Rete "Come Together – Orizzonti europei per la scuola"
Seminario "L'insegnamento della matematica nei Paesi europei"
ITT "Mazzotti", Treviso, 21 aprile 2008

Matematica, una sfida per la scuola italiana

Spunti per un'ermeneutica dell'apprendimento

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

«I giovani non si orientano nel numero che sarebbe ragionevole e auspicabile verso le professioni e i saperi scientifici. Negli anni precedenti le immatricolazioni universitarie in quei settori sono calate mediamente di oltre il 55%, con un leggero, ma insufficiente, recupero negli ultimi due anni. Le indagini internazionali (IEA, OCSE) rivelano lacune assai preoccupanti nelle nostre giovani generazioni e nel paese. Questi e molti altri allarmanti indicatori ci mostrano una grave crisi di civiltà. Siamo di fronte ad una pericolosa perdita di peso internazionale, alla contrazione delle opportunità offerte alle nostre giovani generazioni, al rischio della marginalizzazione italiana nella società mondiale della conoscenza» (Doc. 2007 Gruppo di lavoro per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica, Luigi Berlinguer).

Matematica, una sfida per la scuola

- L'Unione Matematica Italiana, con gli organismi ministeriali e con la Società Italiana di Statistica, ha predisposto negli ultimi anni alcune riflessioni:
- **Matematica 2001.** Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. Scuola Primaria e Secondaria di I grado
- **Matematica 2003.** Attività didattiche e prove di verifica. Ciclo secondario
- **Matematica 2004.** La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica. Ciclo secondario: 5ª classe.

Matematica, una sfida per la scuola

- Nei **provvedimenti per incentivare le scelte universitarie scientifiche** sarà quindi indispensabile tenere conto di una rivalutazione della matematica e, in generale, di tutte le discipline scientifiche.
- Alcuni progetti offrono importanti modelli culturali, metodologici e istituzionali:
- **PON–SeT** (soprattutto Italia meridionale e isole),
- i progetti promossi dal Ministero della Pubblica Istruzione come **ISS** (Insegnare Scienze Sperimentali, dedicato a fisica, chimica e scienze naturali, ma con riflessi anche in ambito matematico)…

Matematica, una sfida per la scuola

- … e più specificamente **Mat@bel** (per la formazione in presenza e a distanza di docenti di matematica)
- il **Progetto Lauree Scientifiche**, promosso dal Ministero dell'Università e della Ricerca.
- La recente **XVII Settimana della Cultura scientifica e tecnologica** (19–25 Marzo 2007), varata dal Ministero dell'Università e della Ricerca e dal Ministero della Pubblica Istruzione, è stata dedicata a "La natura e la civiltà delle macchine" e ha dato opportunità anche in sede locale di sviluppare interessanti iniziative collegate alla matematica.

Matematica, matematiche e programmi

- Quali elementi legati alle matematiche sono presenti nei programmi "ufficiali" di matematica?
- Nei (datati) **Programmi per la Scuola Elementare** (D.P.R. 12 febbraio 1985, n. 104) leggiamo che "le nozioni matematiche di base vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete, che scaturiscono da esperienze reali del fanciullo".
- Spesso sono citati "contesti di gioco e di vita familiare e sociale" e tra le indicazioni didattiche si nota che "fra i giochi si possono comprendere sia quelli spontanei o appresi dal fanciullo **nel suo ambiente culturale".**

Matematica, matematiche e programmi

- Nelle **Indicazioni per il Curricolo** (31 luglio 2007) si auspica lo sviluppo di “relazioni costruttive **fra le tradizioni culturali e i nuovi sviluppi delle conoscenze”.**
- Si sottolinea inoltre l’importanza di “affinare il linguaggio naturale e la capacità di organizzare il discorso, con una speciale attenzione all’uso della lingua, **in particolare della lingua italiana”.**
- Tra gli Obiettivi di apprendimento al termine della V classe della Scuola Primaria: **“Conoscere sistemi di notazioni dei numeri che sono o sono stati in uso in luoghi, tempi e culture diverse dalla nostra”.**

Matematica, matematiche e programmi

- Nei **Programmi per la Scuola Media** (D.M. 9 febbraio 1979) si parla di “Avviamento alla collocazione storica della scienza”.
- Più in particolare:

  “L’insegnante di scienze avvierà l’alunno ad **una prima riflessione sulla dimensione storica della scienza**, presentando, con esempi significativi, sia le linee di sviluppo della scienza dal suo interno, sia la stretta correlazione esistente fra l’evoluzione scientifica e quella della condizione umana”.

