1/2)+(1/4)+(1/8)+(1/16)+(1/32)+(1/64)+…** supera ogni k>0, qualsiasi sia il k considerato?
- **La risposta è no**. Basta k = 2: la somma non supererà mai 2, qualsiasi sia il numero di addendi considerati:

1	per arrivare a 2 dovremmo aggiungere 1
	aggiungiamo **la metà** di ciò che manca: **1/2**
1+1/2	per arrivare a 2 dovremmo aggiungere 1/2
	aggiungiamo **la metà** di ciò che manca: **1/4**

e via di seguito: aggiungiamo **sempre la metà di ciò che manca… quindi non supereremo mai 2!**

- **Stiamo descrivendo solo la prima parte della gara!**

1+(1/2)+(1/4)+(1/8)+(1/16)+(1/32)+(1/64)+… = 2
(questi infiniti "addendi" hanno "somma" 1)



- Quello rosso è un triangolo rettangolo isoscele con il **cateto unitario**.
- Qual è la sua area? **1/2**
- E del triangolo blu? **1/4**
- E del triangolo giallo? **1/8**
- E del verde? **1/16**
- **E proseguendo così?**
- Possiamo dunque affermare: (1/2)+(1/4)+(1/8)+(1/16)+(1/32)+(1/64)+(1/128)+…≤1 e **più addendi consideriamo, più ci avviciniamo a 1**.

La Proposizione 23 della *Quadratura della Parabola*

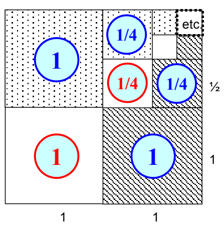
- Nella *Quadratura della Parabola*, **Archimede di Siracusa** (287-212 a.C.) fa implicitamente riferimento alla **serie geometrica di ragione 1/4** nella proposizione seguente:
- **Proposizione 23.** Se alcune grandezze si pongono ordinatamente nel rapporto quadruplo [se ciascuna è quadrupla della seguente], tutte le grandezze [sommate insieme] più ancora la terza parte della più piccola saranno i quattro terzi della maggiore.

Una serie convergente in una proposizione archimedea?

$$1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$
$$\left(1+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{3}$$
$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}=\frac{4}{3}$$
$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{64}=\frac{4}{3}$$
$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n}$$

Visualizziamo ancora la situazione

- Il quadrato di area 4 viene suddiviso nelle tre successioni di quadrati (costituite da elementi ordinatamente congruenti) di figure **puntinate**, **bianche** e **tratteggiate**.

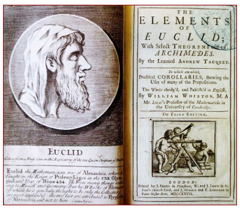


- Consideriamo le aree dei quadrati: **1** (per i più grandi), **1/4** (per i seguenti), **1/16**, …
- **Dunque la "somma di tutte le aree" per 3 è 4 (l'area totale) e questa "somma" è 4/3.**

Serie numeriche tra il XVI e il XVII secolo

- La formula per la somma di una serie geometrica compare in *Varia responsa* (1593) di **F. Viète** (1540-1603) ed era nota a **P. de Fermat** (1601-1665).
- Fu pubblicata nel 1655 anche da **J. Wallis** (1616-1703) in *Arithmetica infinitorum* e da **A. Tacquet** (1612-1660).

Ma da un punto di vista epistemologico c'è una delicatissima rottura! "Addizionare infiniti addendi" non equivale a realizzare un'addizione vera e propria. Un'addizione ha sempre un risultato; una serie può essere convergente, divergente, indeterminata.



E c'è da stupirsi che gli Aritmetici che conoscevano il teorema sulle progressioni finite abbiano ignorato quello sulle progressioni infinite, che si deduce immediatamente".

La serie armonica e Nicola d'Oresme (1323-1382)

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\dots$$

Le (infinite) parentesi contengono 2, 4, 8, 16, … addendi: **la serie è divergente** in quanto la somma di ciascuna parentesi è maggiore di 1/2 (anche se questa serie cresce molto lentamente: per superare **20** servono **272 400 200 termini**).

