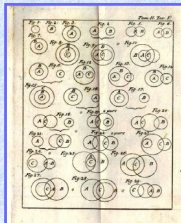
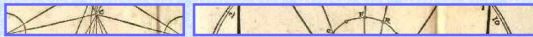


XVIII Congresso Unione Matematica Italiana
 Università di Bari, 28 settembre 2007 (15.00–15.20)
 Palazzo delle Aule, Aula 2

**I diagrammi di Eulero
 e la rappresentazione degli insiemi**



Giorgio T. Bagni

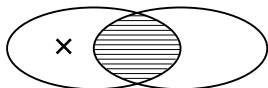
Dipartimento di Matematica e Informatica
 Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

**Diagrammi di Eulero-Venn:
 la loro realizzazione**

- Nella pratica didattica il ricorso a **diversi registri rappresentativi** è una risorsa preziosa.
- Fondamentali sono le considerazioni di Duval (1995).
- Un problema riferito all'insegnamento-apprendimento degli insiemi è ad esempio il seguente:
 è possibile definire completamente una qualsiasi situazione (alcuni insiemi, alcuni elementi) enunciando le relazioni tra insiemi ed elementi;
ma come viene effettivamente ottenuta e usata, sulla base di questa, una rappresentazione con i diagrammi di Eulero-Venn?

**Diagrammi “di Eulero” e “di Venn”:
 convenzioni rappresentative**

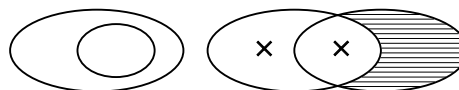
- Diagrammi “**di Eulero**”: si rappresentano solo le parti (ad esempio intersezioni) **non vuote**. Diagrammi “**di Venn**”: si rappresentano **tutte le parti** e si indicano:
 - con una \times le parti certamente non vuote
 - con un tratteggio quelle certamente vuote
 - le parti su cui non si hanno dati si lasciano bianche



- Tutto ciò è molto preciso, ma didatticamente sono i diagrammi di Eulero a risultare più “intuitivi”!

**Diagrammi “di Eulero” e “di Venn”:
 convenzioni rappresentative**

- Ad esempio, il fatto che un insieme sia **sottoinsieme (proprio)** di un altro appare più evidente da una rappresentazione come quella a sinistra (“di Eulero”)



piuttosto che da una come quella a destra (“di Venn”).

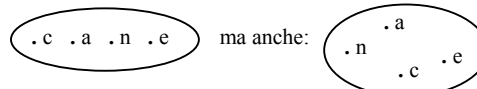
- Per questo le rappresentazioni usate nella pratica didattica (dette “di Eulero-Venn”) sono **più vicine ai diagrammi di Eulero che ai diagrammi di Venn.**

**Prima considerazione:
 le assunzioni implicite**

- L'uso della rappresentazione visuale (diagrammi di Eulero-Venn) può essere molto importante per **evitare scorrette assunzioni implicite.**
- Consideriamo ad esempio l'insieme delle lettere della parola *cane* scritto in rappresentazione tabulare:
 $\{c, a, n, e\}$
- Esso **non deve far pensare ad un “ordine”** tra gli elementi (ad esempio, corrispondente all'ordine delle lettere nell'ordinaria scrittura della parola).
- Si tratterebbe di un'assunzione del tutto **estranea alla nozione di insieme!**

**Prima considerazione:
 le assunzioni implicite**

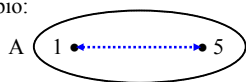
- Una rappresentazione visuale (mediante i diagrammi di Eulero-Venn) può risultare utile. Ad esempio, l'insieme delle lettere della parola *cane* può essere:



- Il secondo è preferibile: **non “suggerisce” un ordine!**
- Tuttavia anche la rappresentazione visuale richiede prudenza...

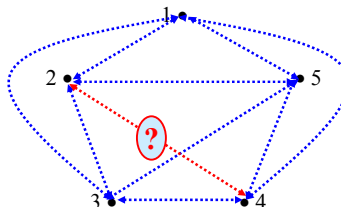
Seconda considerazione: un esercizio “delicato”

- **Esercizio:** rappresentare mediante un diagramma di Eulero-Venn la situazione:
 - A = {1, 5}; B = {1, 2}; C = {2, 3}; D = {3, 4};
 - E = {4, 5}; F = {2, 5}; G = {3, 5}; H = {1, 4};
 - I = {1, 3}; J = {2, 4}
- Notiamo che le scritture precedenti richiedono di “collegare” ogni elemento in uno stesso insieme con ciascuno degli altri elementi.
- Ad esempio:



Seconda considerazione: un esercizio “delicato”

- Si tratterebbe allora di realizzare un **grafo con cinque nodi completo** (per le caratteristiche del problema) e **planare** (in modo da permettere il disegno dei diagrammi di Eulero-Venn), ma...



