Treviso, Liceo Scientifico Leonardo da Vinci, 12 aprile 2008

Beautiful Minds
Giochi e modelli matematici da Pacioli a Nash

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine
giorgio.bagni@dimi.uniud.it www.syllogismos.it

1. Un'introduzione storica: Luca Pacioli e il *De Viribus Quantitatis*

Luca Pacioli (o Luca dal Borgo, Borgo San Sepolcro, 1445–Roma, 1517) fu uno dei matematici più noti del Rinascimento. Giovanissimo, si trasferì da Borgo San Sepolcro a Venezia dove frequentò le lezioni di Domenico Bragadino ed ebbe l'occasione di compiere alcuni viaggi in Oriente. Nel 1475 si recò a Perugia in qualità di docente di matematica e scrisse un manuale di algebra. Operò quindi a Venezia, a Zara, a Firenze, a Roma, come insegnante alla Sapienza, e a Napoli (Kline, 1991; Maracchia, 2005). Dopo un secondo soggiorno veneziano, si trasferì nel 1498 a Milano, alla corte di Ludovico il Moro, dove strinse con Leonardo da Vinci (Bagni & D'Amore, 2006) e compose *De divina proportione*. Nel 1500, abbandonata Milano all'arrivo dei Francesi, passò a Firenze e continuò a dedicarsi all'attività di insegnamento a Pisa, a Bologna, quindi nel 1508 ancora a Venezia, a Perugia (1510) e infine a Roma (1514), dove fu docente all'Archiginnasio e morì probabilmente nel 1517 (Giusti & Maccagni, 1994).

Luca Pacioli

Le radici storiche dei giochi matematici affondano nel tempo: le *Propositiones ad acuendos juvenes* del teologo e filosofo inglese Alcuino di York (York, 735–Tours, 804) rappresentano la prima raccolta conosciuta di problemi matematici in lingua latina. In questo settore si inserisce *De Viribus Quantitatis*, opera scritta da Pacioli tra il 1496 e il 1508 (Pacioli, 1997). Il manoscritto, verosimilmente redatto da un copista, è costituito da 306 carte: *De Viribus Quantitatis* è dunque una ricca raccolta di "ludi matematici" con oltre duecento esempi, ai quali viene fatto seguire materiale di argomento diverso.

2. I quadrati magici: una storia antichissima

Storicamente e matematicamente interessanti sono le considerazioni del *De Viribus Quantitatis* sui quadrati magici. Ricordiamo che un *quadrato magico* è costituito da una tabella quadrata di numeri con alcune caratteristiche (Ghersi, 1978, pp. 265–319):

- tutti i numeri devono essere interi positivi
- i numeri devono essere diversi tra di loro
- la somma dei numeri di ciascuna riga, di ciascuna colonna e delle due diagonali deve essere sempre la stessa (*costante magica*)

L'*ordine* di un quadrato magico è il numero di elementi presenti sul lato dello schema. Un quadrato magico ad esempio di ordine 3 nel quale i numeri impiegati sono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 prende il nome di *quadrato magico classico* di ordine 3:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

La costante magica è calcolabile con la formula detta "del giovane Gauss" (per il celebre aneddoto riferito alla capacità del futuro grande matematico di calcolare la somma di una progressione aritmetica, procedimento peraltro noto già ai Pitagorici che lo applicavano nella determinazione dei "numeri triangolari": Bagni, 1996, I, cap. 2 e 2000, pp. 198–204), secondo il quale la somma dei numeri interi da 1 a n inclusi è data da

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Tale totale dovrà quindi essere diviso per l'ordine del quadrato magico (cioè per il numero delle righe o delle colonne).Nella situazione ora in esame, dunque:

$$\textit{costante magica q.m. classico (ordine 3)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3^2(3^2+1)}{2} = 15$$

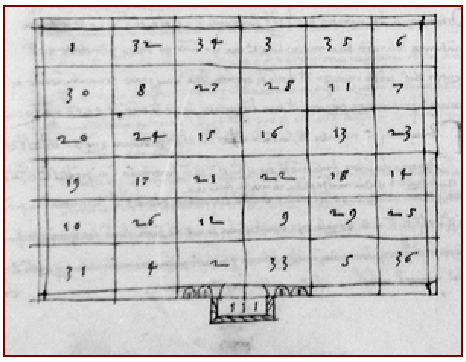
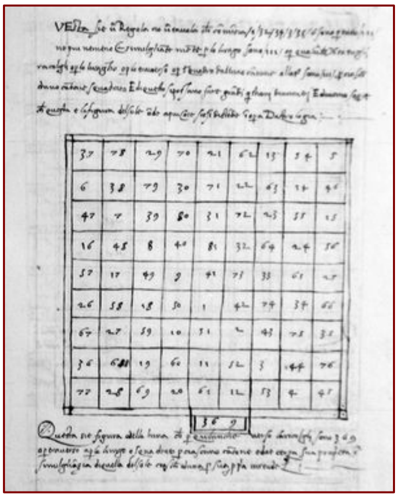
Cenni storici sui quadrati magici

Il più antico quadrato magico conosciuto risale alla matematica cinese (il diagramma era chiamato *Lo Shu*, ovvero “scritto del fiume Lo”, una denominazione di cui si trova traccia già nel VI–V secolo a.C.: Needham, 1985, pp. 70–72) e la sua struttura era espressa dai versi seguenti (tratti da un commento di Chen Luan del VI secolo d.C.):

2 e 4 sono le spalle,
6 e 8 sono i piedi,
vi è un 3 sulla sinistra,
vi è un 7 sulla destra,
porta un 9 sulla testa,
è calzato con un 1,
mentre un 5 sta nel mezzo[1]

che riassume una descrizione della tabella sopra riportata.

Lo studio dei quadrati magici fu coltivato dai matematici e dagli astronomi arabi; nel tardo Medioevo l’interesse per essi si sviluppò nel mondo occidentale: sebbene a lungo sia stato ritenuto che l’introduzione in Europa dei quadrati magici dovesse attribuirsi a Manuel Moschopulos intorno al 1415–1420 (Tannery, 1886), sono noti diversi manoscritti precedenti in cui compaiono quadrati magici (ad esempio il codice Vat. Reg. lat. 1283, secolo XIII, e il manoscritto 125 presso il Corpus Christi College, Oxford, secolo XIV); alla Biblioteca Universitaria di Bologna si conserva il manoscritto 2433, datato giugno–agosto 1339, dove sono riportati (ff. 20v e 21r) due quadrati magici (“quadrato del Sole” e “della Luna”, secondo l’interpretazione “astronomica” dell’epoca).

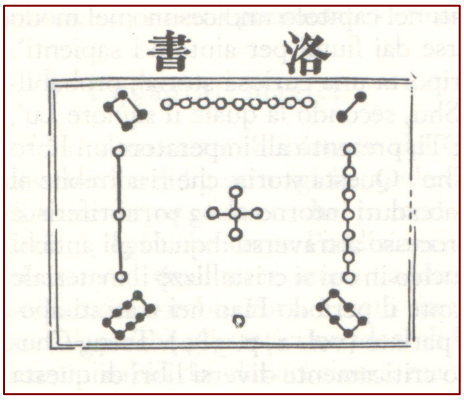
I quadrati magici della Biblioteca Universitaria di Bologna (1339)

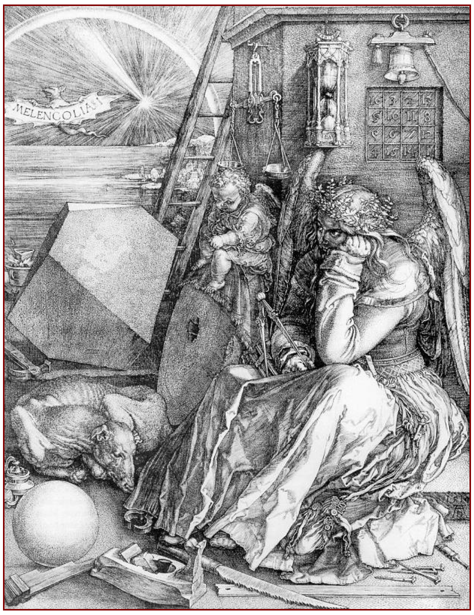
[1] Altri testi cinesi antichi confermano la presenza di aspetti numerologici collegati a *Lo Shu* e ad altri diagrammi analoghi; ad esempio, nel *Libro dei Mutamenti* del II secolo a.C. leggiamo: “Il cielo è uno, la terra è due, il cielo è tre, la terra è quattro, il cielo è cinque, la terra è sei, il cielo è sette, la terra è otto, il cielo è nove” (Bagni, 2000, pp. 101–102; per una trattazione approfondita rinviamo alle opere specialistiche: Needham, 1985; Martzloff, 1997).