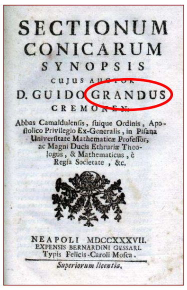
L'abate Guido Grandi (1671-1742)

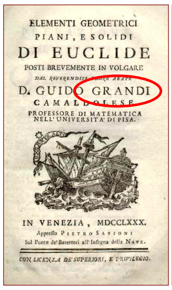
- "Mettendo **in modo diverso le parentesi** nell'espressione 1–1+1–1+... **io posso, volendo, ottenere 0 o 1.**
- Ma allora l'idea della creazione *ex nihilo* è perfettamente plausibile" (G. Grandi, 1703).

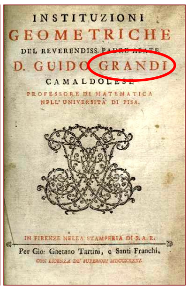
È possibile giustificare l'affermazione di Grandi?

- (1–1)+(1–1)+(1–1)+... = 0+0+0+… = 0
- 1+(–1+1)+(–1+1)+(–1+1)+... = 1+0+0+0+… = 1
- **Ma allora qual è "la somma" di 1–1+1–1+…?**
- **Grandi suggerisce 1/2**. Una sua "dimostrazione" (errata) potrebbe essere la seguente:
  1–1+1–1+... = s
  1–(1–1+1–1+…) = s
  1–s = s da cui infine: s = **1/2**

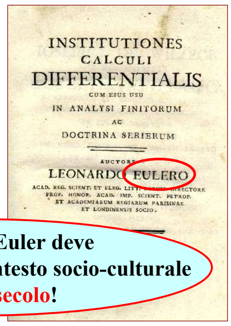
L'abate Grandi era un buon matematico, *però stavolta…*







Anche grandissimi matematici "inciamparono" su Grandi



… tuttavia L. Euler deve essere inquadrato nel contesto socio-culturale del XVIII secolo!

Ma la “dimostrazione” di 1–1+1–1+… = 1/2 *non* va!

- Le proprietà formali delle operazioni aritmetiche potrebbero **non valere per le addizioni di infiniti addendi**.
- **Non è lecito** “supporre” che una somma *s* esista!
- **La serie di Grandi non è una serie convergente.**
- **Non è neanche una serie divergente** (che ha per “somma” l’infinito, come la serie armonica).
- **Si tratta di una serie indeterminata, che non ha alcuna somma** (la cui successione delle somme parziali non ammette limite).

Varignon e Riccati criticano Grandi

- Già nel 1715 **Pierre de Varignon** (1654-1722) nella memoria *Précautions à prendre dans l’usage des Suites infinies* osservò che lo sviluppo (con $a>0$, $b>0$):

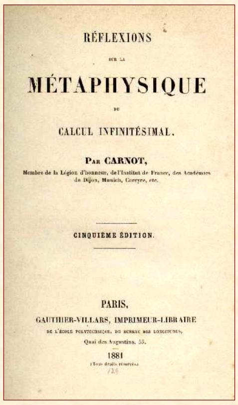
$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \ldots + \ldots$$

richiede che sia: $b<a$.

- Si considerano finalmente questioni di convergenza.
- Anche **Jacopo Riccati** (1676-1754) contesta Grandi.
- Ma la convergenza sarà studiata correttamente solo da **Gauss**.

