SMASI
Società Matematica della Svizzera Italiana

Lugano, 9–11–2007

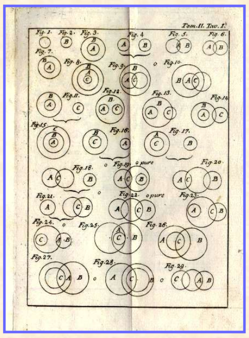
Leonhard Euler Princeps Mathematicorum

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario

- **Leonhard Euler**
  Princeps mathematicorum
- **Lettere a una principessa**
  Un'opera innovativa
- **Diagrammi di Eulero**
  Un esercizio "difficile"
- **Matematico poliedrico**
  Grafi, solidi, crittografia
- **Riflessioni conclusive**
  Buon compleanno, Eulero!

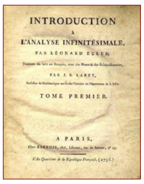


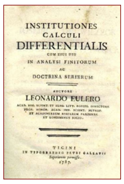
Leonhard Euler, Princeps mathematicorum


Karl Friedrich Gauss.

- **Pierre Simon de Laplace** (1749-1827), analista e padre della moderna teoria della probabilità, ai propri allievi: "Lisez Euler, c'est notre maitre à tous!"
- **François Arago** (1786-1853), grande astronomo: "Eulero è l'incarnazione dell'Analisi".
- **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), che come Euler sarà detto *Princeps Mathematicorum*: "Lo studio delle opere di Euler rimane la miglior scuola nei diversi campi della matematica e non può essere rimpiazzato da nient'altro".

Punto d'arrivo e di partenza





- I grandi trattati euleriani *Introductio in analysin infinitorum*, *Institutiones calculi differentialis* e *Institutiones calculi integralis* rappresentano **il punto di arrivo** della speculazione analitica del periodo che va dal 1665, anno al quale vengono fatte risalire le ricerche newtoniane sulle flussioni, fino alla metà del Settecento.
- Al contempo, essi rappresentano **il punto di partenza** dell'analisi moderna che, attraverso i contributi di autori quali Cauchy e Weierstrass, giungerà alla sistemazione concettuale dell'inizio del secolo XX.

Un primo esempio: Eulero dimostra che i numeri primi sono infiniti (1748)

- Seguiremo: L. Euler, *Introduction a l'Analyse Infinitésimale*, Barrois, Paris 1796, prima edizione francese, vol. I; le figure sono tratte dalle pp. 208, 209 e 213.

272. Donc la férie eft toujours compofée d'un nombre infini de termes, quelque foit le nombre des facteurs, infini ou fini. Par exemple, on aura . . . .

$$\boxed{\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \&c.}$$

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. 2 D

- Consideriamo la serie $1/(1-x) = 1+x+x^2+x^3+\dots$ della quale si fornisce l'esempio per $x = 1/2$.
- Consideriamo poi i **due** casi per $x = 1/2$ e $x = 1/3$.

---

210 DES SÉRIES RÉSULTANTES

férie, où fe trouvent tous les nombres qui peuvent être formés feulement par la multiplication du nombre deux; c'eft-à-dire, toutes les puiffances de deux. On aura enfuite

$$\boxed{\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \&c.}$$

On ne trouve ici que les nombres formés par la combinaifon des nombres 2 & 3, ou qui n'ont d'autres divifeurs que 2 & 3.

273. Donc, fi au lieu de α, β, γ, δ &c. on écrit l'unité divifée par tous les nombres premiers, & qu'on fuppofe

$$\boxed{P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\ \&c.}}$$

on aura . . . .

$$\boxed{P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \&c.}$$

Série qui comprend tous les nombres, tant les nombres premiers, que ceux qui en font formés par la multiplication. Or comme tous les nombres font ou des nombres premiers, ou des nombres compofés de ceux-ci par la multiplication, il eft évident qu'on doit trouver ici tous les nombres entiers dans les dénominateurs.

Un primo esempio: Eulero dimostra che i numeri primi sono infiniti (1748)

Soit $n = 1$; comme nous avons démontré auparavant que $l\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \&c$; on aura, en supposant $x = 1$, $l\frac{1}{1-1} = l\,\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \&c$; mais le logarithme d'un nombre infini ∞ est lui-même infiniment grand; donc

$$M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \&c. = \infty.$$

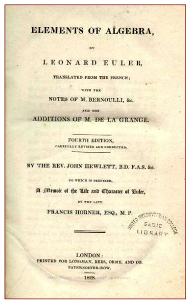
- La conclusione è immediata: i numeri primi non possono che essere **infiniti**.