Nella celebre incisione *Melancholia* (risalente al 1514) Albrecht Dürer[2] inserì un quadrato magico classico di ordine 4, in modo che i due numeri centrali dell'ultima riga venissero a costituire l'anno della pubblicazione dell'opera:[3]

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	**15**	**14**	1

La costante magica è in questo caso 34. Precedenti alla celebre incisione di Dürer sono le considerazioni pacioliane in *De Viribus Quantitatis* (il cui contenuto è almeno in parte pubblicato in *De occulta philosophia libri tres* di Cornelio Agrippa, Anversa 1531).





Il più antico quadrato magico conosciuto è denominato *Lo Shu* (riportiamo lo schema pubblicato in un'edizione moderna dell'*I Ching* o *Libro dei mutamenti*); Albrecht Dürer pubblicò un quadrato magico di ordine 4 nell'incisione *Melancholia* (1514)

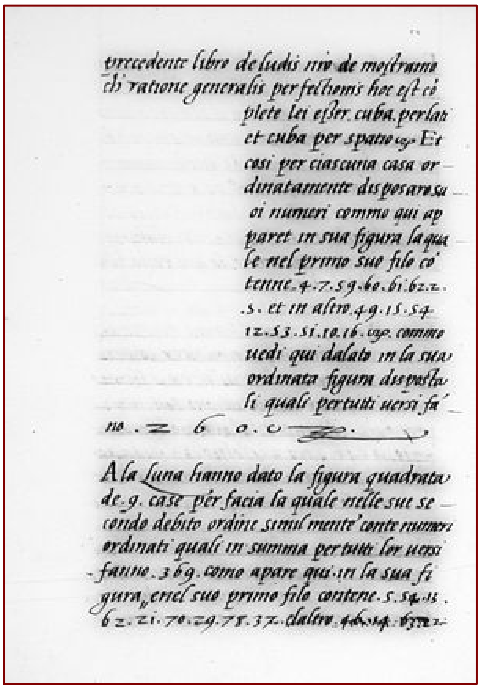
---

[2] Albrecht Dürer (1471–1528), grandissimo artista di Norimberga, fu a lungo in contatto con gli ambienti veneziano e bolognese e pubblicò alcune interessanti opere di soggetto matematico, tra le quali *Institutionum geometricarum Libri quatuor* (1525) e *Unterweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt* (1528). Dürer espose alcune costruzioni (esatte ed approssimate) di poligoni regolari, le tecniche di rappresentazione prospettica di molti poliedri, nonché il loro sviluppo su di un piano (Bagni & D'Amore, 1994).

[3] Questo celebre quadrato magico di ordine 4 ha altre proprietà sorprendenti: ad esempio, la costante magica (34) può essere ottenuta anche addizionando i quattro numeri collocati nei vertici, i quattro numeri centrali, i numeri che costituiscono ciascuna delle quattro parti in cui lo schema viene diviso dagli assi dei lati del quadrato etc.

I quadrati magici di Pacioli

Pacioli si occupa dei seguenti quadrati magici (sono in grassetto gli elementi indicati dall'Autore – lo spazio per i disegni, nel manoscritto, è spesso lasciato vuoto):


precedente libro de ludis ????? de mostramo
ch ratione generalis perfectionis hoc est cō
plete lei esser cuba perlan
et cuba per spatio ecc. Et
cosi per ciascuna casa or
dinatamente desposarasi
oi numeri commo qui ap
paret in sua figura la qua
le nel primo suo filo cō
tenne. 4. 7. 59. 60. 61. 62. 2.
5. et in altro. 49. 15. 54.
12. 53. 51. 10. 16. ecc. commo
uedi qui dalato in la sua
ordinata figura desposta
li quali per tutti uersi fa
no. 2 6 0. 0

A la Luna hanno dato la figura quadrata
de. 9. case per facia la quale nelle sue se
condo debito ordine simil mente conte numeri
ordinati quali in summa per tutti lor uersi
fanno. 369. como apare qui in la sua fi
gura, e nel suo primo filo contene. 5. 54. 13.
62. 21. 70. 29. 78. 37. dalltro. 46. 14. 63. 22.

- "l'uno 15 de Saturno"

2	**9**	**4**
7	*5*	*3*
6	*1*	*8*

- "quello de Giove"

16	**3**	**2**	**13**
5	**10**	**11**	**8**
9	*6*	*7*	*12*
4	*15*	*14*	*1*

Di questo quadrato magico sono indicati soltanto i primi nove elementi; esso corrisponde a quello sopra esaminato che sarà riportato nel 1514 da Dürer in *Melancholia* (è quasi certo che Pacioli e Dürer si incontrarono a Bologna intorno al 1506); il quadrato magico di ordine 4 indicato da Cornelio Agrippa si ottiene da questo mediante alcune operazioni elementari. La costante magica è 34.

- "quello de Marte"

14	**10**	**1**	**22**	**18**
20	**11**	**7**	**3**	**24**
21	**17**	**13**	**9**	**5**
2	**23**	**19**	**15**	**6**
8	**4**	**25**	**16**	**12**

Corrisponde a quello che si trova in Cornelio Agrippa, seppure con permutazioni di righe e colonne. La costante magica è 63.

- “quello del Sole”

1	**32**	**34**	**3**	**35**	**6**
30	**8**	**27**	**28**	**11**	**7**
20	**24**	**25**	**16**	**13**	**23**
19	**17**	**21**	**22**	**18**	**14**
10	**26**	**12**	**9**	**29**	**25**
31	**4**	**2**	**33**	**5**	**36**

Si tratta di uno dei due quadrati magici che compaiono nel manoscritto 2433 della Biblioteca Universitaria di Bologna (f. 20 v) precedentemente ricordato. Anche questo quadrato corrisponde a quello che si trova in Cornelio Agrippa, seppure con uno scambio di colonne. La costante magica è 111.

- la “figura de Venere”

4	**35**	**10**	**41**	**16**	**47**	**22**
29	**11**	**42**	**17**	**48**	**23**	**5**
12	*36*	*18*	*49*	*24*	*6*	*30*
37	*19*	*43*	*25*	*7*	*31*	*13*
20	*44*	*26*	*1*	*32*	*14*	*38*
45	*27*	*2*	*33*	*8*	*39*	*21*
28	*3*	*34*	*9*	*40*	*15*	*46*

Corrisponde ad un quadrato magico presente in un manoscritto arabo del X–XI secolo (testo originale in arabo, traduzione e commento in: Sesiano, 1996) ed è riportato in Cornelio Agrippa (seppure in forma simmetrica). La costante magica è 175.