Matematica, matematiche e programmi

- Negli **Orientamenti per la “lettura” dei contenuti** (sempre relativi alla Scuola Secondaria di I grado) si afferma che “una nozione può assumere più chiaro significato se **messa a raffronto con altre ad essa parallele o antitetiche:** […] ad esempio la numerazione decimale potrà essere pienamente intesa se confrontata con altri sistemi di numerazione”.
- Per quanto riguarda infine le **Scuole Secondarie di II grado** ci limitiamo ad un cenno riguardante il Liceo Classico, in cui si fa riferimento a un metodo **“intuitivo-dinamico, in stretto contatto col processo storico, senza esclusivismo di vedute”.**

Matematica, matematiche e programmi

- Sarebbe difficile riassumere gli obiettivi stabiliti per l’area logico–matematica nei programmi scolastici italiani, anche perché essi risentono chiaramente dei momenti in cui tali programmi sono stati elaborati.
- Una riflessione sull’insegnamento–apprendimento della matematica nella scuola italiana che possa risultare organica e per qualche verso completa rischierebbe dunque di essere utopistica.
- Si tenga inoltre presente che **ogni trasposizione didattica sottintende una posizione epistemologica:** proporremo qualche riflessione in tal senso.

Perché la situazione è così difficile?

Ennio De Giorgi

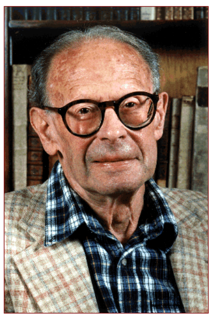
- «Forse ciò che rende ancora per molti la matematica poco attraente è il fatto che molti la sentono più come un’imposizione che come una proposta».

- **Una matematica senza storia,**
- **Una matematica senza geografia,**
- **Una matematica “là fuori”**

è senza dubbio
una matematica ben poco attraente!

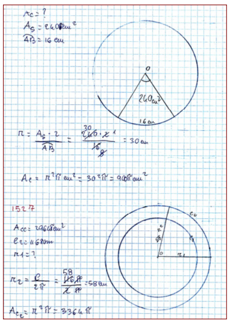
Per “fare matematica”…
… serve qualcosa?

“Give us enough chalk”
(André Weil)



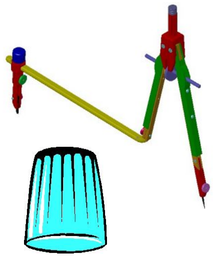
Matematica e strumenti, un abbinamento… naturale!

- Potremmo confondere, a prima vista, il “quaderno di italiano” e il “quaderno di storia”, o scambiare gli appunti di letteratura latina con quelli di filosofia: **ma i disegni del quaderno di geometria sono inconfondibili.**
- E ovviamente per realizzare tali disegni servono degli **strumenti!**



Il cerchio, il compasso, il bicchiere…

- Fin dai tempi più antichi l’uomo avrà individuato una figura “interessante” (un cerchio) ad esempio nella sezione di un tronco d’albero (un cilindro può rotolare facilmente).
- Oggi, i nostri allievi chiamati a tracciare una circonferenza possono usare sia il compasso… che, ad esempio, un (meno nobile) bicchiere.