En prenant les produits, on trouvera

$$M = \infty = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\ \&c.}$$

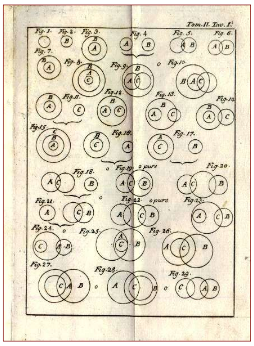
Il valore di Eulero per la didattica…

- Eulero scrisse un testo di algebra (*Vollstandige Anleitung zur Algebra*, 1770).
- Il forte carattere innovativo e l'eccezionale efficacia didattica di quest'opera sono ricordate da Gino Loria:
- "Ciò che rende l'Algebra di Euler di straordinario interesse dal punto di vista didattico è **il numero, la varietà e l'eleganza dei problemi trattati**".



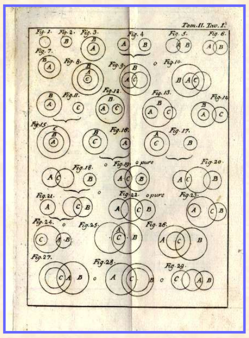
I diagrammi di Eulero nelle *Lettere ad una Principessa d'Alemagna*

- Ma un altro contributo euleriano è celebre: nel 1772 Eulero visualizza i sillogismi…
- ricorrendo ad una rappresentazione per gli **insiemi** (che sarà rivista da John Venn, 1834-1923) che saranno introdotti **un secolo più tardi** da Cantor.



Sommario

- **Leonhard Euler**
  Princeps mathematicorum
- **Lettere a una principessa**
  Un'opera innovativa
- **Diagrammi di Eulero**
  Un esercizio "difficile"
- **Matematico poliedrico**
  Grafi, solidi, crittografia
- **Riflessioni conclusive**
  Buon compleanno, Eulero!

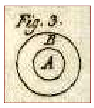


Eulero e la principessa Arnhalt-Dessau, nipote del re di Prussia

- Esaminiamo quanto Eulero scrive nelle lettere CII e CIII (14 e 17 febbraio 1761) :
- "Per esprimere sensibilmente la natura di queste quattro spezie di proposizioni, possiam rappresentarle per mezzo di **figure, le quali son di un gran soccorso per ispiegare con somma distinzione qual sia l'esattezza di un raziocinio**. E poiché una nozione generale contiene un'infinità di oggetti individuali, si può supporre a guisa di uno spazio, in cui questi oggetti son racchiusi: per esempio si forma uno spazio per la nozione di *uomo* in cui si suppone che tutti gli uomini sien radunati".

Eulero e la principessa Arnhalt-Dessau, nipote del re di Prussia

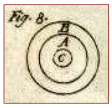
- "Per la nozione di *mortale* se ne forma un altro dove si suppone che sia compreso quanto vi è di mortale. E quando io pronunzio che *tutti gli uomini son mortali*, intendo che la I figura sia contenuta nella II. Dunque la rappresentazione di una proposizione universale affermativa sarà quella della *fig. 3* in cui lo spazio A che dinota il soggetto della proposizione vien tutto intero racchiuso nello spazio B che è il predicato. Questi cerchj o spazj (**è indifferente qualunque figura lor si dia**) son molto a portata per facilitare le nostre riflessioni sopra questa materia".



Eulero e la principessa Arnhalt-Dessau, nipote del re di Prussia

- "Il massimo vantaggio si manifesta ne' raziocinj, i quali qualora si esprimon con parole chiamansi *sillogismi*, in cui si tratta di tirare una conclusione esatta da alcune date proposizioni.
- Se la nozione C è contenuta interamente nella A, sarà contenuta anche nello spazio B:

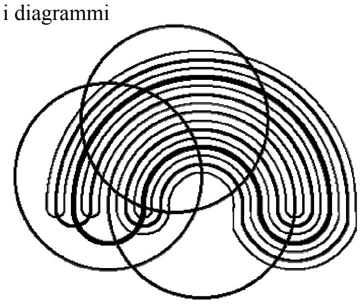
  Ogni A è B, ma *Ogni C è A*, dunque: *Ogni C è B*.