- la “figura de Mercurio”

di questo quadrato magico, di ordine 8, Pacioli fornisce soltanto le prime due righe (e la costante magica, 260):

4	**7**	**59**	**60**	**61**	**62**	**2**	**5**
49	**15**	**54**	**12**	**53**	**51**	**10**	**16**

Esso è dunque incompleto e, come negli altri casi, non è illustrato dal disegno, ma non corrisponde al quadrato di ordine 8 riportato in Cornelio Agrippa:

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Tuttavia, per quanto riguarda il quadrato magico al quale in questo caso accenna Pacioli, si noti che tra i quadrati magici costruiti nel mondo arabo tra il XI e il XII secolo e conosciuti poi in Europa, nonché abbinati ai nomi dei pianeti (in particolare a Mercurio), compare il seguente:

8	7	59	60	61	62	2	1
49	15	54	12	53	51	10	16
41	42	22	21	20	19	47	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	18	46	45	44	43	23	24
9	55	14	52	13	11	50	56
64	63	3	4	5	6	58	57

Esso coincide per le prime due righe con la traccia riportata da Pacioli per il quadrato di Mercurio, eccezion fatta per il primo e per l'ultimo elemento della prima riga (Uri, 2003). Tali difformità potrebbero però essere imputabili ad errori di scrittura (tutt'altro che infrequenti nel manoscritto di *De Viribus Quantitatis*).

- la“figura della Luna”

5	**54**	**13**	**62**	**21**	**70**	**29**	**78**	**37**
46	**14**	**63**	**22**	**71**	**30**	**79**	**38**	**6**
15	**55**	**23**	**72**	**31**	**80**	**39**	**7**	**47**
56	*24*	*64*	*32*	*81*	*40*	*8*	*48*	*16*
25	*65*	*33*	*73*	*41*	*9*	*49*	*17*	*57*
66	*34*	*74*	*42*	*1*	*50*	*18*	*58*	*26*
35	*75*	*43*	*2*	*51*	*10*	*59*	*27*	*67*
76	*44*	*3*	*52*	*11*	*60*	*19*	*68*	*36*
45	*4*	*53*	*12*	*61*	*20*	*69*	*28*	*77*

È uno dei due quadrati magici del manoscritto bolognese e corrisponde a quello che si trova in Cornelio Agrippa in forma simmetrica. La costante magica è 369.

La “Tabellina della Strega” (da Faust, Goethe)

In un passo di *Faust*, la Strega recita una strana filastrocca, la cui interpretazione potrà portare alla costruzione del quadrato magico classico di ordine 3.

Il testo originale è:

Du mußt verstehn!

Aus Eins mach Zehn,
Und Zwei laß gehn,
Und Drei mach gleich,
So bist du reich.
Verlier die Vier!
Aus Fünf und Sechs,
So sagt die Hex,
Mach Sieben und Acht,
So ist's vollbracht:
Und Neun ist Eins,
Und Zehn ist keins.

Das ist das Hexen–Einmaleins!

Devi comprendere!

Di Un fai Dieci,
getta via il Due,
uguaglia il Tre,
e sarai ricco.
Che crepi il Quattro!
Di Cinque e Sei,
dice la strega,
fai Sette e Otto.
È tutto fatto.
Se Nove è Uno,
Dieci è nessuno.

Questa è la tabellina della strega!

Il procedimento che indichiamo è ispirato a quello esposto nel Faust–Museum di Knittilingen, nel Baden–Württemberg (luogo dove sarebbe nato il personaggio di Faust):

“Tabellina della strega”	Indicazioni operative	Schemi ottenuti
Devi comprendere!	Consideriamo il quadrato dei numeri naturali in ordine da 1 a 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Di Un fai Dieci,	Al posto di 1 metti 10	10 2 3 4 5 6 7 8 9
getta via il Due,	Fai scivolare 2 di un posto verso destra	10 _ 2 4 5 6 7 8 9
uguaglia il Tre,e sarai ricco.	Fai lo stesso con 3, facendo scivolare anche tutti i numeri a seguire	10 _ 2 3 4 5 6 7 8
Che crepi il Quattro!	Elimina 4	10 _ 2 3 _ 5 6 7 8
Di Cinque e Sei,dice la strega, fai Sette e Otto.	Ai posti dov’erano scivolati 5 e 6 metti i numeri 7 e 8	10 _ 2 3 _ 7 8 _ _
È tutto fatto. Se Nove è Uno,	Dove avrebbe dovuto esserci 1 metti 9	10 9 2 3 _ 7 8 _ _
Dieci è nessuno.	Elimina l’elemento 10	_ 9 2 3 _ 7 8 _ _
Questa è la tabellina della strega.	Restano da sistemare 1, 4, 5, e 6 e lo si fa in modo tale che la somma di ogni riga orizzontale, verticale e diagonale sia 15	4 9 2 3 5 7 8 1 6

Quadrati magici, matematica, didattica

Lo studio moderno dei quadrati magici si sviluppò a partire da un trattato di Bernard Frénicle de Bessy (1605–1670) pubblicato postumo nel 1693 da Philippe de la Hire (1640–1718).

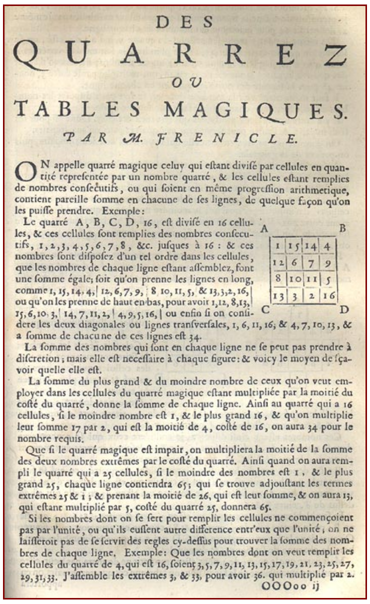
Per quanto riguarda l’aspetto didattico (Ferrari, 1993), è ad esempio interessante osservare che mentre il quadrato magico classico di ordine 3 è essenzialmente unico (altri quadrati magici possono essere ottenuti solo mediante operazioni semplici, ad esempio scambiando l’ordine delle righe etc.), per il quadrato magico di ordine 4 ci sono molte soluzioni diverse (tutte determinate nel XVII secolo nell’opera citata di Frenicle de Bessy). Per ordini superiori, inoltre, le soluzioni sono ancora più numerose.

Lo studio delle operazioni che consentono di ottenere altri quadrati magici a partire da un quadrato magico assegnato può essere stimolante anche dal punto di vista didattico. Non è ad esempio difficile notare che i due seguenti quadrati magici di ordine 4:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

2	7	11	14
16	9	5	4
13	12	8	1
3	6	10	15

(quello a sinistra corrisponde a quello riportato da Dürer in *Melancholia*) presentano analogie il cui studio si rivela interessante: si noti ad esempio che le righe corrispondono alle colonne e viceversa, a parte l'ordine degli elementi presenti.


DES

QUARREZ

OV

TABLES MAGIQUES.

PAR M. FRENICLE.

ON appelle quarré magique celuy qui eſtant diviſé par cellules en quantité repreſentée par un nombre quarré, & les cellules eſtant remplies de nombres conſecutifs, ou qui ſoient en même progreſſion arithmetique, contient pareille ſomme en chacune de ſes lignes, de quelque façon qu'on les puiſſe prendre. Exemple:

Le quarré A, B, C, D, 16, eſt diviſé en 16 cellules, & ces cellules ſont remplies des nombres conſecutifs, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. juſques à 16 : & ces nombres ſont diſpoſez d'un tel ordre dans les cellules, que les nombres de chaque ligne eſtant aſſemblez, font une ſomme égale; ſoit qu'on prenne les lignes en long, comme 1, 15, 14, 4, | 12, 6, 7, 9, | 8, 10, 11, 5, & 13, 3, 2, 16, | ou qu'on les prenne de haut en bas, pour avoir 1, 12, 8, 13, | 15, 6, 10, 3, | 14, 7, 11, 2, | 4, 9, 5, 16, | ou enfin ſi on conſidere les deux diagonales ou lignes tranſverſales, 1, 6, 11, 16; & 4, 7, 10, 13, & a ſomme de chacune de ces lignes eſt 34.