Ma che differenza c’è tra l’uso del *compasso* e l’uso del *bicchiere?*

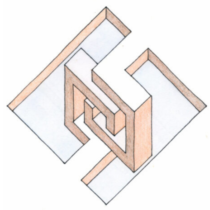
- Il bicchiere è più facile da utilizzare, non si buca il foglio, si può usare la penna. Ma con un bicchiere si può tracciare una sola circonferenza (della quale peraltro non si identifica facilmente il centro); il compasso è uno strumento più generale.
- La principale differenza tra i due modi di procedere, e tra i due strumenti da utilizzare, è così riassumibile:

  il compasso “incorpora” la definizione euclidea di circonferenza,

  mentre accarezzando il bordo rotondo di un bicchiere possiamo solo percepire una curvatura “regolare”: il bicchiere, insomma, incorpora soltanto quella che si può definire, in un approccio elementare, una caratteristica (Chassapis, 1999).

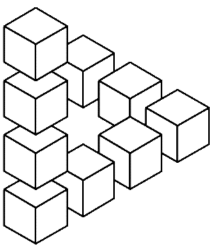
Strumenti da interpretare “Guardiamo” una figura…

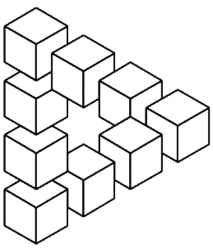
- Lo svedese Oscar Reutersvärd (1915–2002) disegnò la prima “figura impossibile” nel 1934.
- Reutersvärd affronta i temi dell’**ambiguità percettiva** riprendendo la problematica spazio-temporale del Cubismo e l’iconografia medioevale, ricca di **rappresentazioni a multipla lettura spaziale**.
- Anche un’immagine deve essere interpretata…



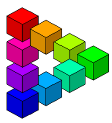
Strumenti da interpretare “Guardiamo” una figura…

- Osserviamo la figura qui sotto a sinistra: nessun problema nel percepire un insieme di cubetti…
- **Ma se la figura fosse quella a destra (*Opus 1*)?**

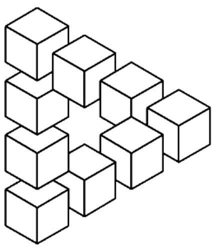


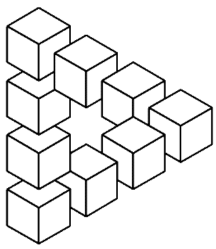


Strumenti da interpretare “Guardiamo” una figura…



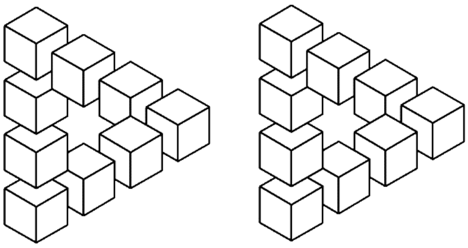
- Se eliminiamo due cubetti da uno dei tre lati, l’ambiguità si dissolve…





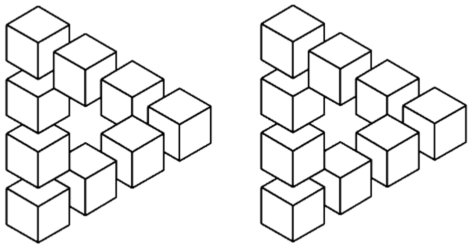
Strumenti da interpretare “Guardiamo” una figura…

- Possiamo ripetere l’operazione per un secondo lato…



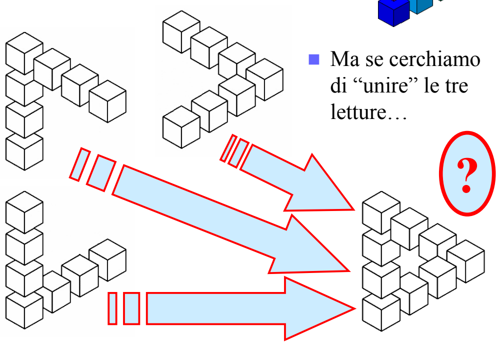
Strumenti da interpretare “Guardiamo” una figura…

- … e infine per il terzo lato, sempre riuscendo a “suggerire” un’interpretazione tridimensionale chiara.