Sommario

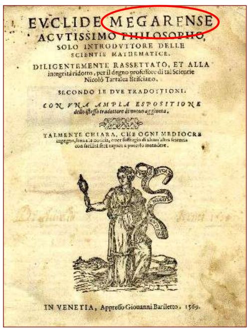
- **Matematica e storia**: riferimenti teorici
- **Incontriamo l’analisi**: le frazioni continue
- **Successioni e serie**: una strana “addizione”
- **Insiemi infiniti**: Euclide, Galileo, Cantor
- **Riflessioni conclusive**: grande e piccolo



Gli insiemi infiniti: il “divieto” di Aristotele

- **Aristotele di Stagira** (384-322 a.C.) notava implicitamente che la somma di una serie di “infiniti” addendi **può essere limitata.**
- **Ma per Aristotele l’infinito è inteso solo in senso potenziale (Fisica, III, 7).**
- Perciò non era possibile pensare a una serie!

Euclide di Alessandria: una biografia misteriosa

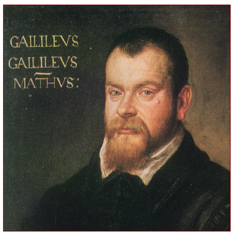


- La stessa indicazione geografica è incerta: a volte venne confuso con il filosofo **Euclide di Megara** (anche Tartaglia cade nell’errore!).
- Sappiamo solo che alcuni discepoli di Euclide operavano nel III sec. a.C. in Alessandria.

L’impostazione di Euclide è diffusa da innumerevoli edizioni degli *Elementi*

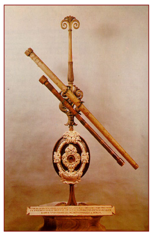
- All’inizio del Libro I degli *Elementi* si trovano 23 termini, 5 postulati, 8 nozioni comuni.
- Nozione comune VIII: **“Il tutto è maggiore della parte**”.
- Heiberg riconobbe tale nozione comune come originale euclidea.

Il tutto e la parte: una cruciale "nozione comune" euclidea



- Già **Galileo Galilei** (1564-1642) scriveva:
- "Io non veggo a che altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella;
- e in ultima conclusione gli attributi di eguale, maggiore, minore **non aver luogo ne gl'infiniti,** ma solo nelle quantità terminate" (*Discorsi*, prima giornata).

Il tutto, la parte: nel 1851 Bolzano riprende Galileo



- I naturali e i naturali quadrati:

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**
0	**1**	**4**	**9**	**16**	**…**

- Galileo sapeva "vedere lontano", ma siamo nel XVII secolo, e i tempi non sono maturi per l'**infinito attuale!**
- Nel 1851, **Bernhard Bolzano**, in *Paradoxien des Unendlichen*, nota che il paradosso galileiano secondo il quale si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra un insieme e un suo sottoinsieme proprio è caratteristica degli insiemi infiniti.

La fondamentale definizione di Richard Dedekind (1831-1916)

- **Richard Dedekind** introduce la **definizione di insieme infinito**.
- È un insieme che **può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria**.
- In contrasto con la celebre VIII nozione comune euclidea!

Eppure in India…

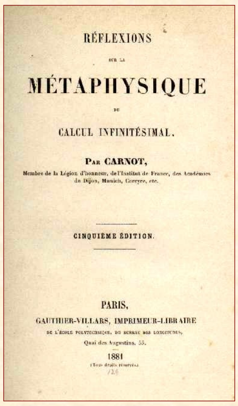
- **Bhaskara (1114-1185)**, chiamato **Bhaskara II** e **Bhaskara Achārya**, si occupò delle divisioni per zero.
- Affermò (e diede di ciò interpretazioni religiose) che qualsiasi numero, se diviso per zero, produce una "frazione" che non potrebbe essere "aumentata" aggiungendo un altro numero…

$$\boxed{\frac{2}{0}+3=\frac{2+3\cdot 0}{0}=\frac{2}{0}}$$

Un altro punto a favore della geografia della matematica!

Sommario

- **Matematica e storia**: riferimenti teorici
- **Incontriamo l'analisi**: le frazioni continue
- **Successioni e serie**: una strana "addizione"
- **Insiemi infiniti**: Euclide, Galileo, Cantor
- **Riflessioni conclusive**: grande e piccolo


RÉFLEXIONS

SUR LA

MÉTAPHYSIQUE

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL.