A B

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

C D

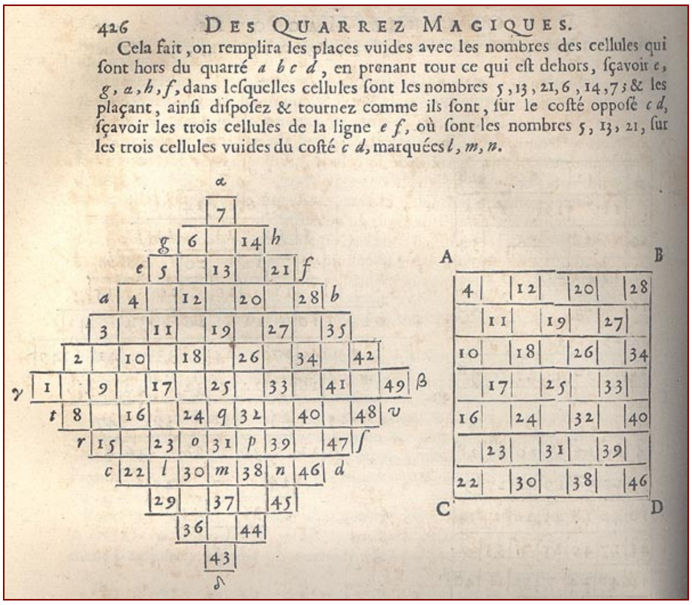
La ſomme des nombres qui ſont en chaque ligne ne ſe peut pas prendre à diſcretion; mais elle eſt neceſſaire à chaque figure: & voicy le moyen de ſçavoir quelle elle eſt.

La ſomme du plus grand & du moindre nombre de ceux qu'on veut employer dans les cellules du quarré magique eſtant multipliée par la moitié du coſté du quarré, donne la ſomme de chaque ligne. Ainſi au quarré qui a 16 cellules, ſi le moindre nombre eſt 1, & le plus grand 16, & qu'on multiplie leur ſomme 17 par 2, qui eſt la moitié de 4, coſté de 16, on aura 34 pour le nombre requis.

Que ſi le quarré magique eſt impair, on multipliera la moitié de la ſomme des deux nombres extrêmes par le coſté du quarré. Ainſi quand on aura rempli le quarré qui a 25 cellules, ſi le moindre des nombres eſt 1, & le plus grand 25, chaque ligne contiendra 65; qui ſe trouve adjouſtant les termes extrêmes 25 & 1; & prenant la moitié de 26, qui eſt leur ſomme, & on aura 13, qui eſtant multiplié par 5, coſté du quarré 25, donnera 65.

Si les nombres dont on ſe ſert pour remplir les cellules ne commençoient pas par l'unité, ou qu'ils euſſent autre difference entr'eux que l'unité; on ne laiſſeroit pas de ſe ſervir des regles cy-deſſus pour trouver la ſomme des nombres de chaque ligne. Exemple: Que les nombres dont on veut remplir les cellules du quarré de 4, qui eſt 16, ſoient 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33. J'aſſemble les extrêmes 3, & 33, pour avoir 36. qui multiplié par 2.

OOOoo ij


426 DES QUARREZ MAGIQUES.

Cela fait, on remplira les places vuides avec les nombres des cellules qui ſont hors du quarré *a b c d*, en prenant tout ce qui eſt dehors, ſçavoir *e*, *g*, *a*, *h*, *f*, dans leſquelles cellules ſont les nombres 5, 13, 21, 6, 14, 7; & les plaçant, ainſi diſpoſez & tournez comme ils ſont, ſur le coſté oppoſé *c d*, ſçavoir les trois cellules de la ligne *e f*, où ſont les nombres 5, 13, 21, ſur les trois cellules vuides du coſté *c d*, marquées *l*, *m*, *n*.

A B

4		12		20		28
	11		19		27	
10		18		26		34
	17		25		33	
16		24		32		40
	23		31		39	
22		30		38		46

C D

Il frontespizio ed una tabella dell'opera *Des quarrez ou tables magiques* di B. Frenicle de Bessy

Tra le decorazioni della facciata della *Sagrada Familia* di Barcellona troviamo il seguente quadrato magico (non classico) di ordine 4:

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

La costante magica è 33 (corrispondente agli anni di Cristo), dunque risulta più bassa di un'unità rispetto a quella del quadrato magico classico di ordine 4.

Per ottenere il quadrato magico della Sagrada Famiglia partendo da quello di Dürer è necessario operare due simmetrie rispetto gli assi orizzontale e verticale della figura e quindi diminuire di un'unità quattro elementi, uno (e uno solo) per ogni riga, in modo tale che ne risulti uno (e uno solo) per ogni colonna e uno (e uno solo) per ogni diagonale. Lasciamo al lettore il compito di individuare i dettagli della trasformazione.

La costruzione di un quadrato magico di ordine dispari

La matematica anche recente ha realizzato molti ptrogressi a proposito dei quadrati magici. Sono stati elaborati molti procedimenti per costruire quadrati magici di diversi tipi. Un elemento importante da considerare è l'ordine n del quadrato da costruire: esso può essere dispari (come per il quadrato *Lo Shu*, $n = 3$) o *pari* (come per quello di Dürer, $n = 4$). Presenteremo una regola per costruire un quadrato magico classico di ordine n dispari (vedremo ad esempio il caso: $n = 5$ che coinvolgerà i numeri naturali 1, 2, … 24, 25). Si inizia a porre l'elemento 1 nella casella al centro della prima riga.

		1		

Gli altri numeri si collocano in ordine crescente, secondo una "diagonale ascendente":

- si va alla colonna successiva in caso di fine colonna;
- si va alla riga precedente in caso di fine riga;
- si va alla casella inferiore in caso di casella occupata.

Il lettore verificherà che si giunge al quadrato seguente (con costante magica 65):

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

3. Moltiplicazioni con risultati "sorprendenti"

Il "XXXII effecto" proposto da Luca Pacioli viene introdotto dalla dicitura "De doi numeri che, multiplicato l'uno in l'altro, sempre farà la summa del producto le figure che voli". Non appare immediatamente chiarissimo, sulla base del titolo riportato, l'intendimento dell'Autore: la lettura del testo consente di rendersi conto che si tratta (almeno nella prima parte dell'"effecto") di trovare delle coppie di fattori che portino a prodotti esprimibili, in forma posizionale decimale, da numeri costituiti da una stessa cifra ripetuta.

Pacioli considera il caso di prodotti di sei cifre uguali; si propone di ottenere:

111111 222222 333333 444444 555555 666666 777777
888888 999999

e si basa inizialmente sul seguente prodotto:

$$777 \times 143 = 111111$$

Moltiplicando uno dei due fattori (Pacioli opera sul secondo, 143) per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (e dunque scegliendo come secondi fattori quelli riportati in grassetto nella tabella seguente) si otterranno come prodotti i numeri di sei cifre precedentemente elencati:

$$\begin{gathered}
777 \times (143\times2) = 777 \times \mathbf{286} = 111111 \times 2 = 222222 \\
777 \times (143\times3) = 777 \times \mathbf{429} = 111111 \times 3 = 333333 \\
777 \times (143\times4) = 777 \times \mathbf{572} = 111111 \times 4 = 444444 \\
777 \times (143\times5) = 777 \times \mathbf{715} = 111111 \times 5 = 555555 \\
777 \times (143\times6) = 777 \times \mathbf{858} = 111111 \times 6 = 666666 \\
777 \times (143\times7) = 777 \times \mathbf{1001} = 111111 \times 7 = 777777 \\
777 \times (143\times8) = 777 \times \mathbf{1144} = 111111 \times 8 = 888888 \\
777 \times (143\times9) = 777 \times \mathbf{1287} = 111111 \times 9 = 999999
\end{gathered}$$

Successivamente Pacioli propone un secondo modo di realizzare lo stesso "effecto", basato sul prodotto:

$$481 \times 231 = 111111$$

e quindi, con un procedimento analogo a quello precedentemente esposto:

$$\begin{gathered}
481 \times (231\times2) = 481 \times \mathbf{462} = 111111 \times 2 = 222222 \\
481 \times (231\times3) = 481 \times \mathbf{693} = 111111 \times 3 = 333333 \\
481 \times (231\times4) = 481 \times \mathbf{924} = 111111 \times 4 = 444444 \\
481 \times (231\times5) = 481 \times \mathbf{1155} = 111111 \times 5 = 555555 \\
481 \times (231\times6) = 481 \times \mathbf{1386} = 111111 \times 6 = 666666 \\
481 \times (231\times7) = 481 \times \mathbf{1617} = 111111 \times 7 = 777777 \\
481 \times (231\times8) = 481 \times \mathbf{1848} = 111111 \times 8 = 888888
\end{gathered}$$

$$481 \times (231 \times 9) = 481 \times \mathbf{2079} = 111111 \times 9 = 999999$$

(applicando la proprietà associativa della moltiplicazione).