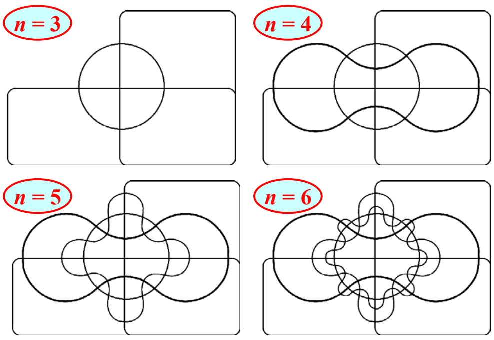
- Per esempio, [siano] A tutti gli alberi, B tutto ciò che ha radici, e C tutti i ciriegi; il nostro sillogismo sarà: *Ogni arbore ha radici*, ma *Ogni ciriegio è un arbore*, dunque *Ogni ciriegio ha radici*".

L'originale costruzione dei diagrammi proposta da Venn

- Dopo Eulero, John Venn suggerì un procedimento per costruire i diagrammi che oggi non è più usato nella pratica didattica.

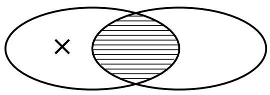


La costruzione dei diagrammi di Venn proposta da Edwards (2004)



Diagrammi "di Eulero" e "di Venn": due convenzioni rappresentative

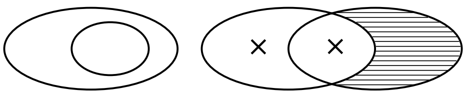
- Diagrammi **"di Eulero"**: si rappresentano solo le parti (ad esempio intersezioni) **non vuote**. Diagrammi **"di Venn"**: si rappresentano **tutte** le parti e si indicano:
  - – con una × le parti certamente non vuote
  - – con un tratteggio quelle certamente vuote
  - – le parti su cui non si hanno dati si lasciano bianche



- Tutto ciò è molto preciso, ma didatticamente sono i diagrammi **di Eulero** a risultare più "intuitivi"!

Diagrammi "di Eulero" e "di Venn": due convenzioni rappresentative

- Ad esempio, il fatto che un insieme sia **sottoinsieme (proprio)** di un altro appare più evidente da una rappresentazione come quella a sinistra ("di Eulero")

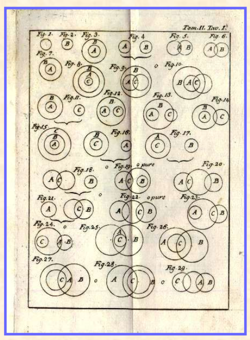


piuttosto che da una come quella a destra ("di Venn").

- Per questo le rappresentazioni usate nella pratica didattica (dette "di Eulero-Venn") sono **più vicine ai diagrammi di Eulero che ai diagrammi di Venn.**
- Torniamo dunque nelle nostre aule…

Sommario

- **Leonhard Euler**
  Princeps mathematicorum
- **Lettere a una principessa**
  Un'opera innovativa
- **Diagrammi di Eulero**
  Un esercizio "difficile"
- **Matematico poliedrico**
  Grafi, solidi, crittografia
- **Riflessioni conclusive**
  Buon compleanno, Eulero!



Affrontiamo però
un esercizio “delicato”

- Cinque amici, 1, 2, 3, 4, 5, hanno visitato alcune tra le città A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. In particolare:

  1 ha visitato A, B, H, I $\mathbf{1 \in A \wedge 1 \in B \wedge 1 \in H \wedge 1 \in I}$

  2 ha visitato B, C, F, J $\mathbf{2 \in B \wedge 2 \in C \wedge 2 \in F \wedge 2 \in J}$

  3 ha visitato C, D, G, I $\mathbf{3 \in C \wedge 3 \in D \wedge 3 \in G \wedge 3 \in I}$

  4 ha visitato D, E, H, J $\mathbf{4 \in D \wedge 4 \in E \wedge 4 \in H \wedge 4 \in J}$

  5 ha visitato A, E, F, G $\mathbf{5 \in A \wedge 5 \in E \wedge 5 \in F \wedge 5 \in G}$

  (con chiaro significato dei simboli). Dunque:

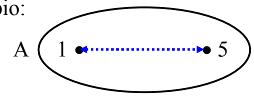
  A = {1, 5}; B = {1; 2}; C = {2; 3}; D = {3; 4};
  E = {4; 5}; F = {2; 5}; G = {3; 5}; H = {1; 4};
  I = {1; 3}; J = {2; 4}

Affrontiamo però
un esercizio “delicato”