PAR CARNOT,

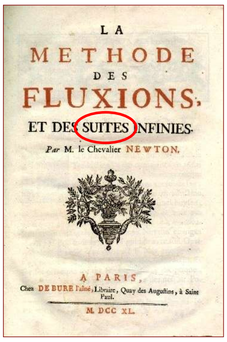
CINQUIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

1881

Verso la conclusione: perché le *serie*?


LA

METHODE

DES

FLUXIONS,

ET DES SUITES INFINIES.

Par M. le Chevalier NEWTON.

A PARIS,

Chez DE BURE l'aîné, Libraire, Quay des Augustins, à Saint Paul.

M. DCC XL.

Ci siamo occupati principalmente di **serie** (per motivi cronologici):

- ***Serie***

l'infinito, dunque…

l'infinitamente grande.

- ***Limiti***

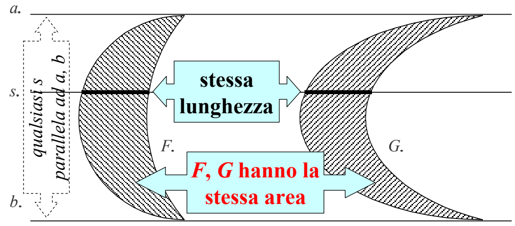
l'infinitesimo, dunque…

l'infinitamente piccolo.

Infinitamente “sottile”…
Bonaventura Cavalieri e gli indivisibili

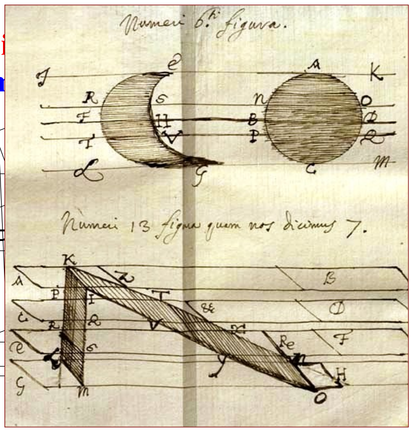
- Bonaventura Cavalieri (1598-1647) mise a punto il **metodo degli indivisibili…**
- **…un versatile strumento di ricerca!**
- Cavalieri riprese anche alcune idee di: J. Kepler (1571-1630), G. Roberval (1602-1675), E. Torricelli (1608-1647).

Il principio di Cavalieri
Un esempio di geometria piana



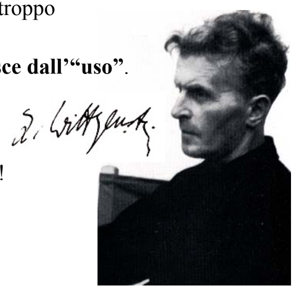
Il princi…
Un esem…

Un antico appunto di un attento lettore dell’opera originale di Cavalieri



Le invenzioni della matematica, però, devono “maturare”

- Con l’infinitamente piccolo la nostra avventura si spingerebbe un po’ troppo lontano…
- **La matematica nasce dall’“uso”**. Non si può “scoprire” con un colpo di bacchetta magica!
- **Le invenzioni della matematica hanno bisogno di tempo…**

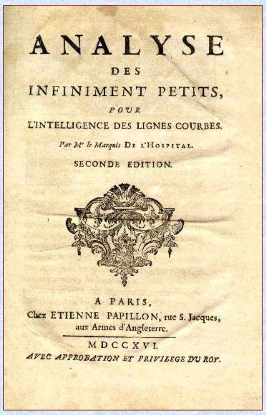


A tutti Voi grazie dell’attenzione

Grazie a Luis Radford (Canada)

Per risorse, materiali (scaricabili) e indicazioni bibliografiche si può consultare il sito di servizio per insegnanti e studenti: **www.syllogismos.it**

Συλλογισμός
Syllogismos


ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.
Par M. le Marquis De l'Hospital.
SECONDE EDITION.

A PARIS,
Chez ETIENNE PAPILLON, rue S. Jacques, aux Armes d'Angleterre.
M D C C X V I.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.