Prima generalizzazione dell'"effecto" pacioliano

Modernamente è interessante di esaminare se le due soluzioni proposte da Pacioli sopra illustrate esauriscano o meno quelle possibili, limitandosi ad esempio, almeno in una prima fase, al problema di ottenere dei prodotti di sei cifre uguali. Ricordiamo che l'Autore basa i propri procedimenti sulle due identità:

$$777 \times 143 = 111111$$
$$481 \times 231 = 111111$$

le quali non esauriscono però le possibili moltiplicazioni di numeri interi positivi aventi prodotto 111111. Infatti la scomposizione in fattori primi di quest'ultimo numero è:

$$111111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$$

e le due scelte pacioliane corrispondono a:

$$111111 = (3 \times 7 \times 37) \times (11 \times 13)$$
$$111111 = (13 \times 37) \times (3 \times 7 \times 11)$$

Naturalmente è possibile ricavare altri prodotti per ottenere situazioni analoghe a quelle illustrate da Pacioli: per fare ciò è infatti sufficiente suddividere diversamente i fattori primi di 111111. Ad esempio si potrebbe scegliere la suddivisione:

$$111111 = 3 \times (7 \times 11 \times 13 \times 37) = 3 \times 37037$$

e si potrebbero ottenere quindi, moltiplicando uno dei fattori (ad esempio 3) per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le moltiplicazioni:

$$37037 \times 3 = 111111$$
$$37037 \times 6 = 222222$$
$$37037 \times 9 = 333333$$
$$37037 \times 12 = 444444$$
$$37037 \times 15 = 555555$$
$$37037 \times 18 = 666666$$
$$37037 \times 21 = 777777$$
$$37037 \times 24 = 888888$$
$$37037 \times 27 = 999999$$

Possiamo facilmente verificare che nel caso di prodotti di sei cifre (basati dunque sulla scomposizione in fattori primi di 111111) le soluzioni possibili per l'"effecto" pacioliano sono 15. Quest'ultimo valore può essere ottenuto elementarmente considerando i seguenti modi diversi di suddividere i fattori primi di 111111:

$$111111 = 3 \times (7\times11\times13\times37)$$
$$111111 = 7 \times (3\times11\times13\times37)$$
$$111111 = 11 \times (3\times7\times13\times37)$$
$$111111 = 13 \times (3\times7\times11\times37)$$
$$111111 = 37 \times (3\times7\times11\times13)$$
$$111111 = (3\times7) \times (11\times13\times37)$$
$$111111 = (3\times11) \times (7\times13\times37)$$
$$111111 = (3\times13) \times (7\times11\times37)$$
$$111111 = (3\times37) \times (7\times11\times13)$$
$$\mathbf{111111 = (3\times7\times11) \times (13\times37)}$$
$$111111 = (3\times7\times13) \times (11\times37)$$
$$\mathbf{111111 = (3\times7\times37) \times (11\times13)}$$
$$111111 = (3\times11\times13) \times (7\times37)$$
$$111111 = (3\times11\times37) \times (7\times13)$$
$$111111 = (3\times13\times37) \times (7\times11)$$

dove le due suddivisioni utilizzate da Pacioli negli esempi sopra descritti sono evidenziate in neretto.

Il numero delle possibilità può essere modernamente calcolato mediante considerazioni elementari di calcolo combinatorio, basate sulla valutazione delle combinazioni semplici[4] di 5 oggetti (i cinque fattori primi di 111111) di classe k, con k naturale non nullo strettamente minore di 5. I numeri di tali combinazioni vengono ad essere 5, 10, 10, 5 (rispettivamente per le disposizioni di 5 oggetti di classe 1, 2, 3, 4);[5] la loro somma è 30 ed essa deve essere dimezzata per ottenere il numero delle possibili suddivisioni, al fine di evitare di considerare distinte due suddivisioni "simmetriche" di fattori; si ottiene dunque, come precedentemente notato, il valore 15 per il numero totale cercato.

Seconda generalizzazione dell'"effecto"

L'"effecto" sopra considerato può essere ripetuto anche ottenendo prodotti di cifre ripetute costituiti da un numero di cifre diverso da 6 (caso considerato da Pacioli).

Ad esempio, si voglia ottenere un numero di almeno tre, quattro, cinque etc. cifre uguali (il caso di due cifre basato su 11 è chiaramente banale, essendo 11 un numero primo). Si possono considerare le seguenti scomposizioni in fattori primi (quella utilizzata da Pacioli è evidenziata in neretto):

$$111 = 3 \times 37$$
$$1111 = 11 \times 101$$
$$11111 = 41 \times 271$$
$$\mathbf{111111 = 3\times7\times11\times13\times37}$$

[4] Ricordiamo che dati n elementi ed il naturale $k\leq n$, si dicono *combinazioni semplici* di n elementi di classe k (presi k a k) tutti i raggruppamenti ottenuti scegliendo k elementi tra gli n disponibili, in modo che due raggruppamenti siano considerati distinti soltanto quando differiscono per almeno uno dei componenti.

[5] Si tratta, com'è noto, dei coefficienti non unitari della riga del "triangolo di Tartaglia" corrispondente allo sviluppo della quinta potenza di un binomio.

$$1111111 = 239 \times 4649$$
$$11111111 = 11 \times 73 \times 101 \times 137$$

Può essere interessante osservare che per un numero di cifre minore di 8 le scomposizioni sono, a parte quella impiegata da Pacioli (per il caso di sei cifre), costituite da solamente due fattori primi. Una scelta di trattare numeri di 3, 4, 5 o 7 cifre ripetute avrebbe quindi impedito all'Autore di proporre più soluzioni diverse al problema trattato (se non quella, banale, di variare l'ordine dei fattori e dunque di moltiplicare prima l'uno e poi l'altro per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Ad esempio, per ottenere prodotti di sette cifre ripetute la soluzione può basarsi soltanto sulla scomposizione in fattori primi:

$$239 \times 4649 = 1111111$$

dalla quale si ottengono gli altri prodotti moltiplicando uno dei due fattori (ad esempio il secondo) per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9:

$$239 \times (4649\times2) = 239 \times 9298 = 1111111 \times 2 = 2222222$$
$$239 \times (4649\times3) = 239 \times 13947 = 1111111 \times 3 = 3333333$$
$$239 \times (4649\times4) = 239 \times 18596 = 1111111 \times 4 = 4444444$$
$$239 \times (4649\times5) = 239 \times 23245 = 1111111 \times 5 = 5555555$$
$$239 \times (4649\times6) = 239 \times 27894 = 1111111 \times 6 = 6666666$$
$$239 \times (4649\times7) = 239 \times 32543 = 1111111 \times 7 = 7777777$$
$$239 \times (4649\times8) = 239 \times 37192 = 1111111 \times 8 = 8888888$$
$$239 \times (4649\times9) = 239 \times 41841 = 1111111 \times 9 = 9999999$$

L'unica possibile variazione per un simile "effecto" sarebbe quella di moltiplicare per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 l'altro fattore (dunque il 239).