- **Esercizio: rappresentare mediante un diagramma di Eulero-Venn la situazione ora esposta.**
- Notiamo che le scritture:

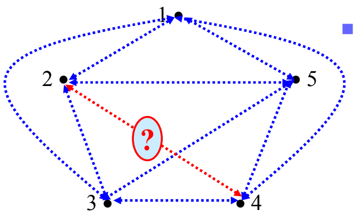
  A = {1, 5}; B = {1; 2}; C = {2; 3}; D = {3; 4};
  E = {4; 5}; F = {2; 5}; G = {3; 5}; H = {1; 4};
  I = {1; 3}; J = {2; 4}

  richiedono di “collegare” ogni elemento in uno stesso insieme con ciascuno degli altri elementi.
- Ad esempio:



Affrontiamo però
un esercizio “delicato”

- Si tratterebbe allora di realizzare un **grafo con cinque nodi completo** (per le caratteristiche del problema) e **planare** (in modo da permettere il disegno dei diagrammi di Eulero-Venn), ma…



- **… il grafo completo con cinque nodi K_5 (uno dei grafi di Kuratowski) non è un grafo planare!**

Affrontiamo però
un esercizio “delicato”

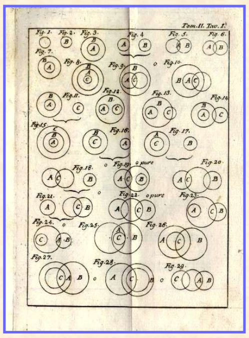
- Pertanto: l’esercizio precedente **non** può essere risolto: la situazione descritta da:
  $\mathbf{1 \in A \wedge 1 \in B \wedge 1 \in H \wedge 1 \in I \wedge 2 \in B \wedge 2 \in C \wedge 2 \in F \wedge 2 \in J \wedge 3 \in C \wedge 3 \in D \wedge 3 \in G \wedge 3 \in I \wedge 4 \in D \wedge 4 \in E \wedge 4 \in H \wedge 4 \in J \wedge 5 \in A \wedge 5 \in E \wedge 5 \in F \wedge 5 \in G}$
- **non può essere espressa mediante un diagramma di Eulero (se non rinunciando alla connessione).**
- I diagrammi di Eulero **non** hanno uno statuto epistemologico equivalente a quello della scrittura simbolica.
- **I due modi di esprimersi hanno una diversa “profondità”, un contenuto informativo diverso!**

Diagrammi di Eulero:
qualche riflessione…

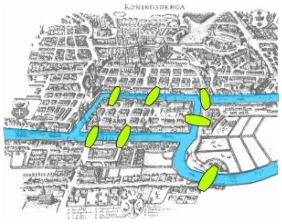
- Ogni modalità mediante la quale esprimiamo la matematica **ha caratteristiche proprie e può sintetizzare tipi diversi di informazione** (la singole relazioni di appartenenza, le inclusioni etc.).
- Ogni modalità inoltre si collega ai diversi usi, alle pratiche sociali.
- Non appare dunque corretto pensare alle varie modalità di espressione matematica come a dei linguaggi sostanzialmente equivalenti, isomorfi, come a **forme diverse (basate su diverse convenzioni) di un preteso, assoluto “linguaggio matematico”.**

Sommario

- **Leonhard Euler**
  Princeps mathematicorum
- **Lettere a una principessa**
  Un’opera innovativa
- **Diagrammi di Eulero**
  Un esercizio “difficile”
- **Matematico poliedrico**
  Grafi, solidi, crittografia
- **Riflessioni conclusive**
  Buon compleanno, Eulero!

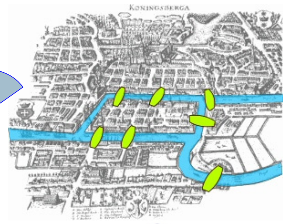


Una passeggiata lungo i fiumi di Königsberg

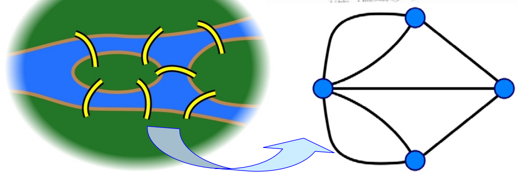


- Königsberg è percorsa dal fiume Pregel e dagli affluenti che formano due isole collegate tra di loro e con le due aree principali della città da sette ponti.
- Problema: è possibile passeggiare lungo **un percorso che attraversa ogni ponte una e una sola volta e tornare al punto di partenza?**
- Nel 1736 Eulero dimostrò che una tale passeggiata **non** era possibile…