Strumenti da interpretare “Guardiamo” una figura…

- Ma se cerchiamo di “unire” le tre letture…



Strumenti da interpretare “Guardiamo” una figura…

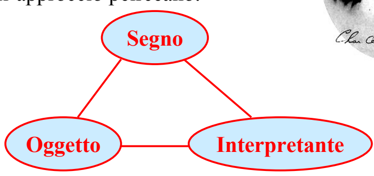
- Un punto chiave è il seguente: **non esistono figure “oggettive”, universalmente efficaci** secondo regole e modalità fisse e valide per tutte le tradizioni culturali.
- La matematica richiede l’interpretazione di segni, di immagini, la gestione (contemporanea) di diversi registri rappresentativi.
- E tutto ciò non può essere considerato indipendentemente da un contesto socio-culturale.

La storia, “strumento” per la didattica

- La storia è stata applicata in ambito didattico dalla fine del XIX secolo (nel **1896** è stato pubblicato un volume di F. Cajori dedicato a tali applicazioni).
- Ma ci sono importanti questioni epistemologiche:
- è corretto concepire la storia come un percorso che porta **alla sistemazione moderna**?
- Quale ruolo va attribuito ai **fattori culturali e sociali**?
- Le fasi che consideriamo di passaggio verso la formazione della matematica “compiuta” (la nostra?) costituivano **la matematica “compiuta” dell’epoca, in base a precise concezioni culturali**.
- Torniamo all’aspetto semiotico…

Peirce: segno, oggetto interpretante

- Il **triangolo semiotico** è alla base dell’approccio peirceano:



- L’**oggetto** è rappresentato da un **segno** (*icona*, *indice* o *simbolo* a seconda che si abbia una rassomiglianza, una connessione causale o una convenzione) e suscita un **interpretante**, cioè una reazione in chi interpreta.

Matematica e segni
nella semiotica peirceana

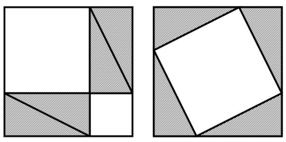
- Il **diagramma** rappresenta iconicamente la relazione matematica: l'icona costituita dal diagramma trasmette una caratteristica generale, pur essendo un soggetto individuale e osservabile (sul quale il matematico può operare per ottenere ulteriori caratteristiche generali del diagramma stesso).
- Rimane tuttavia **il problema dell'individualità dell'oggetto sul quale si sviluppa la dimostrazione contrapposta all'universalità delle conclusioni.**
- Una dimostrazione matematica, con la sua fondamentale universalità, non può ridursi a un diagramma iconico.

Matematica e segni
nella semiotica peirceana

- Il punto è che il diagramma ha le caratteristiche di un'icona, ma **dovrà associarsi (come ogni segno) a un interpretante** e questo è **simbolico ed è generale.** Possiamo dunque riassumere:
- Il diagramma-icona tracciato per dimostrare ad esempio un teorema geometrico **è interpretante dell'enunciato simbolico** che traduce secondo alcune convenzioni (un'intenzione, dice Peirce).
- Questo diagamma-icona **determina infine un nuovo interpretante simbolico e universale** quando è recepito alla luce della stessa "intenzione convenzionale".

Una fase iconica
tra due momenti simbolici?

- Consideriamo il teorema di Pitagora:
- **Enunciato** (universale): in **ogni** triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.
- Da qui passiamo ad un **interpretante iconico…**
- **Diagramma:** il quadrato a sinistra e il quadrato a destra sono congruenti e il confronto delle loro scomposizioni verificare il teorema **(per questo caso).**



Una fase iconica
tra due momenti simbolici?

- Ma questo interpretante iconico è a sua volta un segno, e induce **un (nuovo) interpretante di carattere generale**, la dimostrazione del teorema.
- Un segno porta a utilmente considerare altri segni mediante i quali viene ottenuta la dimostrazione e il contenuto matematico rappresentato si lega in termini decisivi con i segni (icone o simboli).
- **L'aspetto didattico però può collocarsi in questo quadro teorico con caratteristiche specifiche: in particolare, la concretezza dell'indice potrà essere rivalutata didatticamente, soprattutto in alcuni contesti socio–culturali.**

Una fase iconica
tra due momenti simbolici?