Numeri costituiti da cifre alternate ("tramezzati")

La seconda parte del "XXXII effecto" è dedicata all'ottenimento di numeri "tramezzati", cioè espressi in notazione posizionale decimale da scritture come:

121212, 232323, 343434 etc.

L'Autore suggerisce che per ottenere un numero "tramezzato" (come 121212, costituito dalla "ripetizione" delle cifre 1 e 2), si può procedere nel modo seguente:

- si considerano un numero di decine pari al doppio del numero che si vuole veder ripetuto (nel nostro esempio 12)
- si aggiunge a ciò tale numero (dunque: $12\times10\times2+12$)
- si moltiplica il risultato per il numero fisso 481

Il procedimento equivale a moltiplicare il numero di due cifre considerato per

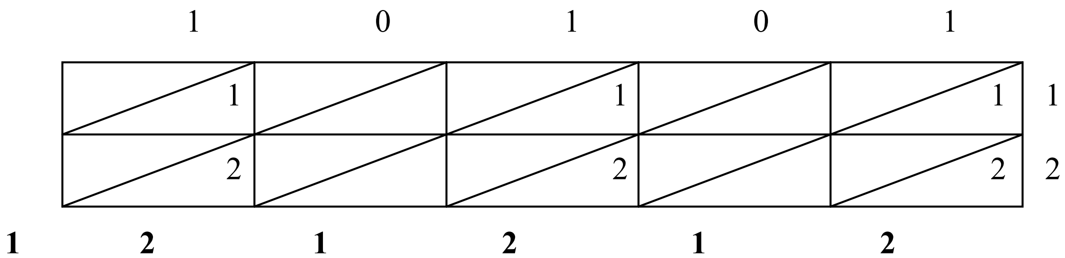
$$(2\times10+1)\times481 = 10101$$

e ciò porta, evidentemente, ad ottenere numeri “tramezzati”:

$$12 \times 10101 = 121212$$
$$23 \times 10101 = 232323$$
$$34 \times 10101 = 343434$$
$$58 \times 10101 = 585858 \quad \text{etc.}$$

Istruttiva (anche dal punto di vista didattico) sarebbe l’esecuzione della prima moltiplicazione con il metodo “per graticola” o “a gelosia” o “a reticolo” o anche “moltiplicazione fulminea”, procedimento diffuso in molte tradizioni matematiche (ad esempio, presso Arabi, Cinesi, Indiani e nell’Europa medievale: non ne è stata finora determinata l’origine con certezza: Chabert, 1998, p. 21) per calcolare il prodotto di due numeri interi positivi (Bagni, 2006 e 2007): il moltiplicando e il moltiplicatore sono scritti ai lati di una tabella rettangolare, all’interno della quale sono disposti i prodotti parziali. Il risultato finale dell’operazione si ottiene sommando diagonalmente quanto scritto nelle caselle, cominciando da destra, senza dimenticare eventuali riporti, e viene letto sui due lati della tabella in cui non sono scritti i fattori.[6]

Eseguiamo “per graticola” la moltiplicazione 10101×12:



Ritroviamo quindi come risultato 121212 (scritto nella parte bassa dello schema), “numero tramezzato”.

Generalizzazione dell’“effecto” riguardante i numeri “tramezzati”

Sarebbe semplice generalizzare questo “effecto” considerando delle scomposizioni di 10101 diverse da 21×481. Si noti che la scomposizione in fattori primi di 10101 è:

$$10101 = 3\times7\times13\times37$$

(e il lettore osserverà che essa corrisponde a quella di 111111 precedentemente utilizzata con l’eccezione del fattore 11: è infatti immediato notare che $11\times10101 = 111111$).

Se consideriamo ad esempio la scomposizione:

$$10101 = (3\times13) \times (7\times37) = 39 \times 259$$

[6] Si noti tuttavia che anche procedimenti simili alla nostra moderna tecnica di esecuzione della moltiplicazione “in colonna” erano note ai tempi di Pacioli (indichiamo ad esempio: Romano, 1969).

un "effecto" analogo a quello descritto da Pacioli potrebbe ottenersi chiedendo di:

- considerare un numero di decine pari al quadruplo del numero che si vuole veder ripetuto (nel nostro esempio ancora 12)
- sottrarre a ciò tale numero (dunque: $12\times10\times4-12$)
- moltiplicare il risultato per il numero fisso 259

Il risultato corrisponde al prodotto:

$$12 \times (39\times259) = 12 \times 10101 = 121212$$

Naturalmente sono possibili alcune generalizzazioni del procedimento, al fine di ottenere numeri "tramezzati" costituiti da un numero di cifre diverso da 6.[7] Per ottenere un simile "effecto" sarebbe sufficiente moltiplicare il numero di due cifre che si vuole veder ripetuto (nel caso precedente: 12) ad esempio per 101 o per 1010101.

Si tenga però presente che 101 è esso stesso un numero primo e dunque dovrebbe essere usato "direttamente" nell'ambito di un metodo simile a quello precedentemente illustrato: sarebbe in tal caso necessario chiedere ai partecipanti di:

- considerare un numero di centinaia pari al numero che si vuole veder ripetuto (ad esempio ancora 12),
- aggiungere a ciò tale numero (dunque: $12\times100+12$)

ottenendo con ciò 1212, ma questa semplice procedura apparirebbe forse eccessivamente "trasparente" e dunque banale per poter essere considerata efficace.

Tenendo invece presente la scomposizioni in fattori primi:

$$1010101 = 73\times101\times137$$

un "effecto" simile a quello originale pacioliano può essere ottenuto (se si nota che $73\times137 = 10001$) chiedendo ai partecipanti di:

- considerare un numero di centinaia pari al numero che si vuole veder ripetuto (ad esempio ancora 12),
- aggiungere a ciò tale numero (dunque: $12\times100+12$)
- moltiplicare per 10001, numero fisso: $12\times101\times10001 = 12121212$

oppure (notando che $101\times137 = 13837$) di:

- considerare un numero di decine pari a sette volte il numero che si vuole ottenere (nel nostro esempio ancora 12),
- aggiungere a ciò il triplo di tale numero (dunque: $12\times10\times7+12\times3$)
- moltiplicare per 13837, numero fisso: $12\times73\times13837 = 12121212$

[7] Ci limitiamo qui ad approfondire il caso di numeri espressi da due cifre che si alternano; il caso di più di due cifre (come ad esempio accadrebbe nel caso del numero 123123123) segue naturalmente.

4. Un gioco di divinazione binaria

Una versione di un gioco di divinazione binaria si trova in *De Viribus Quantitatis*, nel "Capitolo LXIX. A trovare una moneta fra 16 pensata".

Uno dei presenti individua un oggetto (ad esempio una moneta) tra 16 oggetti a disposizione, senza comunicarlo a chi esegue il gioco; Pacioli indica come determinare la moneta pensata spostando le varie monete in questione con un procedimento un po' macchinoso (spiegato in termini non del tutto chiari e non illustrato da alcuna tabella, peraltro prevista dal testo).

L'Autore illustra dunque il metodo proposto con un esempio complesso, che rielaboreremo per maggiore chiarezza. Si dispongano inizialmente le sedici monete in due file di otto monete ciascuna:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
9	*10*	*11*	*12*	*13*	**14**	*15*	*16*

(in cui ammettiamo, ad esempio, che la moneta "pensata" sia la 14, che sarà qui evidenziata in neretto).

Alla prima domanda dell'Autore a proposito di quale delle due file contenga la moneta "pensata", il partecipante risponde che essa si trova nella seconda fila.