Una passeggiata lungo i fiumi di Königsberg



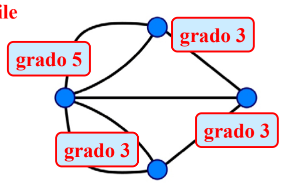
- Sulla base delle idee di Eulero è nata la **Teoria dei Grafi.**



Una passeggiata lungo i fiumi di Königsberg

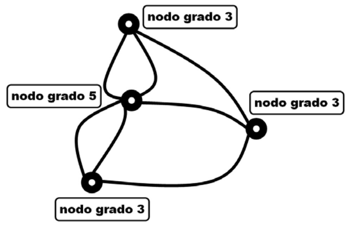
- Eulero enunciò il seguente teorema:

  un qualsiasi grafo è percorribile se e solo se ha tutti i nodi di grado pari, o due di essi sono di grado dispari.
- Inoltre, per percorrere un grafo di quest'ultimo tipo, cioè con due nodi di grado dispari, è necessario partire da uno di essi e terminare il percorso sull'altro nodo dispari.
- Pertanto risulta **impossibile** percorrere Königsberg come richiesto: infatti **tutti i nodi della rappresentazione hanno grado dispari.**



Una passeggiata lungo i fiumi di Königsberg

- Fondamentale è la capacità di modellizzazione della realtà e, in ultima analisi, di "astrazione":
- Eulero inventa lo **strumento** matematico per analizzare e gestire **situazioni concrete.**



La formula di Eulero per i poliedri

F+V–S = 2

- Formula di Eulero per un poliedro:

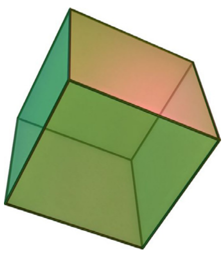
  nr. Facce + nr. Vertici – nr. Spigoli = 2
- Esempio: **cubo (esaedro regolare):**

nr. Facce: **6**

nr. Vertici: + **8**

nr. Spigoli: – **12**

2



La formula di Eulero per i poliedri

F+V–S = 2

- Formula di Eulero per un poliedro:

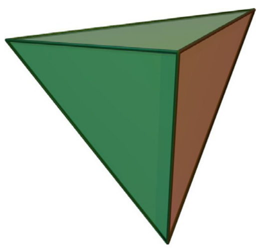
  nr. Facce + nr. Vertici – nr. Spigoli = 2
- Esempio: **tetraedro:**

nr. Facce: **4**

nr. Vertici: + **4**

nr. Spigoli: – **6**

2



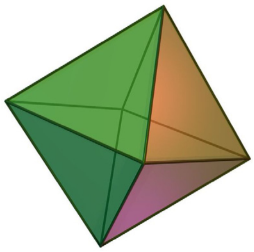
La formula di Eulero per i poliedri

F+V–S = 2

- Formula di Eulero per un poliedro:
  nr. Facce + nr. Vertici – nr. Spigoli = 2
- Esempio: **ottaedro:**

nr. Facce: **8**
nr. Vertici: + **6**
nr. Spigoli: – **12**

2



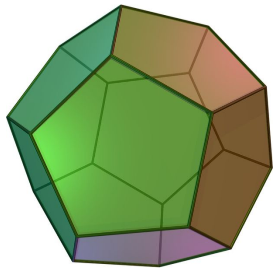
La formula di Eulero per i poliedri

F+V–S = 2

- Formula di Eulero per un poliedro:
  nr. Facce + nr. Vertici – nr. Spigoli = 2
- Esempio: **dodecaedro:**

nr. Facce: **12**
nr. Vertici: + **20**
nr. Spigoli: – **30**

2



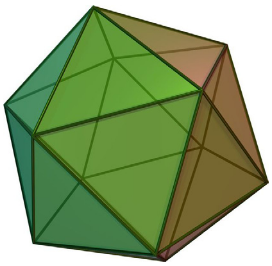
La formula di Eulero per i poliedri

F+V–S = 2

- Formula di Eulero per un poliedro:
  nr. Facce + nr. Vertici – nr. Spigoli = 2
- Esempio: **icosaedro:**

nr. Facce: **20**
nr. Vertici: + **12**
nr. Spigoli: – **30**

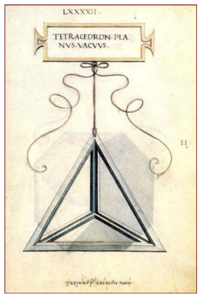
2



La formula di Eulero per i poliedri

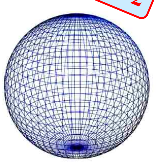
F+V–S = 2

- La formula di Eulero consente di dimostrare che i **poliedri regolari convessi** (solidi con le facce regolari tutte uguali e angoloidi uguali) sono soltanto i seguenti, detti **solidi platonici:**
  - **tetraedro regolare**
  - **esaedro regolare (cubo)**
  - **ottaedro regolare**
  - **dodecaedro regolare**
  - **icosaedro regolare**