- Alcune considerazioni didatticamente molto importanti:
  - **uno stesso segno può essere interpretato** in modi diversi: può essere attribuita maggiore o minore importanza agli aspetti iconici, indicali, simbolici.
  - **ciò dipende dal segno, ma anche da chi è chiamato a interpretare,** dai contesti socio–culturali che hanno alle spalle i nostri allievi (problema che supera l'ambiente scolastico).
  - **da ciò dipende il comportamento degli allievi, dunque** il loro apprendimento.

Euclide: la geometria greca rinuncia agli "strumenti"?

- Ci resta da capire che cos'è l'"oggetto" che sta alla base delle rappresentazioni (segni) della matematica.
- Consideriamo la **definizione euclidea di cerchio** (*Elementi*, I, Def. XV) come figura piana racchiusa da una linea (circonferenza) tale che i segmenti tirati da un punto interno ad essa siano tutti uguali:
- «Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea [, cioè sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro».

Euclide: la geometria greca rinuncia agli "strumenti"?

- Essa è molto vicina alla moderna nozione di luogo geometrico e può apparire diversa dalla **definizione euclidea di sfera** (*Elementi*, Libro XI, Definizione XIV) che si riferisce alla figura solida generata da un semicerchio quando questa ruota attorno al proprio diametro:
- «Sfera è la figura che viene compresa quando, restando immobile il diametro di un semicerchio, si faccia ruotare il semicerchio intorno al diametro finché non ritorni nuovamente nella stessa posizione da cui si cominciò a farlo muovere».

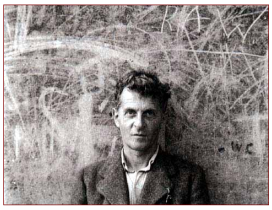
Euclide: la geometria greca rinuncia agli "strumenti"?

- Quest'ultima descrizione, nota Enrico Giusti (1999, p. 23), «evoca più il tornio dell'operaio che il compasso del geometra».
- Sulla base di ciò avanziamo un'ipotesi per interpretare le definizioni euclidee…
- … che gli oggetti matematici provengano non dall'astrazione di oggetti reali, dei quali essi descriverebbero le caratteristiche, bensì **da un processo di oggettualizzazione di procedure.**

Possiamo pensare ad una matematica che faccia a meno di "strumenti"?

- "Capire una frase –potremmo dire– è comprenderne l'uso. (…) **Tutti i calcoli della matematica**

1. **sono stati inventati per assecondare l'esperienza**
2. **e poi sono stati resi indipendenti dall'esperienza"**



Ludwig Wittgenstein
(*Lezioni sui fondamenti della matematica: Cambridge 1939*.
Cornell Univ. Press, Itacha 1986.
Boringhieri, Torino 1982)

Possiamo pensare ad una matematica che faccia a meno di "strumenti"?

- Con il celebre *cogito ergo sum* Cartesio affermava: penso, dunque esisto.
- **Osservando che la matematica "funziona", potremmo essere indotti ad affermare che essa "esiste"** e magari che il lavoro del matematico si riduce a quello dello scopritore.
- Questa conclusione non ci sembra però giustificata: **il fatto che la matematica funzioni significa che… funziona, nulla di più.**
- Potremmo limitarci a dire che essa funziona in quanto è stata **concepita (ovvero "creata") in un certo modo, con la compresenza di due aspetti:**

Possiamo pensare ad una matematica che faccia a meno di "strumenti"?

(…ispirandoci idealmente a Wittgenstein)

1. **un collegamento con il mondo reale** (sebbene tale connessione non possa essere ridotta ad un semplice "rispecchiamento");
2. **la scelta di alcune posizioni convenzionali, socialmente (geograficamente!) elaborate,** le quali rendono possibile stabilire proprietà e analogie, con la conseguente costruzione di "oggetti matematici" astratti.

"inventati per assecondare l'esperienza

e poi sono stati resi indipendenti dall'esperienza"

Grazie
a Paolo Boero (Genova),
a Willibald Dörfler (Klagenfurt)
e a Jean-Philippe Drouhard (Nizza)

Per risorse, materiali e indicazioni bibliografiche si può consultare il sito: www.syllogismos.it

A tutti Voi grazie dell'attenzione