Quindi devono essere composte due nuove file, partendo dal primo elemento della fila indicata (nel nostro caso si inizierà dalla moneta *9*) in modo da far seguire ad esso l'elemento che si trova nella posizione corrispondente dell'altra fila, dunque alternando ordinatamente monete della fila indicata e della fila non contenente l'oggetto "pensato":

9	*1*	*10*	*2*	*11*	*3*	*12*	*4*
13	*5*	**14**	*6*	*15*	*7*	*16*	*8*

Si osservi che così facendo la moneta "pensata" verrà ad essere posizionata in un posto di ordine $k \equiv 1 \bmod 2$,[8] ovvero di posto dispari (tutte le monete della fila indicata risultano infatti ora collocate in posti alternati a partire dal primo posto; nel caso in esame, la moneta 14 è collocata nel posto n. 11, il terzo della seconda fila).

Alla seconda domanda dell'Autore a proposito di quale delle due file contenga ora la moneta "pensata", il partecipante risponde che essa si trova ancora nella seconda fila.

Si ripete il procedimento, partendo dalla fila indicata (ancora la seconda), ottenendo:

13	*9*	*5*	*1*	**14**	*10*	*6*	*2*
15	*11*	*7*	*3*	*16*	*12*	*8*	*4*

Così facendo, tutte le monete della fila indicata saranno collocate in posti alternati a partire dal primo e la moneta "pensata", precedentemente in un posto di ordine dispari, andrà a collocarsi in un posto di ordine $k' \equiv 1 \bmod 4$, cioè in uno dei posti 1, 5, 9, 13.

[8] Utilizziamo qui la simbologia propria delle congruenze mod m: la scrittura $a \equiv b \bmod m$ significa che m divide $a–b$ (con resto nullo). Dunque, nel caso ora trattato, $k \equiv 1 \bmod 2$ significa che 2 divide esattamente $k–1$, cioè che k è dispari.

Alla terza domanda dell'Autore a proposito di quale delle due file contenga ora la moneta "pensata", il partecipante risponde che essa si trova ora nella prima fila. Si ripete quindi il procedimento, partendo però dalla prima fila (ora indicata), ottenendo così:

13	*15*	*9*	*11*	*5*	*7*	*1*	*3*
14	*16*	*10*	*12*	*6*	*8*	*2*	*4*

A questo punto la moneta "pensata" sarà infine collocata in un posto di ordine $k'' \equiv 1 \bmod 8$, cioè in uno dei posti 1, 9 (i posti iniziali delle due file). È ora sufficiente che il concorrente indichi in quale delle due file si trova tale moneta per individuarla.

Procedimenti analoghi

Naturalmente il metodo precedentemente descritto non è l'unico mediante il quale individuare un oggetto in un insieme di oggetti considerati (abbiamo già ricordato che Pacioli indica un procedimento leggermente diverso, sebbene sostanzialmente equivalente, forse con l'intenzione di celare ai partecipanti la collocazione della moneta "pensata" nella prima posizione di una delle due righe all'ultimo passaggio).

Si osservi a tale riguardo il ruolo centrale dell'approccio dicotomico:

- la prima domanda porta all'individuazione dell'appartenenza della moneta "pensata" (facciamo ancora riferimento alla moneta 14) ad uno dei due insiemi {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8} e {9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16}

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**

e gli elementi di tale insieme vengono collocati nei posti di ordine dispari (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15):

9	*1*	**10**	*2*	**11**	*3*	**12**	*4*
13	*5*	**14**	*6*	**15**	*7*	**16**	*8*

- la prima domanda porta all'individuazione dell'appartenenza della moneta "pensata" ad uno dei due insiemi {9; 10; 11; 12} e {13; 14; 15; 16}, portando così gli elementi del secondo di questi insiemi ai posti di ordine 1, 5, 9, 13:

13	*9*	*5*	*1*	**14**	*10*	*6*	*2*
15	*11*	*7*	*3*	**16**	*12*	*8*	*4*

- la terza domanda porta all'individuazione dell'appartenenza della moneta "pensata" ad uno dei due insiemi {13; 14} e {15; 16}, portando così gli elementi del secondo di questi insiemi ai posti di ordine 1, 9, cioè le prime posizioni di ciascuna riga:

13	*15*	*9*	*11*	*5*	*7*	*1*	*3*
14	*16*	*10*	*12*	*6*	*8*	*2*	*4*

- la quarta ed ultima domanda porta all'individuazione definitiva della moneta tra le due rimanenti.

È immediato generalizzare il procedimento a metodi dicotomici mediante i quali un oggetto tra 2^n oggetti a disposizione può essere individuato con n domande. Ad esempio, 20 domande possono essere sufficienti ad individuare un oggetto tra circa un milione di oggetti, essendo:

$$2^{20} = 1048576$$

5. Il XX secolo e la Teoria dei Giochi

Ma i giochi matematici sono davvero soltanto "giochi"? (Weintraub, 1992). Per gli studi sui giochi matematici a John Nash (1928) è stato conferito nel 1994 il Premio Nobel per l'economia. Anche János (John von) Neumann (1903–1957) fu una figura chiave della Game Theory, e non si deve dimenticare il grande Ennio De Giorgi (1928–1996), uno dei più importanti matematici del XX secolo: uno dei risultati per i quali è noto Nash riguarda la regolarità hölderiana delle soluzioni delle equazioni ellittiche del secondo ordine e oggi viene chiamato Teorema di De Giorgi–Nash (De Giorgi lo provò nel 1957).

La Teoria dei Giochi si occupa di situazioni di interazione strategica fra più agenti chiamati a prendere alcune decisioni. L'evoluzione della situazione e gli esiti finali sono determinati dalle scelte di tutti gli agenti (giocatori) coinvolti. Gli agenti capiscono la situazione in cui si trovano e sono in grado di fare ragionamenti logici anche complessi (sono "intelligenti"); inoltre hanno preferenze coerenti sugli esiti finali del processo decisionale e hanno l'obiettivo di massimizzare queste preferenze (sono "razionali").

Un gioco si dice cooperativo se i giocatori possono sottoscrivere accordi vincolanti; si dice non cooperativo quando l'adozione di strategie riguarda i singoli giocatori sulla base di ragionamenti individuali (di questi giochi si è occupato Nash).

Un gioco si dice a somma nulla se la somma delle vincite è zero (ad esempio quando una squadra vince e l'altra perde). Un gioco a somma non nulla di ciò ci occuperemo è il Dilemma del Prigioniero (dovuto ad Albert W. Tucker).

Von Neumann e Morgenstern dimostrarono (1944) che qualunque gioco a n soggetti e somma non zero si riduce a un gioco a n+1 soggetti e somma zero, e che la trattazione di questi ultimi giochi si collega a quella del gioco a due persone e somma zero. Pertanto i giochi a due persone e a somma zero svolgono un ruolo fondamentale nella teoria.

Una strategia è detta *minimax* quando minimizza la massima perdita possibile e per questo si impone (pur potendo non essere in assoluto la migliore). Si dimostra (Von Neumann) che la strategia *minimax* si applica a tutti i giochi a due persone e somma zero. Consideriamo ad esempio il gioco seguente, in cui A può ottenere gli esiti quantificati dai numeri indicati:

B / *A*	Mossa B–1	Mossa B–2	Mossa B–3	MIN
Mossa A–1	3	2	1	1
Mossa A–2	–1	3	0	–1
Mossa A–3	5	–7	–1	–7
MAX	5	3	1	

Notiamo subito che non ci sono strategie *dominate* da altre (in tale caso potrebbero essere trascurate!). La mossa ottimale per A e la mossa ottimale per B portano a 1 (valore del gioco): c'è dunque un *punto di sella*.