La formula di Eulero per i poliedri

F+V–S = 2

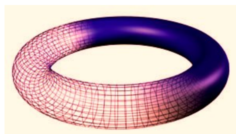


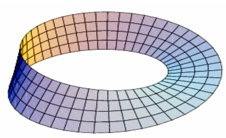
- Sulla formula di Eulero si basano importanti generalizzazioni: F+V–S è detta **caratteristica di Eulero**.
- Se consideriamo la triangolazione di una **sfera**, prendendo un numero k di vertici su di essa e congiungendoli a tre a tre con dei triangoli (o a quattro a quattro con dei quadrati etc.), la caratteristica di Eulero è sempre 2, indipendentemente dalla particolare triangolazione. È un **invariante** da associare alla superficie della sfera o ad ogni superficie ottenibile dalla sfera per deformazioni continue, senza tagli né incollature.

La formula di Eulero per i poliedri

F+V–S = 2

- Il risultato euleriano è stato generalizzato a poliedri con un numero h di buchi e precisamente si dimostra che: $\mathbf{F+V-S = 2-2}h$
- Così per un poliedro con un buco ottenuto triangolando un **toro**, la caratteristica di Eulero è 0, indipendentemente dalla triangolazione usata.
- Anche per il **nastro di Möbius** la caratteristica di Eulero è 0.





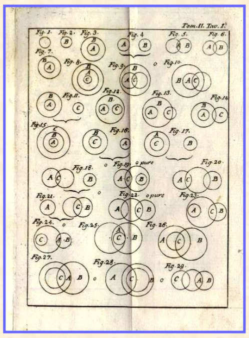
La formula di Eulero per i poliedri

- La caratteristica di Eulero, ridefinita da **Poincaré**, è un **invariante topologico**: non varia per "deformazioni continue".
- La **topologia** tiene conto solo delle proprietà invarianti per trasformazioni continue: una ciambella e una tazza sono topologicamente indistinguibili.

$F+V-S=0$

Sommario

- **Leonhard Euler**
  Princeps mathematicorum
- **Lettere a una principessa**
  Un'opera innovativa
- **Diagrammi di Eulero**
  Un esercizio "difficile"
- **Matematico poliedrico**
  Grafi, solidi, crittografia
- **Riflessioni conclusive**
  Buon compleanno, Eulero!



Un matematico davvero "poliedrico"!

- **Eulero** "fu il matematico più prolifico della storia [e] scrisse le sue famose dissertazioni con la facilità con cui uno scrittore dall'agile penna scrive una lettera per un amico.
- La cecità totale che lo afflisse durante gli ultimi diciassette anni di vita non rallentò il ritmo della sua attività;
- al contrario, la perdita della vista affinò le sue percezioni nel mondo interno della sua immaginazione" (Eric T. Bell).

Madamina, il catalogo è questo...

- L'*Opera Omnia* di Eulero, pubblicata da Birkhäuser (Basilea), iniziata nel 1911 è giunta a **84 volumi:**
- Serie I – Opera mathematica (30 v.)
- Serie II – Opera mechanica/astronomica (32 v.)
- Serie III – Opera physica, Misc. (12 v.)
- Serie IV – Commercium epistolicum (10 v.)

Il grande Eulero e la questione del "rigore"…

- Infine, "cosa curiosa: mentre Eulero riconosceva la necessità di essere prudente maneggiando l'*infinito*, non prese questa precauzione in molti dei suoi lavori" (Eric T. Bell).
- Ma "a molti dei risultati del suo lavoro apparentemente indiscriminato sulle serie è stato dato un senso assolutamente rigoroso dai matematici moderni" (Dirk J. Struik).
- **(E il rigore è un concetto storico!)**

A tutti Voi grazie dell'attenzione

Per risorse, materiali e bibliografia si veda: **www.syllogismos.it**