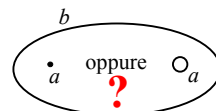
- ... il grafo completo con cinque nodi K_5 (uno dei grafi di Kuratowski) **non è un grafo planare!**

Seconda considerazione: un esercizio “delicato”

- Pertanto: l'esercizio precedente **non** può essere risolto: la situazione descritta da:
 - $1 \in A \wedge 1 \in B \wedge 1 \in H \wedge 1 \in I \wedge 2 \in B \wedge 2 \in C \wedge 2 \in F \wedge$
 - $2 \in J \wedge 3 \in C \wedge 3 \in D \wedge 3 \in G \wedge 3 \in I \wedge 4 \in D \wedge 4 \in E \wedge$
 - $4 \in H \wedge 4 \in J \wedge 5 \in A \wedge 5 \in E \wedge 5 \in F \wedge 5 \in G$
- **non può essere espressa mediante un diagramma di Eulero** (se non rinunciando alla connessione).
- I diagrammi di Eulero **non** hanno uno statuto epistemologico equivalente a quello della scrittura simbolica.
- **I due modi di esprimersi hanno una diversa “profondità”, un contenuto informativo diverso!**

Terza considerazione: impossibilità “matematiche”

- Si pensi ai naturali alla von Neumann:
 - 0 corrisponde a \emptyset
 - 1 corrisponde a $\{\emptyset\}$
 - 2 corrisponde a $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
 - 3 corrisponde a $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- Qui dunque se $a < b$ abbiamo sia $a \in b$ che $a \subseteq b$ (ricordiamo anche che a tale che $\forall x (x \in a \rightarrow x \subseteq a)$ si dice **insieme transitivo**).
- Come rappresentare a e b in modo che sia $a \in b$...
...e anche $a \subseteq b$?



I diagrammi di Eulero-Venn e gli altri registri rappresentativi

- In un recente articolo (Bagni, 2006, Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of Set Theory, *Educational Studies in Mathematics* 62, 3, 259-280) si affermava: “le espressioni fondamentali della Teoria degli Insiemi sono di tipo predicativo, mentre i diagrammi di Eulero-Venn le illustrano mediante punti in una figura piana.
- **Gli studenti sono ‘affetti’ [affected] dai segni, nel senso che questi offrono ad essi alcuni percorsi di sviluppo concettuale (Radford, 2002)”.**

I diagrammi di Eulero-Venn e gli altri registri rappresentativi

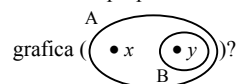
- “Le rappresentazioni visuali (i diagrammi di Eulero-Venn) inducono gli studenti ad ottenere una certa comprensione di predicabilità. [...]”
- Attraverso il ricorso a ciascuno di questi registri di rappresentazione semiotica **gli studenti costruiscono aspetti parziali della ‘immagine concettuale’ dell’oggetto**, aspetti che restano tuttavia in ‘compartimenti separati’, almeno per quanto riguarda certi modo di procedere”.
- **Inoltre quanto sopra visto mostra che i diversi registri di rappresentazione semiotica non sempre risultano “equivalenti”.**

I diagrammi di Eulero-Venn e gli altri registri rappresentativi

- È dunque molto importante (seguendo ancora: Duval, 1995) controllare il coordinamento dei registri rappresentativi...
- ... ma è anche necessario **chiedersi in che misura tale coordinamento risulti possibile.**
- La rappresentazione mediante i diagrammi di Eulero-Venn è **un processo certamente non banale** e non è "isomorfa" alla rappresentazione simbolica proposizionale delle singole relazioni di appartenenza.
- È ovviamente indispensabile che l'insegnante di matematica tenga conto di ciò!

Matematica e rappresentazioni: riflessioni conclusive

- Che cosa dunque "rappresentano" le rappresentazioni?
- E più in particolare: come si lega una rappresentazione simbolico-proposizionale ($x \in A \wedge y \in A \wedge y \in B$) ad una



- "Le proposizioni" non devono più essere "pensate come espressioni dell'esperienza, né come rappresentazioni di una realtà extra-empirica", bensì "come stringhe di segni e rumori usati dagli esseri umani **nello sviluppo e nella ricerca di pratiche sociali**" (Rorty, 1994, p. 146).

Matematica e rappresentazioni: riflessioni conclusive

- Ogni modalità mediante la quale esprimiamo la matematica **ha caratteristiche proprie e può sintetizzare tipi diversi di informazione** (la singole relazioni di appartenenza, le inclusioni etc.).
- Ogni modalità inoltre si collega ai diversi usi, alle pratiche sociali.
- Non appare dunque corretto pensare alle varie modalità di espressione matematica come a dei linguaggi sostanzialmente equivalenti, isomorfi, come a **forme diverse (basate su diverse convenzioni) di un preteso, assoluto "linguaggio matematico"**.

Matematica e rappresentazioni: riflessioni conclusive

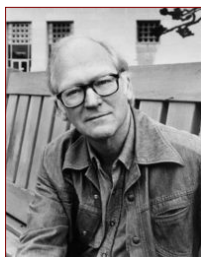
- Dal punto di vista didattico, si ricordi che **ogni tipo di notazione e di rappresentazione può presentare dei vincoli**; è molto importante rendersi conto di questi vincoli e cercare, se possibile, di superarli.
- Ad esempio, se in geometria si disegna un quadrato, quella figura può risultare utile nell'ambito di un procedimento, della risoluzione di un problema, ma introduce **vincoli specifici**: eppure non potrò mai disegnare due quadrati nel rapporto 1/1000000, un caso che in teoria non si può certo escludere
- In questa situazione si potrà tuttavia introdurre qualche accorgimento per superare la difficoltà.

Matematica e rappresentazioni: riflessioni conclusive

- "[...] Non esiste qualcosa come un linguaggio, se un linguaggio deve somigliare a quel che hanno creduto molti filosofi e linguisti. [...] Dobbiamo abbandonare il tentativo di far luce su come comunichiamo facendo appello a convenzioni".

Donald Davidson

(A Nice Derangement of Epitaphs. In: *Truth and Interpretation*. Blackwell, Oxford 1986, pp. 445-446.)



A tutti Voi grazie dell'attenzione

Grazie a **Claudio Bernardi**
e a **Jean-Philippe Drouhard**
per i preziosi suggerimenti



Grazie a
Dick Rorty
(4 ottobre 1931-
8 giugno 2007)