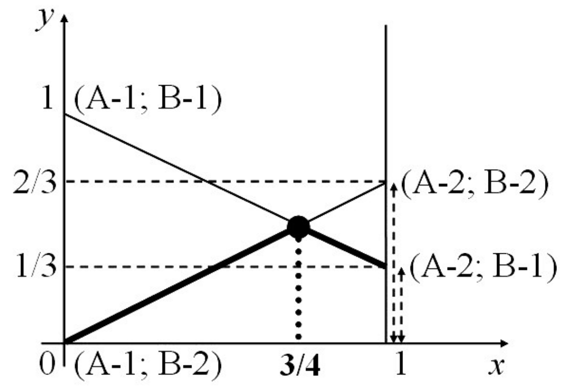
Il caso ora visto è particolare: i giocatori A e B non hanno alcun interesse a scegliere mosse diverse da A–1 e da B–3 (strategie pure, che saranno certamente adottate). Ma non è detto che esista sempre un punto di sella corrispondente a strategie pure.

Il teorema di minimax di Von Neumann afferma che esiste sempre un punto di sella, ma non è detto che esso si trovi nell'ambito di strategie pure. Bisogna considerare le strategie miste.

Una strategia si dice mista se è rappresentata da una definita probabilità di scegliere una mossa o un'altra tra quelle a disposizione. Consideriamo un esempio di gioco che porterà all'adozione di una strategia mista.

B / *A*	Mossa B–1	Mossa B–2	MIN
Mossa A–1	1	0	0
Mossa A–2	1/3	2/3	**1/3** ← valore inferiore del gioco
MAX	1	**2/3**	← valore superiore del gioco

Non c'è punto di sella: cosa faranno i giocatori? Per stabilire il comportamento ottimale per A, in un grafico si costruiscono le linee che rappresentano gli effetti delle mosse di A rispetto alle reazioni di B.



Il punto che rende massimi i minimi guadagni (ovvero minime le massime perdite) è "spostato" verso la strategia A–2

L'equilibrio di Nash riguarda i giochi non cooperativi: comparve in un articolo del 1949 in cui l'Autore, studente a Princeton, combinò il concetto di punto fisso in una trasformazione di coordinate e quello di strategia ottimale che un giocatore razionale può adottare competendo con avversari anch'essi razionali.

Nash considerò un numero arbitrario di giocatori e provò che, sotto certe condizioni, esiste un punto di equilibrio che si ottiene quando ciascun partecipante sceglie la propria mossa strategica in modo da massimizzare la sua funzione di retribuzione, supponendo che gli altri competitori non varino i propri comportamenti a motivo della sua scelta. Questo significa che anche conoscendo la mossa dell'avversario, un giocatore non farebbe una mossa diversa da quella che ha deciso.

I soggetti possono dunque operare una scelta dalla quale tutti traggono un guadagno ovvero limitano la perdita al minimo. Ciò differisce dal caso dei giochi a somma zero (Von Neumann) dove la vittoria di uno dei due partecipanti era accompagnata dalla sconfitta all'altro.

Il Dilemma del Prigioniero

Ciascuno dei due giocatori, i prigionieri A e B (ai quali è impedito comunicare tra di loro), ha due possibili scelte: confessare, non confessare. Queste sono le conseguenze delle decisioni dei soggetti coinvolti:

- se uno solo dei due confessa, viene perdonato e l'altro viene condannato a 8 anni di carcere.
- se entrambi confessano, i prigionieri vengono entrambi condannati a 6 anni di carcere.
- se nessuno dei due confessa, vengono condannati entrambi a 2 anni di carcere.

I due giocatori scelgono la propria strategia simultaneamente, senza conoscere l'azione scelta dall'altro giocatore.

Prigioniero B Prigioniero A	*confessa*	*non confessa*
confessa	A=6, B=6	A=0, B=8
non confessa	A=8, B=0	A=2, B=2

Riassumendo, ciascuno dei due soggetti coinvolti:

- se *confessa* rischia da 0 a 6 anni di carcere
- se *non confessa* rischia da 2 a 8 anni di carcere

Entrambi i prigionieri applicheranno la strategia *minimax* e sceglieranno dunque di confessare (6 è il minimo di {6; 8}). Ma così facendo l'esito complessivo appare ben lontano dall'ottimale: se infatti entrambi decidessero di non confessare la pena risulterebbe di soli due anni a testa.

Il "punto di equilibrio di Nash" si può determinare con il "metodo dei flussi di frecce":

- riferendosi ad A, si traccia su ciascuna colonna una freccia dal caso peggiore a quello più favorevole;
- riferendosi a B, si tracciano frecce analoghe lungo le righe;
- il punto verso cui convergono le frecce cos' tracciate è il punto di equilibrio di Nash.

Prigioniero B Prigioniero A	*confessa*	*non confessa*
confessa	A=6, B=6	A=0, B=8
non confessa	A=8, B=0	A=2, B=2

Diamo infine un'occhiata a questo "gioco", tratto dal precedente e dove gli esiti quantificano i problemi di spesa e di sicurezza:

Superpotenza B Superpotenza A	*si dota di armi nucleari*	*non si dota di armi nucleari*
si dota di armi nucleari	A=6, B=6	A=0, B=8
non si dota di armi nucleari	A=8, B=0	A=2, B=2

Dunque, ragionando freddamente in termini di "convenienza", le due Superpotenze in gioco continueranno ad armarsi…

Ma questo, purtroppo, non è un gioco.

Riferimenti bibliografici

Bagni, G.T.: 1996, *Storia della matematica*. I–II. Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T.: 2000, *Matematici*. Antilia–Terra Ferma, Treviso (seconda edizione, 2006).

Bagni, G.T.: 2006, *Linguaggio, storia e didattica della matematica*. Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T.: 2007, *Rapresentare la matematica*. Aracne, Roma.

Bagni, G.T. & D'Amore, B.: 1994, *Alle radici storiche della prospettiva*. Franco Angeli, Milano.

Bagni, G.T. & D'Amore, B.: 2006, *Leonardo e la matematica*. Giunti, Firenze.

Chabert, J.–L. (a cura di): 1998, *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*. Springer, Berlin–Heidelberg (edizione originale: *Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*. Belin, Paris 1994).

Ferrari, M.: 1993, Giocando con i quadrati magici. In: D'Amore, B. (a cura di), *Alla scoperta della matematica per una didattica (più) viva*. Pitagora, Bologna, 37–42.

Ghersi, I.: 1978, *Matematica dilettevole e curiosa*. Hoepli, Milano.

Giusti, E. & Maccagni, C. (a cura di): 1994, *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento*. Giunti, Firenze.

Kline, M.: 1991, *Storia del pensiero matematico*. Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press, New York 1972).

Maracchia, S.: 2005, *Storia dell'algebra*. Liguori, Napoli.

Martzloff, J.–C.: 1997, *History of Chinese mathematics*. Springer, Berlin–Heidelberg (*Histoire des mathématiques chinoises*. Masson, Paris 1987).

Needham, J.: 1985, *Scienza e civiltà in Cina*. 3*. Einaudi, Torino (*Science and civilisation in China*. Cambridge University Press, Cambridge 1959).

Pacioli, L.: 1997, *De Viribus Quantitatis*. Garlaschi Peirani, M. & Marinoni, A. (a cura di). Ente Raccolta Vinciana, Milano.

Romano, G. (a cura di): 1969, *Larte de labbacho*. Copia anastatica. Longo e Zoppelli, Treviso.

Sesiano, J.: 1996, *Un traité médiéval sur les carrés magiques (manuscrit arabe du X–ème siècle, Istanbul, 1250)*. Presses polytechniques et universitaires romanes, Lausanne.

Tannery, P.: 1886, Le traité de Manuel Moschopulos sur les carrés magiques. *Annuaire de l'Ass. pour l'encorragement des études grecques en France*, 20, 88–118.
Uri, D.: 2003, *De Viribus Quantitatis* (sito comprendente copia del manoscritto originale) http://www.uriland.it/matematica/DeViribus/Presentazione.html
Weintraub, E.R. (a cura di): 1992, *Toward a History of Game Theory*. Durham and London: Duke University Press.